Matematika, informatika, počítačová věda
Mathematics, Informatics, Computer Science -

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Одокиенко Светлана Николаевна, *кандидат технических наук,*
Киевский национальный университет технологий и дизайна (Украина)

Аннотация. В работе рассматриваются особенности методов решения обратной задачи динамики на основе непараметрических моделей в виде интегральных уравнений Вольтерра I рода. В частности, в работе рассматриваются методы решения задачи восстановления сигнала.

Анотація. В роботі розглядаються особливості методів розв'язання зворотної задачі динаміки на основі непараметричних моделей у вигляді інтегральних рівнянь Вольтерра I роду. Зокрема, в роботі розглядаються методи розв'язання задачі відновлення сигналу.

Ключевые слова: непараметрические модели, интегральные уравнения, задача восстановления сигнала, метод квадратур.

Введение. При решении многих проблем физики и техники возникает необходимость в решении обратных задач. Постановки обратных задач, в отличие от прямых, нельзя воспроизвести в реальном эксперименте. Таким образом, можно условно говорить о физической некорректности постановки обратной задачи. Естественно, что при математической формализации она проявляется уже как математическая некорректность (чаще всего неустойчивость решения), и обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач.

Нарушение причинно-следственной связи, имеющее место в исходной постановке обратной задачи, предопределяет серьезные трудности их решения. В первую очередь, это трудности разработки методов и алгоритмов, дающих достоверные результаты. Тем не менее, как будет показано в дальнейшем, указанные трудности вполне преодолимы. Исходя из общего назначения все обратные задачи, вне зависимости от рассматриваемого физического процесса или технической системы, можно разделить на три класса:

- обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации физических процессов;
- обратные задачи, возникающие при проектировании технических объектов;
- обратные задачи, возникающие при управлении процессами и объектами.

Обратные задачи первого класса обычно связаны с экспериментальными исследованиями, когда требуется по некоторым измеренным "выходным" следственным характеристикам восстановить входные причинные. Эти задачи первичны как по отношению к прямым задачам, так и по отношению к другим классам обратных задач, поскольку они связаны с построением математических моделей и наделением их количественной информацией.

Обратные задачи типа проектирования заключаются в определении проектных характеристик (синтезе) технического объекта по заданным показателям качества при соответствующих ограничениях. При этом искомые характеристики являются причинными по отношению к этим показателям и ограничениям.

В случае управления системами роль причинных характеристик выполняют управляющие воздействия, вследствие изменения которых реализуется тот или иной эффект управления, выражающийся через состояние системы — следствие.

Нужно отметить, что между задачами типа диагностики и идентификации и задачами типа проектирования и управления существует принципиальное различие. Для задач проектирования и управления расширение класса допустимых решений обычно упрощает ситуацию, так как требуется найти любое технически реализуемое решение, обеспечивающее экстремум критерия качества с заданной точностью. В то же время для задач идентификации и диагностики, чем шире класс возможных решений, тем хуже, в частности, больше могут быть погрешности определяемых причинных характеристик, что требует обязательного использования регулярных методов решения этих задач [1,2].

Ранее считалось, что некорректные задачи лишены физического смысла и их не имеет смысла решать. Однако имеется много важных прикладных задач физики, техники, геологии, астрономии, механики и т. д., математически описываемых адекватно и тем не менее являющихся некорректными, что сделало актуальной проблему разработки эффективных методов их решения.

Как правило, обратные задачи описываются интегральными уравнениями Фредгольма 1 рода, в частности задачи обработки экспериментальных данных. Существует немало математических методов решения этих уравнений. Каждый метод имеет определенные достоинства и недостатки. Поэтому при его выборе необходимо сопоставить особенности конкретной задачи с эффективностью применения того или иного метода при её решении. В работе [3] сделан обзор существующих методов обработки экспериментальных данных и даны рекомендации по выбору того или иного метода.

