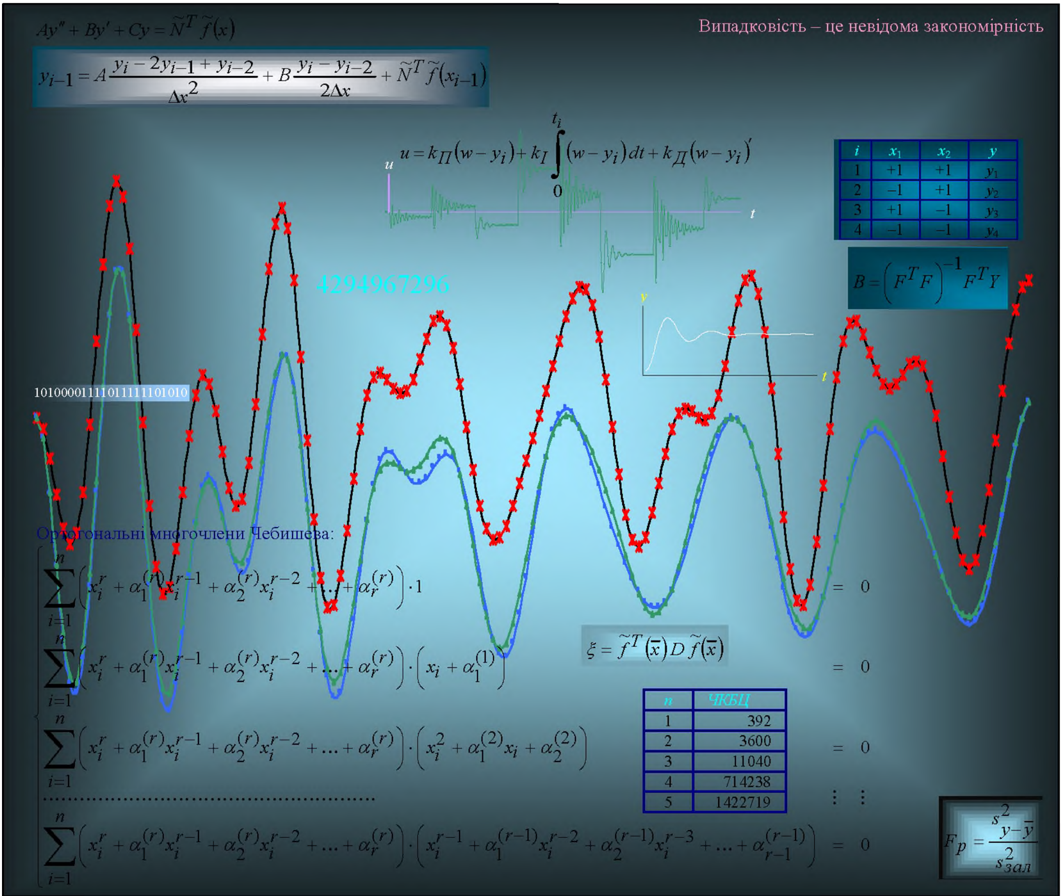
Данилкович А. Г., Злотенко Б. М.

# МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## З ОСНОВАМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

**Данилкович А. Г., Злотенко Б. М.**

# МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## З ОСНОВАМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ

Кафедра біотехнології, шкіри та хутра

Підручник
Затверджено вченою радою
Київського національного університету технологій та дизайну

КИЇВ • 2017

УДК [001.891+347.77]:378(075.8)
Д18

*Затверджено до видання вченою радою КНУТД,*
*протокол № 10 від 27.05.2017 року*

Рецензенти: *Кузьмінський Є. В.* – доктор хімічних наук, професор, зав. кафедри екобіотехнології та біоенергетики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» імені І. Сікорського;
*Пансюк І. В.* – доктор технічних наук, професор, академік Академії інженерних наук України та Української технологічної академії, зав. кафедри техногенної безпеки та тепломасообмінних процесів Київського національного університету технологій та дизайну;
*Шут М. І.* – доктор фізико-метематичних наук, професор, академік НАПН України, зав. кафедри загальної та прикладної фізики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

