

УДК 519.86+330.565.012.23

Л. І. ДМИТРИШИН

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

**СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ РОЗПОДІЛУ ДОХОДІВ В
СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ**

Проаналізовано стохастичні моделі розподілу доходів в соціально-економічних системах, які не тільки дозволяють визначати універсальну функцію розподілу багатства для різних країн по наявній базі даних, використовуючи різні модифікації степеневих хвостів розподілу для верхньої частини та експоненціальний закон для дослідження решти розподілу, але й пояснюють макрофеномен розподілу багатства через поведінку взаємодіючих агентів, з яких складається економіка на мікрорівні.

Ключові слова: стохастичне моделювання, розподіл багатства і доходів, агент-орієнтований підхід, GLV-модель, степеневий розподіл, експоненціальний розподіл, складні мережі.

За останні десятиліття в Україні відбулися глибокі трансформаційні зміни всієї соціально-економічної системи розподільчих відносин і формування доходів населення. Одна з основних тенденцій у зміні доходів населення за роки незалежності – зростання їх диференціації і поляризація. Статистичними показниками розподілу населення за доходами є децильний коефіцієнт, квинтиль, індекс Джині, фондовий коефіцієнт диференціації (коефіцієнт фондів) та їх графічна інтерпретація – крива Лоренца. Однак такі показники приховують фактичну величину багатства в руках фінансової олігархії, тому більш точним, а відповідно актуальним і своєчасним, вважається економіко-математичне моделювання розподілу доходів населення.

Об'єкти та методи дослідження

Протягом останнього часу в науковій літературі моделюванню розподілу доходів в соціально-економічних системах приділяється достатньо уваги. Вирішенню цієї проблеми присвячено, зокрема, наукові розробки зарубіжних [1–10,12] та вітчизняних авторів [11], що пов'язані з новим напрямком сучасної теоретичної економіки – еконофізикою. В той же час спостерігається недостатня розробленість даної тематики в Україні, що й стало причиною даного дослідження.

Постановка завдання

Метою статті є аналіз стохастичних моделей розподілу доходів в соціально-економічних системах, розроблених на основі агент-орієнтованого підходу.

Результати та їх обговорення

Одним з важливих аспектів сучасного моделювання соціально-економічних систем є застосування моделей агент-орієнтованого підходу, при якому системи моделюються як сукупність автономних взаємодіючих агентів. Це відкриває новий шлях для аналізу функцій розподілу багатства і доходів, який проявляється у взаємодії між великою кількістю агентів. Тобто у відповідності до цілісного підходу робиться спроба описати нерівномірність у розподілі моделями, що імітують динаміку фізичних осіб за рівнем багатства і доходу на мікрорівні і досліджують розподіл багатства і доходів на макрорівні. Ці моделі цікаві тим, що вони використовують раніше недосліджені мікропроцеси для пояснення макрофеномену розподілу багатства і доходів.

Варто зауважити, що за відсутності даних про багатство дані теоретичні моделі розподілу багатства, як правило, підтверджені за допомогою даних про доходи, оскільки багато емпіричних досліджень показали, що розподіл доходів і багатства мають схожу форму. Причому гіпотеза про

схожість функції розподілу доходів і багатства ґрунтується на законах, запозичених із статистичної механіки. Таким чином, у багатьох випадках, моделі розподілу багатства застосовуються також до аналізу розподілу доходів, однак доходів фізичних осіб, описаних за допомогою стохастичного процесу.

Виділяють два основних типи таких моделей в дослідженні розподілу багатства і доходів. Перший тип моделей базується на гіпотезі, що доходи є статичними і багатство не збільшується. Такі моделі описані розподілом Больцмана-Гіббса або ж гамма-розподілом. Другим є клас моделей зі стохастичним зростанням багатства, де загальне багатство в системі може змінюватися з часом. Такі моделі описують розподіл багатства як керований потік багатства на основі стохастичного агент-орієнтованого рівняння, яке, як правило, називають GLV-моделлю або узагальненою моделлю Лотки-Вольтерра. Наприклад, GLV-моделі в роботі [1] базуються на розподілі багатства загального числа N агентів в суспільстві. Часова еволюція грошової суми, призначеної агенту i , задається рівнянням управління

$$m_{i,t+1} = (1 + \xi_t) m_{i,t} + \frac{a}{N} \sum_j m_{j,t} - c \left(\sum_j m_{j,t} \right) m_{i,t} \quad (1)$$

і поєднує в собі мультиплікативний випадковий процес Жибра з автокаталітичним процесом $(1 + \xi_t) m_{i,t}$. Другий доданок у правій частині рівняння (1) являє собою частину від загальної суми грошей, що перерозподіляється в кожен момент часу для забезпечення грошима кожного агента в результаті випадкового процесу. Останній доданок має ефект обмеження зростання загальної суми грошей в системі.

