

*Чупринка В.І., д.т.н., проф., Грикун Д.В., аспірант,  
Чупринка Н.В., к.т.н., асистент*

*Київський національний університет технологій та дизайну*

**МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ АВТОМАТИЗОВАНОЇ  
ПІДГОТОВКИ РАЦІОНАЛЬНИХ СХЕМ РОЗКРОЮ МАТЕРІАЛІВ  
ЗІ СКЛАДНОЮ КОНФІГУРАЦІЄЮ ЗОВНІШНІХ КОНТУРІВ  
НА ПЛОСКІ ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ**

*Анотація.* В роботі запропоновані математична модель та алгоритми, які були реалізовані в програмне забезпечення автоматизованого проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти. Для розробки математичної моделі задачі автоматизованого проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти було формалізовано її структурні компоненти. Використавши розглянуті структурні компоненти, було розроблено алгоритм та програмне забезпечення автоматизованого проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти. Це програмне забезпечення підвищує показники економії матеріалу і продуктивність праці.

*Ключові слова:* раціональний розкрій; матеріал; зовнішній контур; системне розміщення; площина; інтерактивне коригування.

*Chuprinka V.I., Grikun D.V., Chuprinka N.V.*

*Kyiv National University of Technologies and Design*

**MATHEMATICAL AND SOFTWARE FOR AUTOMATED PREPARATION  
OF A RATIONAL SCHEME FOR CUTTING MATERIALS WITH  
A COMPLEX CONFIGURATION OF THE OUTER CONTOUR  
INTO FLAT GEOMETRIC OBJECTS**

*Abstract.* The paper proposes a mathematical model and algorithms that have been implemented in the software of automated design of rational schemes for cutting materials with a complex configuration of the outer contour into flat geometric objects. To develop a mathematical model of the problem of automated design of rational schemes for cutting materials with a complex configuration of the outer contour into flat geometric objects, its structural components were formalized. Using the considered structural components the algorithm and the software of the automated designing of rational schemes of cutting of materials with a difficult configuration of an external contour on flat geometrical objects were developed. This software increases material savings and productivity.

*Keywords:* rational cutting; material; external contour; system placement; plane; interactive adjustment.

**Вступ.** У будь-які галузі промисловості питання витрат матеріалу при виробництві завжди було дуже актуальним. Висока матеріалоемність та значна вартість використовуваних матеріалів роблять задачу мінімізації витрат особливо важливою для взуттєвої промисловості. При чому максимальна кількість втрат площі виникає при розкрої натуральних шкір. Тому у виробництво необхідно впроваджувати новітні технології, які базуються на застосуванні засобів автоматизованої обробки інформації та дозволяють підвищити показники економії матеріалу і продуктивність праці.

В більшості випадків процес підготовки раціональних схем розкрою листових матеріалів на деталі взуття виконуються вручну. Але розвиток обчислювальної техніки та методів обчислювальної математики дозволяють виконувати ці етапи в автоматичному режимі. Розробка методу проектування раціональних схем розкрою

матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти дозволило розробити математичне та програмне забезпечення для автоматизованого проектування раціональних схем розкрою натуральних матеріалів на деталей взуття. Це програмне забезпечення підвищує показники економії матеріалу і продуктивність праці.

**Постановка завдання.** Розробити математичну модель задачі автоматичного проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти. На основі запропонованої математичної моделі розробити алгоритми та програмне забезпечення для автоматизованого проектування раціональних схем розкрою.

**Результати досліджень.** Проектуванню раціональних схем розкрою матеріалів на плоскі геометричні об'єкти присвячено багато робіт. В роботах [1–3] представлені математичні моделі компактного розміщення опуклих плоских геометричних об'єктів. Але в більшості випадків деталі взуття є не опуклі плоскі геометричні об'єкти. В роботах [4–9] застосовуються генетичні алгоритми. Але ці алгоритми не завжди дають задовільний результат за обмежений час. Тому завданням цієї роботи є розробка методу автоматичного проектування раціональних схем розкрою матеріалів будь-якою конфігурацією зовнішнього контуру для плоских геометричних об'єктів з складною конфігурацією зовнішніх контурів. Але задача автоматичного проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти в такій постановці не розглядалася.

Для розв'язання цієї задачі необхідно математична постановка задачі, в якій сформулювати технологічні вимоги та обмеження.

Для розробки математичної моделі задачі автоматичного проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти необхідно формалізувати її структурні компоненти:

- аналітичний опис зовнішнього контуру матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру;
- аналітичний опис плоских геометричних об'єктів, для яких необхідно спроектувати раціональні схеми розкрою на матеріалі зі складною конфігурацією зовнішнього контуру;
- параметри, що однозначно визначають положення плоского геометричного об'єкту на площині;
- побудова щільних укладок для плоских геометричних об'єктів;
- побудова схеми розкрою в прямокутній області заданих розмірів за параметрами спроектованої щільної укладки;
- перенесення спроектованої схеми на матеріал зі складною конфігурацією зовнішнього контуру;
- інтерактивне коригування схеми розкрою, що спроектована в автоматичному режимі, для матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру.