**Данилкович А. Г.**
**Д18** Методологія наукових досліджень з основами інтелектуальної власності : підручник / Данилкович А. Г., Злотенко Б. М. – Київ : КНУТД, 2017. – 434 с.
ISBN 978-966-136-421-8

Підручник відповідає програмі дисципліни «Методологія наукових досліджень з основами інтелектуальної власності». Навчальний матеріал присвячений основним принципам пошуку наукової інформації, формулюванню теми і завдань експериментального дослідження, статистичній обробці експериментальних даних та отримання статичних і динамічних експериментально-статистичних моделей з використанням комп'ютерних технологій. У підручнику наведені рекомендації щодо виконання дипломних магістерських робіт, підготовки доповіді, статті, звіту за результатами наукових досліджень.

Рекомендовано магістрантам, аспірантам, докторантам та науковим працівникам.

Іл. 48. Табл. 83. Додатків 13. Бібліогр. 39.
Друкується за редакцією авторів.

УДК [001.891+347.77]:378(075.8)

© Данилкович А. Г., Злотенко Б. М., 2017
© КНУТД

ISBN 978-966-136-421-8

# ЗМІСТ

# ПЕРЕДМОВА

Сучасне промислове виробництво відзначається використанням високих технологій, які основані на розвитку комп'ютерної техніки, мають високий рівень автоматизації, відрізняються підвищеними вимогами до якості матеріалів і комплектуючих, їх технологічністю і економічністю та ефективним керуванням технологічними процесами. Такі об'єктивні суспільні потреби XXI сторіччя нагально вимагають суттєвого та якісного вирішення ряду проблем в підготовці висококваліфікованих фахівців як для проведення фундаментальних досліджень, так і для ефективної роботи в промисловій сфері.

У цьому відношенні особливо важлива роль належить вищій школі в організації підготовки спеціалістів різного ступеневого рівня, які могли б творчо орієнтуватись у сучасному інформаційному просторі й адекватно використовувати свої знання під час майбутньої трудової діяльності. Важливою умовою самореалізації спеціаліста, безумовно, є систематичне підвищення кваліфікації через відповідні підрозділи вищих навчальних закладів (ВНЗ), а також шляхом оволодіння сучасними засобами організації виробництва.

Підготовка фахівців вищої кваліфікації передбачає багатоступеневу форму з використанням наукової методології протягом всього періоду навчання майбутнього спеціаліста у вищій школі. При цьому вже починаючи з першого курсу можна вважати доцільним залучення студентів до наукової інформації, що полягає в ознайомленні з певним обсягом спочатку загальноосвітньої та суспільно-політичної літератури за завданням викладача з наступним обговоренням підготовленого матеріалу на семінарському занятті. В подальшому, після набуття навичок роботи з літературою, студенти можуть готувати реферати на задану тему і доповідати на конференціях.

Необхідною умовою ефективної підготовки висококваліфікованих наукових спеціалістів в різних галузях техніки, промислового виробництва та науки є поєднання навчальної і науково-дослідної роботи (НДР). При цьому майбутній фахівець засвоює теоретичні основи своєї спеціальності з відповідним обсягом практичних робіт та математичною обробкою результатів експериментальної роботи, що сприятиме поглибленню знань при виконанні магістрами і аспірантами науково-дослідних робіт та дисертацій.

Підручник створений на основі навчального посібника «Основи наукових досліджень у вищому навчальному закладі» та курсу лекцій «Методологія наукових досліджень з основами інтелектуальної власності» прочитаних авторами протягом останніх років у Київському національному університеті технологій та дизайну за навчально-професійною програмою, затвердженою вченою радою університету.