Деяко інша версія GLV-моделі запропонована Бушо і Мезаром [2]. Постулати часової еволюції багатства w_i агента i описуються стохастичним диференціальним рівнянням обміну між окремими особами і випадковими спекулятивними операціями:

$$\frac{dw_i}{dt} = \eta_i(t) w_i + \sum_{j(\neq i)} J_{ij} w_j - \sum_{j(\neq i)} J_{ji} w_i. \quad (2)$$

Компонента $\eta_i(t) w_i$ є гауссівським мультиплікативним процесом, який імітує динаміку інвестицій, а решта доданки описують торгівельну мережу взаємодії між агентом i та всіма іншими агентами в суспільстві. J_{ij} є обмінним курсом між агентом i та агентом j . З наближенням до середнього діапазону даних, обидві ці GLV-моделі наближаються до однієї і тієї ж стаціонарної функції розподілу для відносного багатства $\bar{w}_{it} = w_{it} / \langle w_{it} \rangle$, яку було отримано Бушо і Мезаром [2], а також Річмондом [1]. Варто відмітити, що в роботі Степанової Є.А. [3] представлені результати розв'язку задачі про знаходження відносного розподілу багатства між агентами в деякий момент часу на основі рівняння Бушо-Мезара і початкового розподілу багатства, що підпорядковується рівномірному закону розподілу випадкової величини для трьох способів організації торгівельної мережі: «модель з необмеженою торгівлею», «модель з обмеженою торгівлею: спонтанні взаємодії», «модель з обмеженою торгівлею: постійна торгівельна мережа».

Схожі результати до робіт Бушо і Мезара [2], Річмонда [1] отримано в моделі з парною взаємодією між агентами [4], в якій обміни між агентами відбуваються у відповідності до правила пропорційності:

$$\begin{pmatrix} m_{i,t+1} \\ m_{j,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta+\varepsilon & \beta \\ \beta & 1-\beta+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{i,t} \\ m_{j,t} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

але, крім того, багатство агентів збільшується на $\varepsilon(m_i + m_j)$ в кожному обміні. Дана умова передбачає відображення деякого процесу створення багатства в економічній взаємодії. У випадку тривалого обміну в [4] визначено таку саму форму стаціонарного розподілу як GLV-функція. Тим не менше, поведінка Парето-розподілу вивчена в даному випадку в попарному процесі обміну, який контролюється обміном β разом з параметром ε , що визначає процес створення багатства. Пізніше цей результат був відтворений в математично більш складній обробці GLV-моделі в роботі Кордье, Паречі і Тоскані [5].

Щоб уникнути економічних парадоксів у зв'язку з апроксимацією середнього діапазону даних, Скафеттою, Пікоцці та Вестом [6] в модель Бушо і Мезара [2] були введені різні правила торгівлі в динаміці, а також гауссівський мультиплікативний процес, який імітує динаміку інвестицій. Реалізація цієї моделі показала, що вона генерує розподіл, який відтворює повний спектр емпіричного розподілу багатства, а також хвіст степеневого закону розподілу багатства для великих w .

Еквівалентність між моделями парного обміну та опосередкованого обміну через ринок була вивчена Басу і Моханти. Вони запропонували авторегресійну модель, яка фіксує зростаючий характер реальних ринків, і показали, що консервативна кінетична модель динаміки багатства розглядається в еконофізиці як модель ринку.

В моделюванні розподілу багатства варто також виокремити стохастичні моделі розподілу доходів, що базуються на використанні складних мереж. Зокрема, в роботі Ді Маттео [7] досліджено еволюцію багатства в системі агентів, які обмінюються багатством через невпорядковану мережу у присутності адитивного стохастичного гауссівського шуму, яка є схожою за формою до GLV-моделі, але базується на агентному обміні. У цій моделі агенти обмінювалися грошима у відповідності до наступної умови

$$m_{i,t+1} = m_{i,t} + \sum_j m_{j,t} T(j \rightarrow i|t) - \sum_j m_{i,t} T(i \rightarrow j|t) + \zeta_t. \quad (4)$$

Проведені розрахунки показали, що розв'язок цього рівняння дає одноагентну функцію розподілу, яка узгоджується з емпіричними даними про доходи для унімодального суспільства. Результати якісно узгоджуються з даними, як в низьких, так і у високих діапазонах доходів.