Постановка задачи. Целью данной работы является исследование особенностей применения интегральных моделей для решения обратных задач динамики. Основные задания исследования:

- определить область приложения интегральных уравнений относительно классов задач динамики;
- рассмотреть решение задачи восстановления сигнала на основе интегральных моделей.

Задача восстановления сигнала. Одной из часто решаемых обратных задач является задача восстановления сигнала на входе динамического объекта. Для решения данного типа задач применяется как частотный метод, описанный в работе [4], так и метод решения на основе интегральных уравнений.

Непараметрические модели (в виде интегральных уравнений) являются самостоятельным и своеобразным видом математического описания задач динамики. В отличие от параметрических моделей (например, в виде дифференциальных уравнений), для формирования которых в качестве исходных данных используются заданные параметры структурированного объекта, непараметрические динамические модели формируются на основе заданных динамических характеристик объекта, его звеньев или элементов. В качестве непараметрических динамических моделей в этом случае применяются интегральные уравнения типа Вольтерра.

Конкретные типы интегральных уравнений достаточно четко соответствуют сложившимся классам задач динамики. Так, интегральными уравнениями Вольтерра I рода описываются обратные задачи, типовым примером которых является задача восстановления сигнала, принятого динамической системой. Интегральными уравнениями Вольтерра II рода (линейными и нелинейными) описывают задачи анализа динамических систем с явно выраженным однонаправленным изменением независимой переменной, например, времени. Характерным примером таких задач являются системы с обратными связями.

В последнее время наблюдается значительное расширение области приложения интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра. В круг многочисленных естественнонаучных приложений этого класса уравнений, как уже говорилось, входят задачи восстановления сигналов, поступающих на входы измерительных приборов и систем наблюдения, которые ввиду реальности своих характеристик вносят искажения в наблюдаемые и регистрируемые данные. Отличительная особенность данного класса задач заключается в использовании как традиционных численных методов, так и методов решения некорректных задач.

Если рассматривается задача интерпретации наблюдений, то связь между входным сигналом *y(s),* поступившим в систему, и выходным сигналом *f(x)* описывается (для линейной системы) в виде уравнения Фредгольма I рода

$$\int_a^b h(x,s)y(s)ds = f(x) \quad c \le x \le d,$$

где, в частности, $a=c=0$ или $a=c=-\infty$, $b=d=\infty$. Ядро *h(x,s)* имеет общее название функции отклика на единичный импульс или весовой функции линейной системы.

Если *h(x,s)=h(x-s)* (система в этом случае имеет общее название однородной или инвариантной к сдвигу), то

$$\int_a^b h(x-s)y(s)ds = f(x) \quad c \le x \le d.$$

Данной задаче применительно к динамической системе соответствует уравнение Вольтерра I рода

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \qquad x,s \in [a,b], \tag{1}$$

которое является частным случаем уравнения Фредгольма I рода.

При исследовании и решении уравнений (1) требуются дополнительные ограничения по сравнению с уравнениями Вольтерра II рода. Если $K(a, a) \neq 0$, $f(a) = 0$ и если функции $f(x)$, $K(x, s)$ допускают производные $f'(x)$, $K'_x(x, s)$, непрерывные в интервале (a,b), заключенном в интервале интегрирования, внутри которого $K(x, x)$ не обращается в нуль, то уравнение Вольтерра I рода допускает в этом интервале (a,b) непрерывное и единственное решение.

Особенность задачи решения уравнений Вольтерра I рода состоит в том, что она является в определенном смысле промежуточной между задачами решения уравнений Вольтерра II рода и Фредгольма I рода. Если задача решения уравнения Вольтерра II рода является корректной и эффективно решается классическими методами (квадратур, итераций и др.), а задача решения уравнения Фредгольма I рода — некорректной в любых «разумных» функциональных пространствах и решается специальными методами (регуляризации, квазирешений и др.), то задача решения уравнения Вольтерра I рода может быть корректной и некорректной в зависимости от того, в каких пространствах она рассматривается и каким методом решается [2,5].