Автором розділів 1–3 і 6 є професор Данилкович А. Г., доктор технічних наук, професор кафедри біотехнології, шкіри та хутра, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, а розділів 4 і 5 – професор Злотенко Б. М., доктор технічних наук, завідувач кафедри електромеханічних систем.

Автори виражають вдячність інженеру Василюку О. В. за розробку спеціальних програм «Апроксимація за способом Чебишева», «Апроксимація експериментальних даних будь-яким видом функції за МНК», «Оптимізація об’єкту за допомогою функції бажаності».

Автори з вдячністю сприймуть критичні зауваження і побажання щодо викладеного тексту підручника.

# ВСТУП

В підручнику викладена стратегія самостійного пошуку науково-технічної інформації з відповідної теми дослідницької роботи, а також в мережі Інтернеті та її аналізу для ефективного використання у магістерській науково-дослідній роботі під час дипломного проектування та в майбутній діяльності для вирішення творчих задач.

Для об’єктивного визначення результатів експерименту і мінімізації похибки експериментальних даних в посібнику викладені основи математичної статистики з відповідними прикладами. Для одержання експериментально-статистичних математичних моделей технологічних процесів лінійних та нелінійних за параметрами використано метод найменших квадратів у матричній формі.

Особлива увага приділена одержанню статичних нелінійних моделей: поліномів, дробово-раціональних, степеневих тощо. Запропонований метод отримання динамічних моделей, які дозволяють враховувати співвідношення між швидкостями зміни різних порядків вихідної змінної щодо вхідної, а також отримувати нелінійні статичні моделі.

У підручнику використано досить простий і доступний математичний пакет програм MS Excel (розробник – Microsoft, Inc.), а також Mathcad (MathSoft, Inc.). Показано, як можна інтегрувати пакети програм Excel і Mathcad, забезпечуючи обмін даних між ними.

Основний матеріал доповнений конкретними прикладами і практичними завданнями для самостійної роботи студентів з використанням математичного пакету MS Excel, а також спеціальних програм, що створені з використанням мови програмування Visual Basic. Для обробки експериментальних даних розроблені три комп’ютерні програми з апроксимації експериментальних даних методами Чебишева, найменших квадратів для будь-якої математичної моделі (лінійної і нелінійної за параметрами для опису статики і динаміки процесу) та оптимізації за функцією бажаності з використанням методів сканування і Ньютона в MS Excel. Робота з програмами не потребує спеціальної підготовки.

Окремий розділ присвячено висвітленню основних понять інтелектуальної власності, умов надання правової охорони об'єктам прав промислової власності, авторського і суміжних прав, механізмам передачі прав іншим особам та здійсненню правового захисту цих об'єктів.

Після освоєння дисципліни «Методологія наукових досліджень з елементами інтелектуальної власності» студент може працювати з науково-технічною літературою за темою дипломної магістерської роботи. Результати виконання НДР висвітлюються у звіті з переддипломної практики, доповідаються на конференціях, зокрема молодих вчених і студентів, подаються на конкурс, стають основою для публікації в науково-технічних періодичних виданнях та використовуються для планування подальшого експериментального дослідження. Студенти за кращі роботи нагороджуються грамотами, дипломами і грошовими преміями.

Отже, сучасний спеціаліст крім глибоких професійних знань, має засвоїти методологію основ НДР, етапи наукових досліджень, набути вміння збирати та логічно аналізувати науково-технічну, в тому числі й патентну літературу, розробляти програми експериментальних досліджень, виконувати їх, опрацьовувати одержані результати, оформляти їх та робити висновки для постановки подальших наукових досліджень.

Матеріал підручника призначений для студентів очної та заочної форм навчання як для вивчення дисципліни «Методологія наукових досліджень з основами інтелектуальної власності», так і для підготовки до практичних і лабораторних занять з елементами наукових досліджень. Крім того, навчальний посібник може бути використаний для роботи у науково-дослідному гуртку, під час курсового та дипломного проектування майбутніми магістрами, буде корисний також аспірантам і молодим науковцям.