Локальна модель, де агенти здійснюють біржові обміни тільки з найближчими сусідами, запропонована Баком, Нуреліке і Шубіком. Дана модель базується на припущенні, що кожен агент здійснює обмін тільки з його правим або лівим сусідом, що, на жаль, не є притаманним економіці з її складною гетерогенною мережею агентів та складними зв'язками між цими агентами.

Наприклад, модель парних грошових обмінів може бути описана в певному сенсі рівнянням Фоккера-Планка, як це показано в роботах [4, 5, 8]. На основі припущення, що еволюція індивідуального доходу є марківським процесом, описаним матрицею переходів від одного доходу до іншого, в [4, 5, 8] отримано загальне рівняння Фоккера-Планка для еволюції щільності розподілу доходів $P(r,t)$ і загальний розв'язок $P(r)$ цього рівняння. Причому $P(r)$ описано експоненціальним та степеневим розподілами з відповідними припущеннями щодо коефіцієнтів, які розділені на два процеси: один

адитивний процес для нижньої частини розподілу доходів, інший мультиплікативний процес – для верхнього хвоста розподілу [9].

Для перевірки зробленого припущення емпірично, необхідно мати дані про ліквідні доходи, тобто динаміку зміни річних доходів домогосподарств. Розподіл $P(\Delta r|r)$ зміни доходів Δr умовно на дохід r в розвинутих країнах можна отримати на основі аналізу податкових декларацій домогосподарств. Зокрема, мультиплікативна гіпотеза для заможного класу кількісно перевірена в роботах [10] для Японії, де публікуються дані найбільших платників податків.

Для України ефективнішим є метод реконструкції економічної структури суспільства за непрямыми даними та експертними оцінками. Так, в роботі Б.В. Гнатіва [11], використовуючи метод нерівноважного статистичного оператора Зубарєва, отримано узагальнене рівняння Фоккера-Планка для функції розподілу ліквідних доходів з означенням узагальненої швидкості та ядер переносу, які описують динамічні кореляції між ліквідними доходами різних категорій домогосподарств. В [11] емпіричні дослідження проведено на основі базової моделі ринкової економіки закритого типу, що, на нашу думку, звужує потенційні можливості використання даного модельного апарату на практиці.

Економічно обґрунтована модель, що базується на вище наведеному припущенні, запропонована також в роботі [12], де ліквідні доходи та їх нагромадження описані адитивним і мультиплікативним процесами відповідно. У цій двофакторній моделі розподіл доходів має експоненціальний характер для нижньої частини і степеневий хвіст для верхньої частини.

Таким чином, наведені вище стохастичні моделі розподілу доходів включають адитивні і мультиплікативні характеристики ліквідних доходів. Такий стохастичний підхід вважається ефективним і тому широко застосовується для моделювання вздовж усієї кривої розподілу доходів, починаючи з моделі Жибра.

В науковій літературі розглядалися й інші альтернативні підходи до розподілу доходів. Одним з таких є підхід, що базується на формуванні соціальної ієрархії [13]. Згідно нього, групи людей мають лідерів, які, в свою чергу, мають лідерів вищого підпорядкування і т.д. Число людей зменшується експоненціально зі збільшенням рівня ієрархії рівні.

Якщо доходи фізичних осіб збільшуються на певний коефіцієнт (наприклад, мультиплікативно) при переході на наступний рівень ієрархії, то розподіл доходів відповідає степеневому закону [13]. Тобто аргумент Лідалла може бути легко модифіковано для отримання експоненціального розподілу: якщо індивідуальний дохід збільшується на певну величину, тобто дохід лінійно зростає зі зростанням рівня ієрархії, то розподіл доходів є експоненціальним.

Аналогічну модель, але на основі випробувань Бернуллі, було запропоновано Феллером. У відповідності до даної моделі фізичні особи мають постійну ймовірність збільшення своїх доходів від фіксованої суми. Іншими словами, дані детерміновані ієрархічні моделі і стохастичні моделі адитивних і мультиплікативних ліквідних доходів являють собою по суті ті ж самі ідеї.