Для опису зовнішнього контуру матеріалу і дефектів будемо застосовувати кусково-лінійну апроксимацію. Зовнішня границя області  $\Omega$  буде задаватися вершинами опукло-ввігнутого многокутника  $\{X_j^s, Y_j^s\}, j=1..k$ . Дефекти будуть задаватися також вершинами апроксимуючого многокутника, де  $M(l)$  – кількість вершин опукло-вгнутого апроксимуючого многокутника для  $l$ -го дефекту;  $r$  – кількість дефектів;  $k$  – кількість вершин опукло-вгнутого многокутника для зовнішнього контуру матеріалу.

Для опису зовнішнього контуру плоских геометричних об'єктів  $\{Q_i\}_{i=1,2,\dots,m}$  будемо також застосовувати кусково-лінійну апроксимацію. При такій апроксимації будь-який плоский геометричний об'єкт  $S_i$  буде однозначно визначений координатами вершин опукло-ввігнутого многокутника, тобто  $\{X_j^i, Y_j^i\}, j=1, N(i)$ .

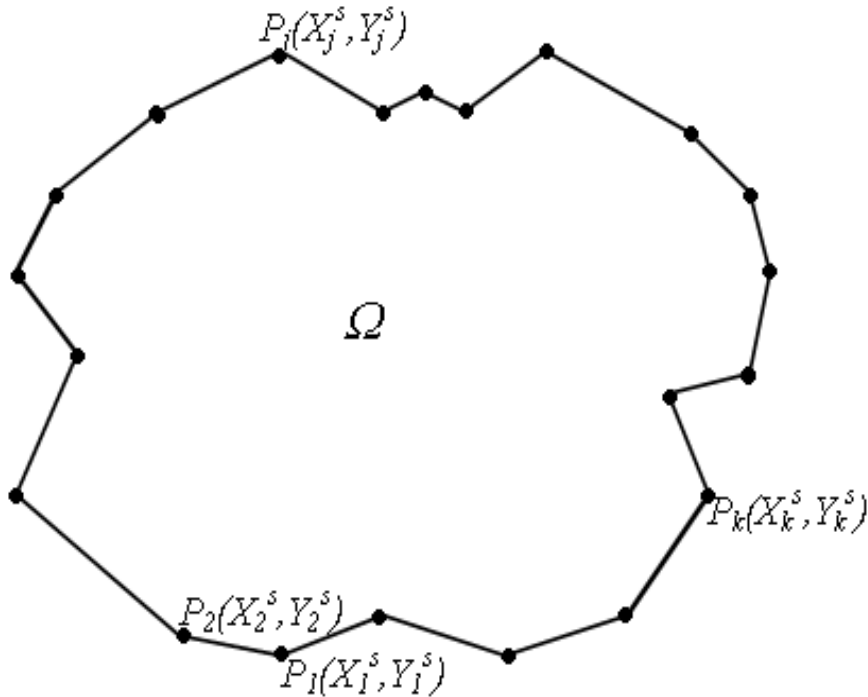


Рис. 1. Апроксимація зовнішнього контуру матеріалу складної конфігурації

Параметри, які однозначно визначають положення плоского геометричного об'єкту на площині:

$N_i$  – ідентифікатор, за яким однозначно визначається необхідний плоский геометричний об'єкт;

$X_i, Y_i$  – координати полюсу плоского геометричного об'єкту  $S_i$  (будь-якої фіксованої точки на плоскому геометричному об'єкті відносно якого визначені координати апроксимуючого многокутника для цього об'єкту) в системі координат, що пов'язана з площиною;

$\varphi_i$  – кут повороту плоского геометричного об'єкту  $S_i$  відносно його основного положення.

**Побудова щільної укладки плоских геометричних об'єктів.** Розглянемо на площині об'єкти  $S_1$  та  $S_2$ . Нехай  $\text{int } S = S - S^{\wedge}$ , де  $S^{\wedge}$  – границя об'єкта  $S$ . Об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  не перетинаються, якщо

$$\text{int } S_1 \cap \text{int } S_2 = 0. \quad (1)$$

Якщо одночасно виконується умова

$$S_1 \cap S_2 \neq 0 \quad (2),$$

то об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  називаються щільно розміщеними.

Щільно розміщені об'єкти не мають спільних внутрішніх точок, але обов'язково мають спільні граничні точки.