Определение корректности включает: 1) существование решения, 2) единственность и 3) его устойчивость. С этих позиций и будем рассматривать вопрос о корректности (или некорректности) задачи решения уравнения Вольтерра I рода. В интегральных уравнениях Вольтерра I рода отсутствует искомая функция вне знака интеграла, что приводит к некоторым трудностям и отличиям при их решении по сравнению с уравнениями II рода.

Указанные особенности уравнения Вольтерра I рода позволяют использовать для его решения как классические методы (например, метод квадратур, причем сама процедура дискретизации в этом методе обладает регуляризирующим свойством, если связать шаг дискретизации с ошибкой исходных данных), так и специальные методы регуляризации.

Для решения интегральных уравнений Вольтерра применяются аналитические, операционные, квадратурные, итерационные и другие методы [2,5,6]. Применение аналитических методов решения уравнений Вольтерра возможно лишь в некоторых частных случаях, прежде всего, при аналитическом задании ядра и правой части решаемого уравнения. Некоторые принципиальные трудности имеются также при применении аналитических методов к задачам восстановления входных сигналов динамических систем, что объясняется в том числе и тем, что ядро и правая часть системы уравнения обычно имеют экспериментальное происхождение.

Применение итерационных методов также не всегда дает желаемый результат. Трудности связаны, в частности, с тем, что число итераций определяется скоростью сходимости вычислительного процесса к значениям искомой функции в узлах дискретизации, что может потребовать значительных затрат времени.

Таким образом, прямое применение аналитических и итерационных методов решения интегральных уравнений может быть связано с определенными трудностями при создании высокопроизводительных алгоритмов и, тем более, структур специализированных средств вычислительной техники, предназначенных для реализации интегральных моделей динамических систем.

Одним из эффективных методов приближенного решения интегральных уравнений является метод квадратур [2], важным достоинством которого являются простота его реализации и высокая устойчивость вычислительных алгоритмов. Устойчивость при этом обеспечивается за счет регуляризирующих свойств метода, причем параметром регуляризации является шаг квадратуры. Необходимо отметить, что использование формулы левых и средних прямоугольников, а также трапеций для решения интегральных уравнений Вольтерра, обеспечивают сходимость метода, благодаря специфическим соотношением весов указанных квадратур.

Методика замены интеграла суммой в уравнениях Вольтерра I рода и получения аппроксимирующей алгебраической системы остается такой же, как и в случае уравнений Вольтерра II рода. Однако особенность уравнений I рода, состоящая в отсутствии искомой функции вне знака интеграла, приводит к некоторым отличиям. При решении интегрального уравнения (1) методом квадратур используется выражение

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s)\varphi(s)ds = f(x_i),\ i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

которое получается из исходного уравнения (1) при фиксированных значениях x_i независимой переменной x. Принимая значение x_i в качестве узлов квадратурной формулы и заменяя с ее помощью интеграл в (2) конечной суммой, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^{i-1} A_j K(x_i, x_j)\cdot \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i) \tag{3}$$

где A_j - коэффициенты квадратурной формулы; $\tilde{\varphi}(x_j)$ - приближенные значения искомой функции в узлах x_j ; $j = 1,2...,i$; $x_i = (i-1)\cdot h$; $i = \overline{1,n}$; h - шаг квадратуры.

В системе (3) невозможно определить значение $\varphi(0)$, так как при $x = x_1 = a$ интеграл в уравнении (1) равен нулю и $f(a) = f_1 = 0$. Поэтому для определения $\varphi(0)$ воспользуемся выражением $\varphi(0) = \frac{f'(0)}{K(a,0)}$, полученным в результате дифференцирования уравнения (1) по x при $x = 0$.