# 1 ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Прискорення науково-технічного прогресу зумовлює підвищені вимоги до якості підготовки фахівців для промисловості, підприємницької діяльності та наукових кадрів. Сучасне виробництво вимагає від фахівців підприємств високої кваліфікації в області не тільки знання технології виробництва, але й глибоких знань асортименту існуючих хімічних матеріалів, що пропонуються відповідними підприємствами, а також навичок і певного досвіду ефективного їх використання в нових технологіях, які постійно оновлюються. На основі кваліфікаційних професійних характеристик та вимог до фахівців з вищою освітою, магістри з відповідної спеціальності мають володіти теоретичними знаннями і практичним вмінням постановки і виконання науково-дослідницької роботи.

## 1.1 Організація наукових досліджень і підготовка наукових кадрів

Законодавчу основу для організації науки створює Верховна Рада України. Виконавчим органом, котрий розробляє і здійснює заходи по проведенню єдиної політики в галузі науки – є Кабінет Міністрів України, якому підпорядковані установи та організації, що здійснюють безпосереднє керівництво науковою діяльністю в державі: Міністерство освіти і науки (МОН) України, Національна Академія наук (НАН) України, галузеві академії наук, галузеві і міжгалузеві міністерства, комітети та відомства.

Організація науки в державі включає чотири основних сектори:

*академічний* – спрямований на забезпечення фундаментальних досліджень, які приводять до одержання нових знань, ідей та теорій;

*вузівський* – спрямований на забезпечення фундаментальних і прикладних досліджень, які дають нові знання та розробки, придатні до практичного застосування;

*галузевий* – спрямований на проведення прикладних досліджень та здійснення розробок і нововведень;

*виробничий* – пов'язаний із запровадженням науково-технічних розробок, удосконаленням техніки і технологій, завдяки чому здійснюються винаходи, створюється нова техніка та нова продукція. Безпосередню наукову діяльність в Україні здійснюють:

– науково-дослідні та проектні установи і центри НАН України;

– науково-дослідні установи системи галузевих академій наук;

– науково-дослідні підрозділи і кафедри вищих навчальних закладів (інститутів, академій, університетів);

– науково-дослідні, проектні, конструкторські, технологічні та інші установи міністерств і відомств;

– науково-дослідні, проектні установи і центри при промислових підприємствах та об'єднаннях;

– науково-дослідні, конструкторські, технологічні та інші установи і центри, створені на комерційній основі.

Вищим державним науковим центром є Національна академія наук (НАН) України, яка очолює і координує разом з Державним комітетом у справах науки та технологій України фундаментальні й прикладні дослідження в різних галузях науки. НАН України почала свою діяльність 27 листопада 1918 р. За роки існування НАН України президентами були Вернадський Володимир Іванович (1919–1921), Липський Володимир Іполітович (1922–1928), Заболотний Данило Кирилович (1928–1929), Богомолець Олександр Олександрович (1931–1946), Палладін Олександр Володимирович (1946–1962), а з 1962 р. – Борис Євгенович Патон.

Для зміцнення зв’язків науки з виробництвом створено наукові центри, які об’єднують наукові установи академії наук за регіональним принципом. Такими центрами є: Донецький (м. Донецьк), Західний (м. Львів), Кримський (м. Сімферополь), Північно-Східний (м. Харків), Придніпровський (м. Дніпропетровськ), Південний (м. Одеса) і м. Київ. Кожному регіональному науковому центру підпорядковані науково-дослідні інститути. Так, у м. Києві знаходяться наступні інститути НАН України: Інститут електрозварювання імені Є. О. Патона, Інститут колоїдної хімії і хімії води імені А. В. Думанського, Інститут надтвердих матеріалів імені В. М. Бакуля, Інститут Проблем матеріалознавства імені І. М. Францевича, Інститут фізичної хімії імені Л. В. Писаржевського та багато інших. НАН України очолює і координує разом з МОН України фундаментальні дослідження у різних галузях науки. НАН України є державною науковою установою, яка об’єднує всі напрями національної науки та підтримує міжнародні зв’язки з науковими центрами інших країн.