Система об'єктів  $S_i$ ,  $i = 1..p$ , утворюють на площині укладку, якщо для кожної пари об'єктів із цієї системи виконуються умови їх взаємного неперетину:

$$\text{int } S_n \cap \text{int } S_m = 0, n \neq m, n, m = 1..p \quad (3)$$

та для будь-якого об'єкта  $S_i$ ,  $i = 1..p$  знайдеться хоч один об'єкт  $S_q$ , де  $q \in [1..p]$ ,  $p \neq i$ , який дотикається до об'єкта  $S_i$ .

Розглянемо систему об'єктів  $\bigcup_{n,m} S_1^{nm}$  та  $\bigcup_{n,m} S_2^{nm}$ , де  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm k, \dots$ , які складаються із трансляції  $S_1^{nm} = S_1 + na_1 + ma_2$  та  $S_2^{nm} = S_2 + na_1 + ma_2 + g$  об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  на вектори подвійної решітки  $W = W(a_1, a_2, g)$  [10–11]. Якщо ця система є укладкою, то така укладка називається укладкою об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , виконаної по подвійній решітці  $W = W(a_1, a_2, g)$ . Подвійна решітка  $W = W(a_1, a_2, g)$  в цьому випадку є допустимою для укладки об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ . Подвійна решітка представляє собою дві однакові одинарні решітки  $A_1 = A(a_1, a_2)$  та  $A_2 = A(a_1 + g, a_2 + g)$ , які зміщені одна відносно іншої на вектор зсуву решітки  $g$ . У вузлах решітки  $A_1$  розміщуються об'єкти  $S_1$ , а у вузлах решітки  $A_2$  розміщуються об'єкти  $S_2$ .

Абсолютна величина визначника, який складений із векторів решітки, називається визначником решітки  $W$  та позначається  $\det W$ , де [12]:

$$\det W = |[\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]| = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ a_{2x} & a_{2y} \end{vmatrix} = |a_{1x}a_{2y} - a_{2x}a_{1y}|. \quad (4)$$

Щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки можна характеризувати за допомогою співвідношення:

$$\delta_s(W) = (|S_1| + |S_2|) / \det W, \quad (5)$$

де  $|S_1|$  та  $|S_2|$  – відповідно площі плоского геометричного об'єкта  $S_1$  та  $S_2$ ,  $\det W$  – визначник решітки  $W = W(a_1, a_2, g)$ , за якою виконана укладка. Із наведеного співвідношення видно, що щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки тим вища, чим менша площа паралелограма, сторонами якого є базові вектори решітки  $a_1$  та  $a_2$ .

В задачі побудови найщільнішої решітчастої укладки можна виділити наступні структурні компоненти:

- аналітичний опис умов взаємного неперетину деталей в укладці;
- аналітичний опис системи суміщення деталей в укладці;
- математичний опис множини допустимих розв'язків задачі;
- аналітичне представлення функції цілі.

Для аналітичного представлення умов взаємного неперетину деталей при їх суміщенні використаємо годограф вектор-функції щільного розміщення (ГВФЩР) [10–11]. Нехай  $S_1$  та  $S_2$  – два об'єкти, які зберігають постійну взаємну орієнтацію. Позначимо через  $O_1$  та  $O_2$  полюси об'єктів, які вибрані в довільних точках даних об'єктів. Тоді  $X_1O_1Y_1$  та  $X_2O_2Y_2$  – системи координат, які жорстко зв'язані з об'єктами  $S_1$  та  $S_2$  відповідно. Без обмеження відповідні координатні осі можна вважати направленими однаково. Припустимо, що об'єкт  $S_1$  нерухомо закріплений на площині, а об'єкт  $S_2$  – рухомий. Розглянемо множину можливих щільних положень об'єкта  $S_2$  по відношенню до об'єкта  $S_1$ . Кожне таке положення характеризується вектором  $r_{12} = O_1O_2$ . Вектор-функція, що ставить у відповідність щільному положенню об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  значення вектора  $r_{12}$  при умові, що об'єкт  $S_1$  нерухомий, називається годографом вектор-функції  $\Gamma_{12}$  щільного розміщення об'єкту  $S_2$  відносно об'єкта  $S_1$ .

**Математичний опис множини допустимих розв'язків задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки.** Для математичного опису множини допустимих розв'язків задачі побудови найщільнішої решітчастої укладки використаємо апарат ГВФЦР. Очевидно, що множиною допустимих розв'язків цієї задачі буде множина допустимих подвійних решіток  $W^i = W(a^i_1, a^i_2, g^i)$ , де  $i=1, 2, \dots, q$ . Визначивши область зміни параметрів  $a^i_1, a^i_2, g^i$  подвійних решіток  $W^i$  ми однозначно визначимо множину допустимих розв'язків. Подвійна решітчаста укладка однозначно визначається взаємним розміщенням трьох сусідніх рядів (рис. 2). За розміщення деталей в рядах відповідає вектор  $a^i_1$ , за взаємне розміщення рядів відповідають вектори  $a^i_2$  та  $g^i$  або вектори  $p^i$  та  $g^i$ . Вектор  $p^i$  визначає положення верхнього ряду, а вектор  $g^i$  визначає положення нижнього ряду відносно базового середнього ряду укладки. Як видно із рис. 2  $a^i_2 = B_1A_1 = B_2A_2 = \dots = B_5A_5$ , то тоді  $a^i_2$  визначається через вектори  $p^i$  та  $g^i$  наступним чином  $a^i_2 = p^i - g^i$ .