Теперь система (3) позволяет последовательно определить искомые приближенные значения по рекуррентной формуле

$$\tilde{\varphi}(x_j) \cong \frac{1}{A_j K(x_i, x_i)} \cdot \left(f(x_i) - \sum_{j=1}^{i-1} A_j K(x_i, x_j) \cdot \tilde{\varphi}(x_j) \right). \qquad (4)$$

Для вычисления $f'(0)$ можно воспользоваться различными интерполяционными способами, в частности, использование формулы квадратичной интерполяции позволяет получить выражение $f'(0) = \frac{1}{2h}\left[-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)\right]$.

Можно заметить, что при $K(x_i, x_i) = 0$ в интервале интегрирования для приближенного решения интегрального уравнения (1) невозможно применить расчетные выражения (4), так как при этом необходимо выполнять операцию деления на $K(x_i, x_i)$. Однако, применение формулы средних прямоугольников снимает данное ограничение, так как согласно этой формуле, значение искомой функции определяется в узлах $x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \cdot h$.

Как видно из выражения (4), при решении уравнений Вольтерра I рода с произвольным ядром время вычисления искомой функции $\tilde{\varphi}(x_i)$ зависит от числа шагов дискретизации, т.е. с увеличением количества шагов дискретизации пропорционально увеличивается количество циклов по j, следовательно, и количество вычислительных операций.

Данную трудность можно обойти, если регулярное ядро (например, степенного вида) интегрального уравнения (1) обладает свойством представимости в виде суммы произведений независимых функций, т.е. имеет вид: $K(x,s) = \sum^{m} \alpha_l(x)\beta_l(s), \quad (l = \overline{1,m}), \quad m \in N$. С учетом этого уравнение (1) принимает вид

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l(x) \int_a^x \beta_l(s)\varphi(s)ds = f(x). \qquad (5)$$

При решении уравнения (5) методом квадратур количество вычислительных операций не зависит от номера шага дискретизации, т.е. количество вычислений на каждом шаге остается неизменным. Поэтому при машинной реализации таких алгоритмов значительно сокращаются затраты времени на их решение и объем требуемой памяти ЭВМ.

Особенности уравнений Вольтерра I рода требуют целенаправленного выбора численных алгоритмов для решения. Исходя из компромисса между сложностью вычислительного процесса и точностью результатов, могут быть выбраны различные модификации метода квадратур. Достаточно эффективными при решении задач с „инженерной" точностью оказываются алгоритмы на основе формул прямоугольников и трапеций, причем в качестве регуляризирующего параметра может быть использована величина шага интегрирования.

Одним из путей преодоления трудностей, возникающих при решении интегральных уравнений Вольтерра I рода, является преобразование их к уравнениям Вольтерра II рода или обыкновенным дифференциальным уравнениям [2]. Это допустимо не всегда, но в некоторых случаях возможно и целесообразно.

Решение уравнений Вольтерра I рода путем приведения их к уравнениям Вольтерра II рода позволяет применить методы для решения уравнений второго рода. Обычно рассматриваются способы такого перехода, основанные либо на дифференцировании исходного уравнения, либо на — интегрировании по частям [2].

Рассмотрим решение задачи восстановления сигнала, описываемой интегральным уравнением I рода, на следующем примере.

Пример. Пусть решается следующее интегральное уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_0^t \sin(t-s)y(s)ds = e^{\frac{t^2}{2}} - 1. \qquad (6)$$

Дифференцируя обе части уравнения (6) по t получаем $\sin(t-t)y(t) + \int_0^t \cos(t-s)y(s)ds = te^{\frac{t^2}{2}}$ или

$$\int_0^t \cos(t-s)y(s)ds = te^{\frac{t^2}{2}}. \qquad (7)$$

Как видим, уравнение (7) тоже является уравнением Вольтерра I рода. После дифференцирования уравнения (7) получаем интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$y(t) - \int_0^t \sin(t-s)y(s)ds = \left(1+t^2\right)e^{\frac{t^2}{2}} \qquad (8)$$