В Україні функціонують всеукраїнські громадські академії, які об'єднують учених на громадських засадах за профілем їх наукової діяльності, що працюють в наукових установах різного профілю і підпорядкування. До них належать Українська міжнародна академія оригінальних ідей, Українська технологічна академія, Академія інженерних наук України та ін. Українська міжнародна академія оригінальних ідей як громадська наукова організація об’єднує вчених, винахідників і раціоналізаторів України та зарубіжних країн, що своїми науковими ідеями, винаходами зробили вагомий внесок у розвиток науки і техніки.

Відомчі галузеві академії – галузеві НДІ, підпорядковані відповідним міністерствам і відомствам. Наприклад, Міністерству економіки та з питань європейської інтеграції підвідомчий НДІ економіки, Міністерству фінансів України – НДІ фінансів, Держкомстату України – НДІ статистики. Відповідно до напряму НДІ визначається його структура: створюються відділи, лабораторії, сектори, які здебільшого очолюють провідні вчені у цій галузі знань.

Вищі навчальні заклади (університети, академії, інститути), яких в Україні налічується понад 300, мають спеціальні підрозділи, робота яких спрямована на розв'язання фундаментальних та прикладних проблем у галузі підготовки фахівців за рахунок державних (бюджетних) і госпрозрахункових коштів, а також грантів закордонних наукових установ. Важливими є також дослідження з проблем вищої школи, вдосконалення навчального процесу, підвищення якості підготовки спеціалістів. Наукові дослідження виконує професорсько-викладацький склад із залученням студентів, а також спеціалістів на конкурсній основі. Тематика наукових досліджень формується за профілем ВНЗ, його факультетів та кафедр на договірних засадах з підприємствами, організаціями чи у формі державного замовлення.

НДР студентів організовує випускна кафедра, яка є базовим методичним центром з роботи зі студентами. Для керівництва науковими дослідженнями вона призначає наукового керівника (одного на 4–5 студентів).

Відповідно до Закону України про освіту випускникам коледжу, інституту, університету за результатами захисту дипломного проекту чи складання державного іспиту присуджується кваліфікація першого освітнього рівня – *бакалавра*. Випускникам університету, академії, інституту, інших прирівняних до них ВНЗ після захисту дипломної магістерської роботи Державною екзаменаційною комісією (ДЕК) присуджується кваліфікація другого освітнього рівня – фахівця відповідної спеціальності та спеціалізації.

Наукова діяльність у системі вищої освіти є складовою частиною підготовки спеціалістів і здійснюється науковими колективами, окремими вченими за договорами, контрактами, державними замовленнями, програмами, проектами. З цією метою створюються наукові, наукововиробничі підрозділи, об'єднання, асоціації, технологічні центри нових інформаційних технологій, науково-технічної творчості та інші формування.

Для підготовки науково-педагогічних і наукових кадрів в Україні існують магістратура, аспірантура і докторантура. До магістратури приймають осіб на конкурсній основі, які мають ступінь бакалавра. За результатами захисту випускної роботи магістра ДЕК присуджує кваліфікацію другого освітнього рівня – *магістра* з відповідної спеціальності.

Кваліфікація наукових працівників визначається науковими ступенями та вченими званнями. Науковий ступінь присуджується, а вчене звання присвоюється за встановленим державою порядком. В Україні існує 2 наукових ступеня – доктора філософії (кандидата наук) і доктора наук.

Перший науковий *ступінь «доктора філософії» чи «кандидата наук»* (від латинської candidatus – одягнений у біле) здобувається особою з вищою освітою. Для цього, насамперед, необхідно скласти кандидатський мінімум (екзамени з філософії, іноземної мови та дисципліни за обраною науковою спеціальністю за темою дисертації), написати і захистити у спеціалізованій вченій раді ВНЗ чи НАН України кандидатську дисертацію.