Розглянемо множини допустимих розв'язків для задачі щільної укладки плоских геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , тобто для задачі побудови найщільнішої решітчастої укладки деталей виду  $S_1$  та  $S_2$  (деталі  $S_1$  повернуті ряду на кут  $\alpha$  та деталі  $S_2$  повернуті ряду на кут  $\beta$  відносно їх вихідного положення). В цьому випадку необхідно впевнитись, що задача має розв'язок. Для цього побудуємо ГВФЦР  $r = r_{11}(\theta)$  для деталі  $S_1$  з самою собою та ГВФЦР  $r = r_{22}(\theta)$  для деталі  $S_2$  з самою собою. Знайдемо  $min\_r_{11}, min\_r_{22}, max\_r_{11}, max\_r_{22}$  для яких виконуються наступні нерівності [13]:

$$min\_r_{11} \leq |r_{11}(\theta)| \leq max\_r_{11} \text{ та } min\_r_{22} \leq |r_{22}(\theta)| \leq max\_r_{22}.$$

Якщо

$$(min\_r_{11} \leq |r_{11}(\theta)| \leq max\_r_{11}) \cap (min\_r_{22} \leq |r_{22}(\theta)| \leq max\_r_{22}) \in \emptyset, \quad (6)$$

то задача не має розв'язку, інакше знаходимо множину векторів  $a^i_1$  та кути  $\alpha_i$  та  $\beta_i$ , для яких виконується рівність  $r_{11}(\alpha_i) = r_{22}(\beta_i)$ . Тоді  $a^i_1 = r_{11}(\alpha_i) = r_{22}(\beta_i)$ .

Повернемо плоский геометричний об'єкт  $S_1$  на кут  $\alpha$ , а плоский геометричний об'єкт  $S_2$  на кут  $\beta$  та позначимо повернуті плоскі геометричні об'єкти через  $S_{1\alpha}$  та  $S_{2\beta}$ .

Тоді середній ряд щільної укладки можна представити наступним чином:

$$\bigcup_n (S_{1\alpha} + n a^i_1), \text{ де } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Навколо плоских геометричних об'єктів в середньому ряду побудуємо ГВФЦР  $\Gamma_{12}$  плоского геометричного об'єкту  $S_{1\alpha}$  з плоским геометричним об'єктом  $S_{2\beta}$ . Внутрішню область годографа позначимо через  $\Phi_{12}$ . Тоді зону заборони для кінців векторів  $p^i$  та  $g^i$  визначимо наступним виразом:

$$\bigcup_n (\hat{O}_{21} + n a^i_1), \text{ де } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

Для кожного допустимого вектора  $a^i_1$  ми матимемо свої допустимі значення векторів  $p^i$  та  $g^i$ . Допустимі значення для векторів  $p^i$  та  $g^i$  вибираємо із умови, що кінці векторів  $p^i$  та  $g^i$  не повинні знаходитися у зоні заборони (8) та повинні знаходитися на годографі  $\Gamma_{12}$ . Крім того, вони повинні лежати по різні сторони від середнього ряду, тобто по різні сторони прямої  $O_1O_2 \dots O_n$ , що проходить через полюси плоских геометричних об'єктів середнього ряду (рис. 2). Позначимо криві, на яких можуть знаходитись кінці векторів  $p^i$  та  $g^i$  через  $Pu$  та  $Pd$  (рис. 2). Ці криві періодичні, з періодом рівним довжині вектора  $a^i_1$ , тобто  $A_1A_2 = {}_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = |a^i_1|$ . Тому для області допустимих значень для векторів  $p^i$  та  $g^i$

достатньо обмежитись одним періодом. Визначивши область допустимих значень для векторів  $a^i, p^i$  та  $g^i$  ми однозначно визначили множину допустимих подвійних решіток  $W^i=W(a^i, a^i, g^i)$ , де  $i=1,2..q$ , тобто область допустимих розв'язків задачі укладки для плоских геометричних об'єктів виду  $S_1$  та  $S_2$ .