Висновки

На основі проведеного аналізу стохастичних моделей розподілу доходів в соціально-економічних системах встановлено, що моделі даного типу можна поділити на такі групи:

– GLV-моделі, які описують розподіл багатства як керований потік багатства на основі стохастичного агент-орієнтованого рівняння Лотки-Вольтерра;

– стохастичні моделі розподілу доходів, що базуються на використанні складних мереж. Обидва типи моделей дозволяють не тільки визначати універсальну функцію розподілу багатства для різних країн по наявній базі даних, використовуючи різні модифікації степеневих хвостів розподілу для верхньої частини та експоненціальний закон для дослідження решти розподілу, але й пояснюють макрофеномен розподілу багатства через поведінку взаємодіючих агентів, з яких складається економіка на мікрорівні.

Список використаної літератури

1. P. Richmond, S. Hutzler, R. Coelho, and P. Repetowicz, «A review of empirical studies and models of income distributions in society» in Chakrabarti, Chakraborti, and Chatterjee, (2006).
2. J.-P. Bouchaud and M. Mezard, «Wealth condensation in a simple model of economy», *Physica A*, № 282, (2000) P. 536–545.
3. Экономическая физика. Современная физика в поисках экономической теории / под ред. В.В. Харитоновой, А.А. Ежова. – М.: МИФИ, 2007. – С. 508–529.
4. F. Slanina, «Inelastically scattering particles and wealth distribution in an open economy» *Physical Review E*, № 69, (2004) 046102.
5. S. Cordier, L. Pareschi and G. Toscani, «On a kinetic model for a simple market economy», *Journal of Statistical Physics*, № 120, (2005) P. 253–277.
6. N. Scafetta, S. Picozzi and B.J. West, «A trade-investment model for distribution of wealth» *Physica D*, № 193, (2004) P. 338–352.
7. T. Di Matteo, T. Aste and S. T. Hyde, «Exchanges in complex networks: income and wealth distributions», in *The Physics of Complex Systems (New Advances and Perspectives)* edited by F. Mallamace and H. E. Stanley (IOS Press, Amsterdam) (2004) p. 435.
8. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko, «Statistical mechanics of money», *The European Physical Journal B*, № 17 (2000) P. 723–729.
9. V. M. Yakovenko, «Econophysics, statistical mechanics approach to» in *Encyclopedia of Complexity and System Science* edited by R. A. Meyers, (2009) (Springer, Berlin).
10. H. Aoyama, W. Souma and Y. Fujiwara, «Growth and fluctuations of personal and company's income», *Physica A*, № 324, pp. 352–358 (2003).
11. Гнатів Б.В. Математичне моделювання економічних процесів методами нерівноважної статистичної механіки / Б.В. Гнатів, Р.М. Токарчук, П.П. Костробій, М.В. Токарчук // Вісник національного університету «Львівська політехніка». – № 696. – 2011. – С.93–100.
12. W. Souma and M. Nirei, «Empirical study and model of personal income» in Chatterjee, Yarlagadda, and Chakrabarti, (2005) pp. 34–42.
13. H. F. Lydall, «The distribution of employment incomes», *Econometrica*, № 27, (1959) P. 110–115.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2012

Стохастические модели распределения доходов в социально-экономических системах

Дмитришин Л.И.

Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника

Проанализированы стохастические модели распределения доходов в социально-экономических системах, которые не только позволяют определять универсальную функцию распределения богатства для разных стран по имеющейся базе данных, используя различные модификации степенных хвостов распределения для верхней части и экспоненциальный закон для исследования остального

распределения, но и объясняют макрофеномен распределения богатства через поведение взаимодействующих агентов, из которых формируется экономика на микроуровне.

Ключевые слова: стохастическое моделирование, распределение богатства и доходов, агент-ориентированный подход, GLV-модель, степенное распределение, экспоненциальное распределение, сложные сети.

Stochastic models of income distribution in the socio-economic systems

Dmytryshyn L.

Precarpathian National University by V. Stefanyk, Ivano-Frankovsk

Stochastic models of income distribution in the socio-economic systems are analyzed. That allow you to define a universal function of wealth distribution of between countries on the available data basis, using different versions of power-tails distribution for the upper and exponential law for the rest of the research division. Also that explain macrofomenen wealth distribution through the behavior of interacting agents that make up the economy at microlevel.

Keywords: stochastic modeling, wealth and income distribution, agent-based approach, GLV-model, power-law distribution, exponential distribution, complex network.