Основною формою планомірної підготовки кандидатів наук в Україні є *аспірантура* (від латинської aspiro – прагну), що діє з 1925 р. Аспірантура створюється у ВНЗ і науково-дослідних інститутах та інших установах, які мають відповідний науковий потенціал. До аспірантури приймаються громадяни України. Громадян інших держав можна зараховувати до аспірантури за договорами, що укладаються з ВНЗ, НДІ чи відповідно до міждержавних і міжурядових угод.

Аспірантура функціонує у вищих навчальних закладах, наукових установах, що мають необхідну наукову і матеріальну базу. Кожному аспіранту вченою радою факультету за поданням випускної кафедри затверджується тема роботи і науковий керівник, як правило, із числа докторів наук або професорів, який протягом терміну навчання, виконання і оформлення дисертаційної роботи аспірантом, аж до публічного (прилюдного) її захисту в спеціалізованій вченій раді ВНЗ чи науковій установі надає йому постійну допомогу в формі консультацій. Термін навчання у аспірантурі з відривом чи без відриву від виробництва не має перевищувати чотирьох років. Науковий ступінь «доктора філософії» присуджується спеціалізованою вченою радою ВНЗ за результатами захисту дисертації й затверджується Вищою атестаційною комісією України (ВАК України), підвідомчою Кабінету Міністрів України.

Вищий науковий *ступінь доктора наук* (від латинської doctor – наставник) здобувають доктора філософії. Уперше ступінь доктора наук почав присвоювати Болонський університет (1130 р.), потім Паризький університет (1231 р.).

Вищим ступенем єдиної системи безперервної освіти є *докторантура*, що створюється у ВНЗ, наукових установах і організаціях. Відкриття і закриття докторантури, контроль за її діяльністю здійснює Кабінет Міністрів України, а в академічних наукових установах – президія НАН України.

У докторантуру приймаються громадяни України, кандидати наук, які мають наукові здобутки в обраній галузі науки. Громадяни інших держав можуть бути зараховані у докторантуру за договорами з ВНЗ, науковими установами, складеними на міждержавній основі або приватними особами.

Термін підготовки в докторантурі не має перевищувати трьох років. Тема докторської дисертації затверджується не пізніше тримісячного терміну після зарахування кандидата до докторантури. За час перебування у докторантурі кандидат на здобуття вченого ступеня «доктор наук» має підготувати і захистити у спеціалізованій вченій раді дисертацію.

*Докторська дисертація* – це робота, у якій сформульовано і обґрунтовано наукові положення, що характеризуються як новий напрям у відповідній галузі науки, або здійснено теоретичне узагальнення та вирішення значної наукової проблеми, яка має велике загальнодержавне економічне і соціально-культурне значення. Науковий ступінь доктора наук присуджується ВАК України за поданням спеціалізованої вченої ради ВНЗ після захисту в ній дисертації.

Вчені звання в Україні:

старший науковий співробітник (н. с.) – для працівників науково-дослідних установ. В університетах, академіях, інститутах передбачені посади молодшого н. с., наукового співробітника, старшого н. с., провідного н. с. і головного н. с.;

доцент (від латинської docens – той, хто навчає), – учене звання для викладачів ВНЗ;

професор (від латинської professor – викладач) – учене звання для викладачів ВНЗ і працівників науково-дослідних установ.

Учені звання присвоюються ВАК України на основі рішень вчених рад ВНЗ, наукових установ та організацій.

Найбільш видатні учені обираються зборами НАН України, галузевими і громадськими академіями член-кореспондентами і дійсними членами – академіками. Науковим працівникам і працівникам вищої школи за великі заслуги у науковій і педагогічній роботі присвоюються в установленому порядку почесні звання «Заслужений діяч науки і техніки України», «Заслужений працівник освіти» та ін.

Таким чином, організація наукових досліджень і підготовка наукових кадрів підпорядковані створенню єдиної системи науки та її кадрового забезпечення у масштабах держави.