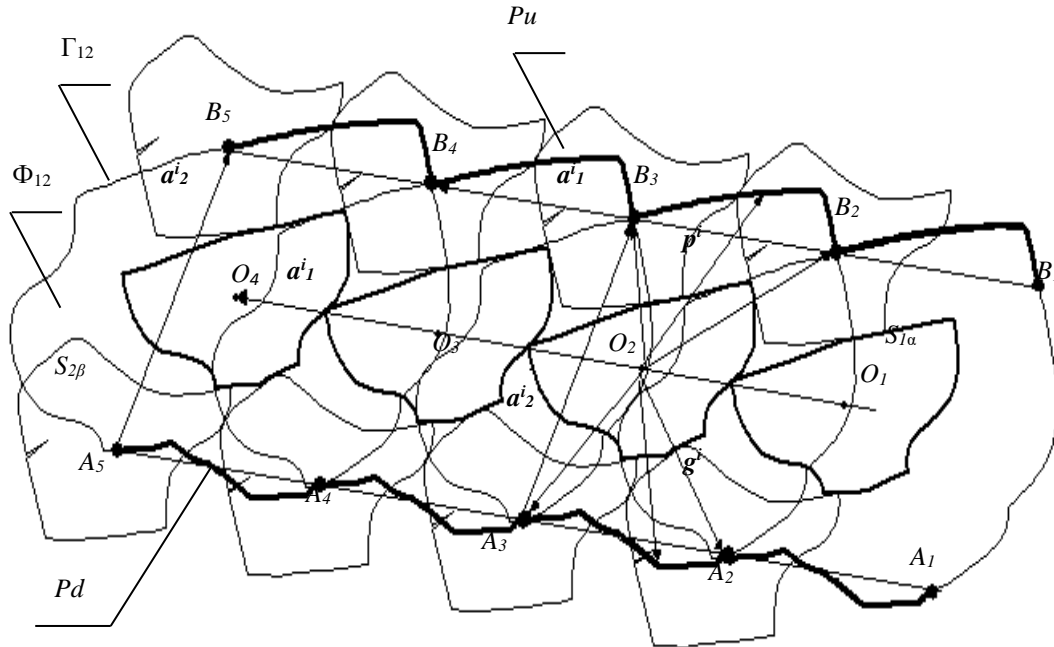


Рис. 2. Области значень векторів  $p^i$  та  $g^i$  для задачі "Укладка  $\Gamma$ "

**Аналітичне представлення функції цілі для задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки.** Так як математичною моделлю задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки (укладка В, укладка  $\Gamma$ ) є подвійна решітка, то щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки можна характеризувати за допомогою співвідношення (5). Площі  $|S_1|$  та  $|S_2|$  геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  у цьому співвідношенні постійні, тому щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки буде визначатись детермінантом решітки, значення якого дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є базові вектори решітки  $a_1$  та  $a_2$ . Тоді із виразу (5) очевидно, що щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки буде тим вища, чим менша площа цього паралелограму (4). Тобто цвелевою функцією буде детермінант  $\det W$  подвійної решітки  $W$ .

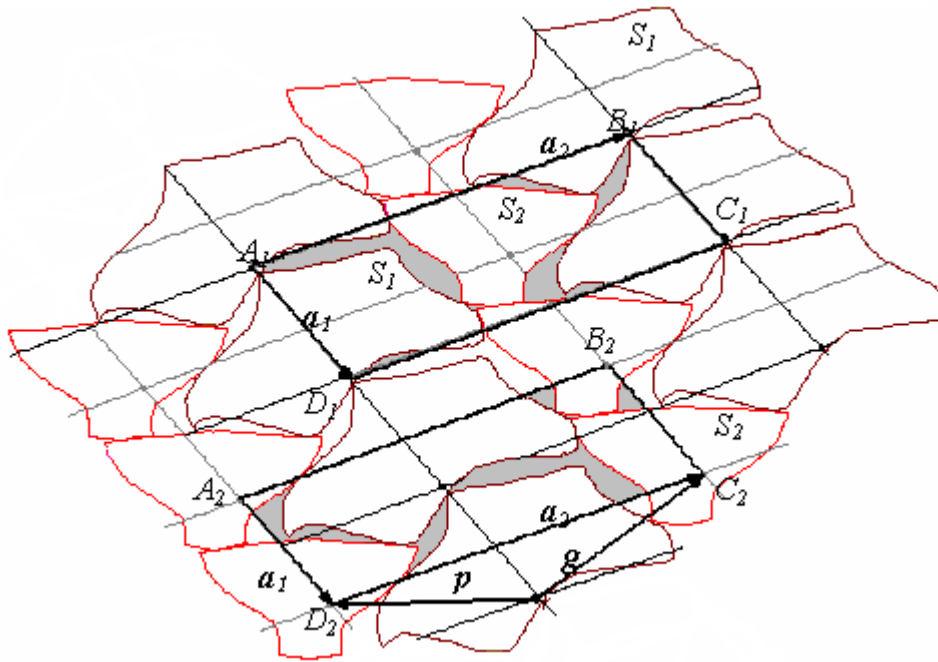
Так як ми отримали аналітичний вигляд ГВФЦР  $\Gamma_{11}$  та  $\Gamma_{12}$ , а вектори  $a_1 = f_1(r_{11}(\theta))$  та  $a_2 = f_2(r_{12}(\theta))$ , то знайдемо аналітичні вирази для векторів решітки  $a_1$  та  $a_2$ . Нехай ГВФЦР  $\Gamma_{11}$  та  $\Gamma_{12}$  мають наступний аналітичний вигляд:

$$\Gamma_{11}: \begin{cases} xg^{11} = (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})t_i - Xg_i^{11} \\ yg^{11} = (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})t_i - Yg_i^{11} \end{cases}, \tag{9}$$