Используя свойство разделяемости ядер и применяя формулу средних прямоугольников к уравнению (6) и формулу трапеций к уравнениям (7) и (8), соответственно имеем рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{y}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f(h)}{h\sin(0{,}5h)}, \\ &\widetilde{y}\left(t_{i-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sin(0{,}5h)}\left[\frac{f(t_i)}{h} - \left(\sin t_i \sum_{j=0}^{i-2} \cos t_{j+\frac{1}{2}} \widetilde{y}\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) - \cos t_i \sum_{j=0}^{i-2} \sin t_{j+\frac{1}{2}} \widetilde{y}\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right)\right], \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$i = 2,3,...,$$

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{y}_I(0) = \frac{\psi'(0)}{\cos(0)} = \psi'(0) = 1, \\ &\widetilde{y}_I(t_i) = 2\left[\frac{\psi(t_i)}{h} - \left(\cos t_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j \cos t_j \widetilde{y}(t_j) + \sin t_i \sum_{j=1}^{i-1} A_j \sin t_j \widetilde{y}(t_j)\right)\right], \quad i = 2,3,... \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{y}_{II}(0)=\varphi(0)=1, \\ &\tilde{y}_{II}(t_i)=\varphi(t_i)+h\left(\sin t_i\sum_{j=1}^{i-1}\cos t_j\tilde{y}(t_j)+\cos t_i\sum_{j=1}^{i-1}A_j\sin t_j\tilde{y}(t_j)\right),\quad i=2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $f(t_i)=e^{\frac{t_i^2}{2}}-1, \psi(t_i)=t_i e^{\frac{t_i^2}{2}}, \varphi(t_i)=(1+t_i^2)e^{\frac{t_i^2}{2}}$.

Решение будем искать на интервале [0; 3,2] с шагом дискретизации h=0,02. По результатам вычислений, произведенных с применением программ, написанных в среде Matlab, построен график (Рис.1) погрешностей решения уравнения (6), где εI(t) - погрешность решения по выражению (10) в сравнении с точным решением, εII(t) - погрешность решения по выражению (11), εIsrp(t) - погрешность решения по выражению (9).