## 1.2 Види і форми науково-дослідної роботи студентів і аспірантів

В основу методичного забезпечення науково-дослідної роботи студентів і аспірантів покладено комплексно-цільові програми. Суть їх полягає у створенні комплексної системи наукових досліджень студентів і аспірантів на весь час навчання відповідно до профілю обраної спеціальності й спеціалізації, які включають елементи наукових досліджень до всіх видів навчального процесу, спрямовані на підготовку фахівців, здатних творчо вирішувати виробничі завдання у ринкових умовах.

Виконання елементів наукових досліджень студентів розпочинається на загальноосвітніх кафедрах з реферування відповідної літератури, їх участі в семінарських заняттях і конференціях, що організовуються науковим товариством студентів і аспірантів (НТСА). В межах НТСА, що має відділи: організаційний, науковий і зовнішніх зв’язків, студенти, починаючи з 4 курсу виконують курсові роботи, НДР під час переддипломної практики та дипломні роботи, приймають участь у конкурсах і конференціях як в своєму, так й інших ВНЗ. Аспіранти з першого року навчання продовжують наукові дослідження у цьому товаристві. Кращі роботи студентів і аспірантів відзначаються грошовими преміями і грамотами. Все це сприяє формуванню всебічно розвиненої особистості фахівця, науковця.

Виконання НДР студентами і аспірантами передбачає вивчення основ наукових досліджень, зокрема поняття науки і методики наукових досліджень під час їх виконання, самостійної роботи над літературними джерелами, планування та організації наукового експерименту, обробки отриманих даних.

НДР студентів, як правило, починається з набуття навичок у реферуванні літератури на задану керівником тему, написання курсової роботи тощо. Засвоєні знання з НДР під час навчання на першому освітньому рівні бакалавра, студенти застосовують для дипломного проектування; аспіранти – для постановки і виконання НДР, узагальненні її результатів, апробації достовірності проведеного дослідження тощо.

Студенти використовують елементи наукових досліджень у формі наукового пошуку: готують огляд літератури і розробляють пропозиції, що містять елементи новизни з теми роботи; застосовують найбільш ефективні методики з врахуванням технологічних можливостей кафедри, комп'ютерну та організаційну техніку; інформаційні технології; узагальнюють передовий практичний досвід; оптимізують пропозиції із застосуванням технологічних критеріїв, спрямованих на підвищення ефективності відповідних процесів і якості готової продукції. Елементи наукового пошуку, відображені у дипломних роботах студентів, мають бути розширені у науковій тематиці випускної кафедри.

Аналогічні завдання ставляться перед аспірантами в процесі проведення досліджень за обраною темою дисертації. Відмінність полягає лише у масштабності та цілеспрямованості досліджень аспіранта, що зумовлено обраною ним темою.

Кожний студент під час виробничої практики крім загального завдання, передбаченого програмою практики, виконує відповідне завдання НДР, які видає випускна кафедра. Завдання фіксується у щоденнику і погоджується з підприємством, на якому провадиться практика. Виконання завдання відображається у окремому розділі звіту про проходження практики і може використовуватися в інших видах НДР студентів, зокрема, у інформаціях на семінарах, доповідях на конференціях, під час написання дипломної магістерської роботи тощо.

Поглиблене вивчення питань з тематики НДР передбачає проведення студентського наукового семінару, на якому мають виступити всі студенти з доповідями із заданої науково-дослідної теми та захистом своїх висновків і пропозицій, отриманих у результаті проведеного дослідження. У обговоренні доповідей беруть участь два опоненти із числа учасників семінару. Опоненти попередньо критично ознайомлюються з доповіддю, вивчають літературу за темою доповіді й дають розгорнуту аргументовану оцінку під час обговорення, в якому приймають участь студенти академічної групи. Керує студентським науковим семінаром завідувач кафедрою чи професор кафедри.

Виконання НДР студентами у поза навчальний час полягає в роботі студентів у наукових гуртках і розробках кафедри з бюджетної та господарсько-договірної тематик.