де  $i = 1,2..n_g^{11}$  та  $t_i \in [0,1]$ ,

$$\Gamma_{12}: \begin{cases} xg^{12} = (Xg_{i+1}^{12} - Xg_i^{12})\tau_i - Xg_i^{12} \\ yg^{12} = (Yg_{i+1}^{12} - Yg_i^{12})\tau_i - Yg_i^{12} \end{cases}, \tag{10}$$

де  $i = 1,2..n_g^{12}$  та  $\tau_i \in [0,1]$ .



**Рис. 3. Щільна укладка для двох видів деталей**

Тоді вектори  $a_1, p, g$  можна представити наступним чином:

$$a_1: \begin{cases} x_{a_1} = (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})t_i - Xg_i^{11} \\ y_{a_1} = (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})t_i - Yg_i^{11} \end{cases}, \quad (11)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n_g^{11}$  та  $t_i \in [0, 1]$ ,

$$p: \begin{cases} x_p = (Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12})\tau_j - Xg_j^{12} \\ y_p = (Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12})\tau_j - Yg_j^{12} \end{cases}, \quad (12)$$

де  $j = 1, 2, \dots, n_g^{12}$  та  $\tau_j \in [0, 1]$ ,

$$g: \begin{cases} x_g = (Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12})\tau_k - Xg_k^{12} \\ y_g = (Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12})\tau_k - Yg_k^{12} \end{cases}, \quad (13)$$

де  $k = 1, 2, \dots, n_g^{12}$  та  $\tau_k \in [0, 1]$ .

Звідси функція цілі матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \det W = |[a_1 \times a_2]| &= \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ a_{2x} & a_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ x_p - x_g & y_p - y_g \end{vmatrix} = \\ &= |a_{1x}(y_p - y_g) - (x_p - x_g)a_{1y}| = |a_{1x}y_p - a_{1x}y_g - x_p a_{1y} + x_g a_{1y}| = \\ &= F(t_i, \tau_j, \tau_k, i, j, k) = \\ &= |A_{ij}t_i\tau_j + B_{ik}t_i\tau_k + (C_{ij} + D_{ik})t_i + E_{ij}\tau_j + F_{ik}\tau_k + L_{ijk}|, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})(Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12}) - (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})(Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12}), \\
B_{ik} &= (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})(Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12}) - (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})(Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12}), \\
C_{ij} &= Xg_j^{12}(Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11}) - Yg_j^{12}(Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11}), \\
D_{ik} &= Yg_k^{12}(Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11}) - Xg_k^{12}(Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11}), \\
E_{ij} &= Yg_i^{11}(Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12}) - Xg_i^{11}(Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12}), \\
F_{ij} &= Xg_i^{11}(Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12}) - Yg_i^{11}(Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12}), \\
L_{ijk} &= Xg_i^{11}Yg_j^{12} + Yg_i^{11}Xg_k^{12} - Xg_i^{11}Yg_k^{12} - Yg_i^{11}Xg_j^{12}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Як видно з рівнянь (14–15) функція цілі  $\det W$  є лінійна функція від трьох змінних  $t_i \in [0,1]$ ,  $\tau_j \in [0,1]$ ,  $\tau_k \in [0,1]$  та трьох дискретних параметрів  $i, j, k$  ( $i = 1, 2, \dots, n_g^{11}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_g^{12}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_g^{12}$ ) та має вигляд:

$$\det W = F(t_i, \tau_j, \tau_k, i, j, k) = |A_{ij}t_i\tau_j + B_{ik}t_i\tau_k + (C_{ij} + D_{ik})t_i + E_{ij}\tau_j + F_{ik}\tau_k + L_{ijk}|. \tag{16}$$

Тоді локальний екстремум цієї функції може бути тільки на граничних значеннях

$$\text{змінних, тобто для } t_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \tau_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \tau_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \tag{17}$$

Для побудова схеми розкрою в прямокутній області заданих розмірів за параметрами спроектованої щільної укладки використаємо алгоритми, що запропоновані в роботі.[13].

