



УДК 519.7

ТЕОРЕМА БАЙЄСА. АНАЛІЗ ДУМОК

Студ. Д.О. Заславська гр. БІТП 1-17

Науковий керівник доц. О.Л. Блохін

Київський національний університет технологій та дизайну

Метою цього дослідження є конкретизація принципів теореми Байєса та її основних понять, на основі цих досліджень навести приклад, що буде наглядно показувати теорему Байєса в дії.

Досліджувана мною теорема Байєса - одна з основних теорем елементарної теорії ймовірностей, що визначає ймовірність настання події в умовах, коли на основі спостережень відома лише часткова інформація про цю подію, спираючись на обставини, що могли би бути пов'язані з цією подією. Іншими словами, формула Байєса дає змогу більш точно перераховувати ймовірність, при цьому беручи до уваги як раніше відому інформацію, так і дані нових спостережень.

Томас Баєс - математик, що започаткував теорему, першим запропонував рівняння, яке дозволяє новим свідченням уточнювати переконання.

При використанні теореми Байєса, задіяні ймовірності можуть мати різні інтерпретації. В першому випадку інтерпретацій теорема Баєса може використовуватись напряму у певному підході до статистичного моделювання. При баєсовій інтерпретації ймовірності ця теорема виражає, як повинна раціонально змінюватися суб'єктивна міра впевненості при врахуванні свідчення: це є баєсовим висловлюванням, що є фундаментальним для баєсової статистики. Тим не менш, теорема Баєса має численні застосування у широкому спектрі обчислень із залученням ймовірностей, а не лише у баєсовому аналізі.

Формула Байєса дозволяє «переставити причину і наслідок»: за відомим фактом події обчислити ймовірність того, що воно було викликано даної причиною. Події, що відображають дію «причин», в даному випадку називають гіпотезами, так як вони - передбачувані події, що призвели до даного.

Важливим наслідком формули Байєса є формула повної ймовірності події, що залежить від декількох несумісних гіпотез (і тільки від них!).

$$P(B) = \sum_{i=1}^N P(A_i)P(B|A_i)$$

— ймовірність настання події B, залежить від ряду гіпотез A_i , якщо відомі ступені ймовірності цих гіпотез (наприклад, виміряні експериментально).

Висновок формули: якщо подія залежить тільки від причин A_i , то якщо воно відбулося, значить, обов'язково сталася якась із причин, тобто:

$$\sum_i P(A_i|B) = 1$$

За формулою Байєса

$$\sum_i \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = 1$$

Переносом $P(B)$ вправо отримуємо вираз, який шукали.

Формула елементарно виводиться з визначення умовної ймовірності:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Приклад:

Один з трьох стрільців виходить на лінію вогню і робить два постріли. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка дорівнює 0,3, для другого - 0,5; для третього - 0,8. Мішень не уражена. Знайти потрібно ймовірність того, що постріли зроблені першим стрільцем.

Розв'язання:

Можливі три гіпотези:

A_1 -- на лінію вогню виходить перший стрілок,

A_2 - на лінію вогню виходить другий стрілок

A_3 - на лінію вогню виходить третій стрілок

Так як вихід на лінію вогню будь-якого стрілка рівноможливий, то

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

В результаті досвіду спостерігалось подія В - після проведених пострілів мішень не уражена. Умовні ймовірності цієї події при зроблених гіпотезах рівні:

$$P(B | A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$

$$P(B | A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$$

$$P(B | A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

по формулі Байєса знаходимо ймовірність гіпотези A_1 після випробування:

$$P(A_1|B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика —М.: Высшее образование. 2005
2. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases / Daniel Kahneman, et al. — 21st. — Cambridge University Press, 2005