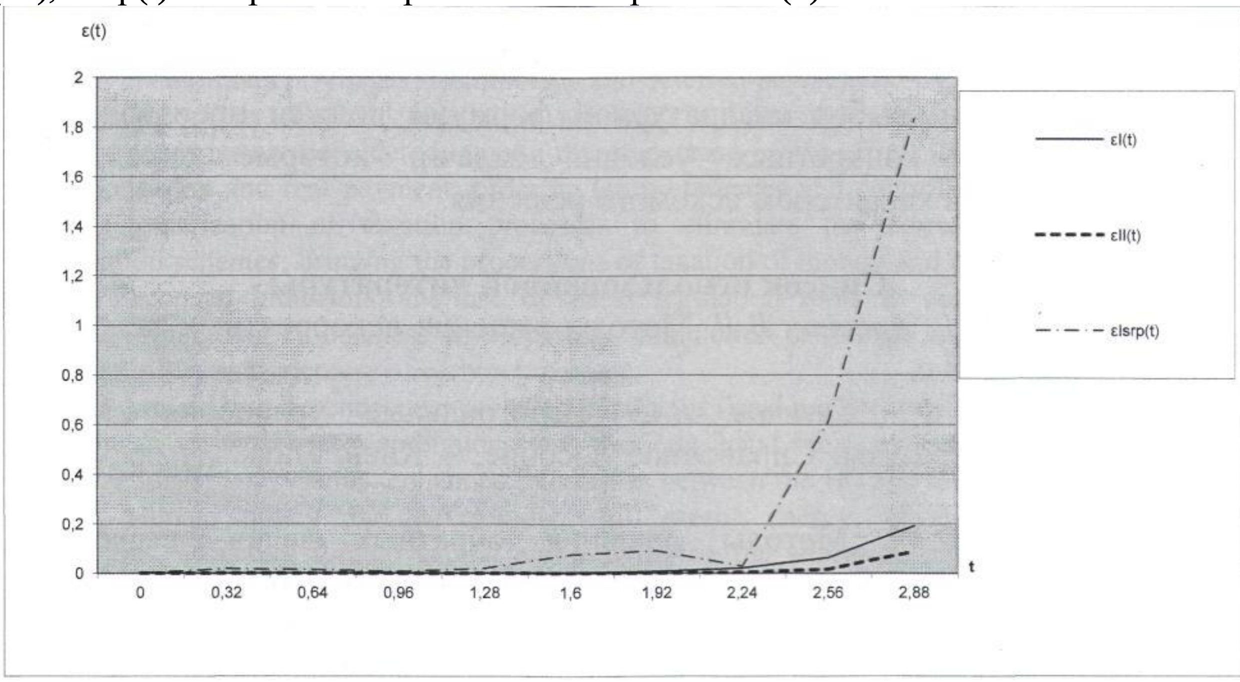

Рис. 1. График погрешностей решения уравнения (6)

Как видим из полученных результатов, определение значений неизвестной функции в узлах дискретизации по выражению (10) точнее, чем (9), и определение по выражению (11) точнее, чем (9) и (10), что подтверждает вывод о большой устойчивости алгоритмов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода. Но при этом необходимо учесть, что применение квадратурной формулы средних прямоугольников (9) не потребовало предварительных преобразований исходного уравнения (6), в то время как применение формулы трапеций вызвало затруднения, связанные с делением на ноль, и потребовало дифференцирования исходного уравнения.

Таким образом, несмотря на то, что применение формулы трапеций позволяет достигать компромисса между точностью результатов и численной устойчивостью, в этом случае приходится решать трудоемкую задачу определения начального значения искомой функции.

Поэтому при решении задачи восстановления сигнала, описываемой интегральным уравнением Вольтерра I рода, выбор квадратурной формулы должен производиться в зависимости от конкретных условий задачи, которые определяются свойствами ядра и характером искомого решения.

Выводы. Интегральные уравнения Вольтерра I рода описывают задачу восстановления входных воздействий, поступающих на объект при известной его динамической характеристике и измеренном выходном сигнале. Особенности уравнений требуют целенаправленного выбора численных алгоритмов для решения. Исходя из компромисса между сложностью вычислительного процесса и точностью результатов, могут быть выбраны различные модификации метода квадратур. Достаточно эффективными при решении задач с „инженерной" точностью оказываются алгоритмы на основе формул прямоугольников и трапеций, причем в качестве регуляризирующего параметра может быть использована величина шага интегрирования. Но все же окончательный выбор квадратурной формулы должен производиться в зависимости от конкретных условий задачи, которые определяются свойствами ядра и характером искомого решения.

Список использованной литературы

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986.-288 с.
2. *Верланъ А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: Методы. Алгоритмы. Программы: Справочное пособие. - Киев: Наук, думка, 1986. - 548 с.
3. *Немцова О.М.* Методы решения обратных задач, выраженных интегральными уравнениями Фредгольма первого рода // Вестник Удмуртского университета. Физика. - 2005. - №4. - С.23-34.
4. *Костъян Н.Л.* Частотный способ восстановления сигнала на входе линейного динамического объекта Н.Л. Костьян, Б.С. Аскарходжаев, В.В. Понедилок / Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія технічні науки: зб. наук, праць. - Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. - 2012. - № 7. - С 88-94.
5. *Довгий С. А., Лифанов И. К.* Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения / НАН Украины; Институт гидромеханики {Киев}; Военный авиационный техн. ун-т им. Н.Е.Жуковского {Россия}. — К. : Наукова думка, 2002. — 342с.
6. *Верланъ, А. Ф.* Методы математического и компьютерного моделирования измерительных преобразователей и систем на основе интегральных уравнений. : монография / А. Ф. Верлань, М.В. Сагатов, А.А. Сытник. — Т.: Изд-во Фан, 2011. — 336 с.