Для автоматичного перенесення спроектованої схеми розкрою для прямокутної області заданих розмірів на матеріал зі складною конфігурацією зовнішнього контуру були вирішена наступна задача – визначення взаємного розміщення будь-якого плоского геометричного об'єкту із схеми розрою для прямокутної області заданих розмірів та матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру, а саме: плоский геометричний об'єкт знаходиться повністю на матеріалі зі складною конфігурацією зовнішнього контуру; плоский геометричний об'єкт знаходиться зовні матеріалі зі складною конфігурацією зовнішнього контуру; плоский геометричний об'єкт перетинає матеріалі зі складною конфігурацією зовнішнього контуру. Для вирішення цієї задачі використаємо алгоритми, що запропоновані в роботі [14].

Для інтерактивного коригування схеми розкрою, що спроектована в атоматичному режимі, для матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру необхідно:

- аналітичне представлення умов взаємного не перетину плоского геометричних об'єкту із границею зовнішнього контуру матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру;
- ідентифікація будь-якого плоского геометричного об'єкту у схемі розкрою для вилучення його із схеми розкрою.
- контроль не перетину активного плоского геометричного об'єкту із уже розміщеними плоскими геометричними об'єктами.

Для вирішення цих задач, скористаємося алгоритмами, що запропоновані в роботі [14].

На основі структурних компонент поставленої задачі був запропонований алгоритм автоматизованого проектування раціональних схем розкрою матеріалів зі



складною конфігурацією зовнішнього контуру на плоскі геометричні об'єкти, що включає наступні пункти:

- апроксимація зовнішніх контурів матеріалу та плоских геометричних об'єктів, на які необхідно розкroїти цей матеріал (рис. 4.а);
- визначення габаритних розмірів  $DlSh$  та  $HSh$  матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру (рис. 4.а);
- автоматичне проектування раціональної схеми розкroю для матеріалу прямокутної форми з габаритними розмірами  $Dl$  та  $H$ , де  $Dl > DlSh$  та  $H > HSh$  (рис. 4.б);
- автоматичне перенесення зовнішнього контуру матеріалу на спроектовану схему розкroю (рис. 4.б);
- автоматичне вилучення із спроектованої схеми розкroю всіх деталей, які знаходяться зовні або перетинають зовнішній контур натурального матеріалу (рис. 4.в);
- інтерактивне коригування отриманої схеми розкroю для матеріалу зі складною конфігурацією зовнішнього контуру (рис. 4.г).

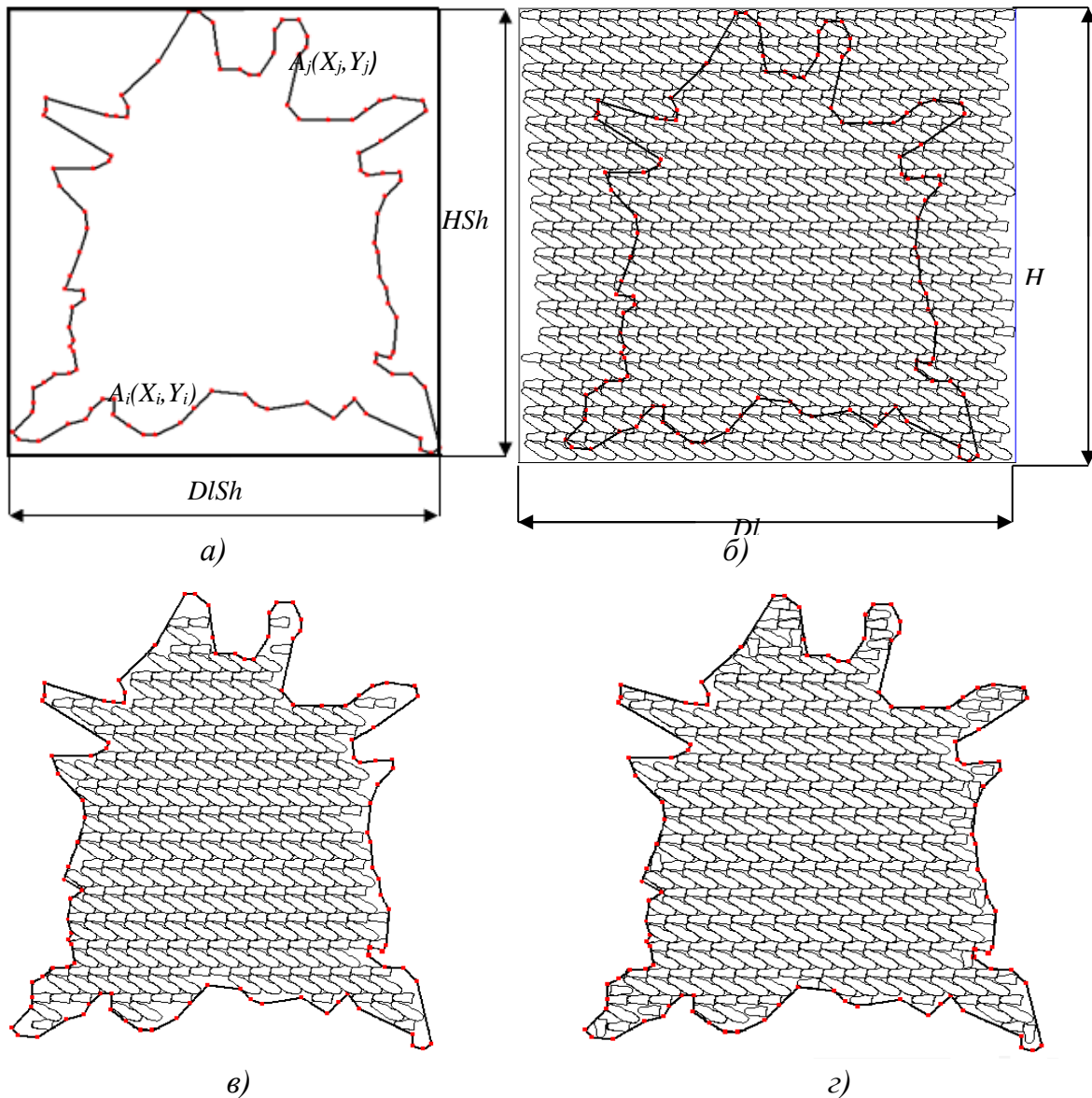


Рис. 4. Етапи автоматизованого проектування раціональних схем розкroю матеріалів зі складною конфігурацією зовнішніх контурів на плоскі геометричні об'єкти

**Висновки.** Запропоновані математична модель та алгоритми були реалізовані в програмне забезпечення автоматизованого проектування раціональних схем розкрою натуральних матеріалів на плоскі геометричні об'єкти зі складною конфігурацією зовнішнього контуру. Це програмне забезпечення підвищує показники економії матеріалу і продуктивність праці.

#### Список використаної літератури

1. Guo, P.N., Takahashi, T., Cheng, C.K., Yoshimura, T. (2001). Floor-planning using a tree representation. IEEE Trans. on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 281 p.
2. Sakanushi, K., Kajitani, Y., Mehta, D.P. (2003). The quarter-state-sequence floorplan representation. IEEE Trans. on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 376 p.
3. Бухвалова В. В. Задача прямоугольного раскроя: метод зон и другие алгоритмы / В. В. Бухвалова. – СПб.: СПбГУ, 2001. – 96 с.
4. Колиско О. З. Модифікація генетичного алгоритму для генерації секцій розкрійних схем / О. З. Колиско // Вісник КНУТД. – 2009. – № 1. – С. 14–17.
5. Deb, K. (2000). An efficient constraint handling method for genetic algorithms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 186, № 2–4, P. 311–338.
6. Верхотуров М. А. Задача нерегулярного раскроя плоских геометрических бъектов: моделирование и расчет рационального раскроя / М. А. Верхотуров // Информационные технологии. – 2000. – № 5. – С. 37–42.
7. Скобцов Ю. А. К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки / Ю. А. Скобцов, В. Н. Балабанов // Вестник Хмельницкого национального университета. – 2008. – Т. 1, № 4. – С. 205–217.
7. Sherwani, N.A. (2013). Algorithms for VLSI Physical Design Automation. Third Edition. Kluwer Academic Publisher, USA. 338 p.
8. Валеева А. Ф. Применение конструктивной метаэвристики "муравьиная колония" к задаче гильотинного прямоугольного раскроя / А. Ф. Валеева, А. А. Петунии, Р. И. Файзрахманов // Вестник Башкирского университета. Раздел: Математика. – Уфа, 2007. – Том 12, No. 3. – С. 12–14.
9. Zhang, D.F., Chen, C.D., Lin, Y.I. (2007). An improved heuristic recursive strategy based on genetic algorithm for the strip rectangular packing problem. Acta Automatica Sinica, No. 33 (9), P. 911–916.
10. Воднев В. Т. Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск: Высшэйшая школа, 1988. – 270 с.
11. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов. / Ю. Г. Стоян. – Киев: Наукова думка, 1975. – 175 с.
12. Стоян Ю. Г. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов / Ю. Г. Стоян, Н. И. Гиль. – Киев: Наукова думка, 1976. – 242 с.
13. Чупринка В. І. Автоматична побудова решітчастих схем розкрою для двох видів плоских геометричних об'єктів / В. І. Чупринка, О. В. Чебанюк, А. В. Пінчук // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Даля. – 2008. – № 8. – С. 230–235.
14. Чупринка В. І. Інтерактивна побудова та коригування схем розкрою натуральних матеріалів на деталі взуття / В. І. Чупринка, М. М. Шкоденко, В. П. Коновал // Вісник КНУТД. – 2010. – № 1. – С. 62–67.