Науковий керівник разом з студентом складає комплексний індивідуальний план НДР в якому обов’язково має бути враховано впровадження результатів наукових досліджень у виробництво незалежно від місця майбутньої роботи. Це має виховне значення для майбутньої практичної діяльності спеціаліста, оскільки кожна НДР має включати конкретні пропозиції, спрямовані на вдосконалення діяльності підприємства.

У НДР студентів має враховуватися участь у конкурсах наукових студентських робіт і отриманні заохочення. Це дає змогу обґрунтувати висновок про можливість зарахування студента до резерву кандидатур вступу до магістратури, аспірантури, а також для рекомендації на роботу, пов'язану з науковими дослідженнями.

Наведена методика роботи наукового семінару студентів і захист на ньому результатів проведеного дослідження подібні з роботою спеціалізованої вченої ради ВНЗ, наукової установи, яка розглядає результати проведених досліджень аспірантом.

Дипломна магістерська робота має містити постановку наукової проблеми, її аналіз на основі літературних джерел і достатню аргументованість. Наукові результати, що отримані у роботі, мають бути повністю обґрунтованими. Магістр максимально включає в текст роботи таблиці, графіки, діаграми, схеми, формули тощо. Вони основуються, в більшості випадків, на результатах попередніх досліджень. У зв’язку з чим якість їх підготовки значною мірою залежить від рівня виконання елементів дослідного пошуку, передбаченого всіма видами НДР магістра за весь період навчання. У науковій роботі практично перевіряється здатність і підготовленість магістра теоретично осмислити актуальність обраної теми, її науково-прикладну цінність, можливість виконання самостійного наукового дослідження і впровадження отриманих результатів у виробничу діяльність базового підприємства.

Дипломна магістерська робота, хоч і є самостійним науковим дослідженням, але на відміну від дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії, вона відноситься до НДР, в основі якої лежить моделювання певною мірою відомих рішень. Виконання такої роботи має не стільки вирішувати наукові проблеми, скільки свідчити про те, що її автор навчився самостійно вести науковий пошук, бачити професійні проблеми і знати загальні методи і прийоми їх вирішення.

Магістерська робота подається з повним відображенням і обґрунтуванням теми, її новизни і практичної значимості, висновків і рекомендацій. Тематика магістерських робіт має бути тісно пов’язана з тематикою НДР кафедри та інтересами відповідного виробництва. Сукупність отриманих результатів має свідчити про наявність у її автора-магістра первинних навичок наукової роботи у відповідній галузі. Подібні вимоги стосуються і аспіранта під час виконання ним дисертаційної роботи.

Під час навчання в аспірантурі у встановлені індивідуальним планом терміни він зобов'язаний:

– скласти кандидатські іспити за фахом, з однієї з іноземних мов та філософії;

– повністю виконати індивідуальний план роботи над дисертацією, а також в разі потреби скласти додаткові іспити з дисциплін, що визначаються вченою радою з урахуванням профілю підготовки, оволодіти методологією наукових досліджень;

– завершити роботу над дисертацією і подати її у спеціалізовану раду для захисту.

Таким чином, основними завданнями під час підготовки спеціалістів для підприємств відповідної галузі господарства є:

– оволодіння студентами і аспірантами науковим методом пізнання і застосування їх для поглибленого і творчого засвоєння навчального матеріалу, а також у майбутній практичній діяльності;

– вивчення методології наукових досліджень та застосування її у практичній діяльності;

– оволодіння методами і прийомами самостійного розв'язання наукових й технічних задач на виробництві та у наукових установах;

– набуття трудових навичок у застосуванні наукових методів для розв'язання виробничо-технічних завдань;

– впровадження досягнень науково-технічного прогресу у практику діяльності підприємств з найменшими витратами і найбільшою ефективністю.

Усі види і форми НДР студентів, магістрів і аспірантів спрямовані на активізацію їх творчого мислення, застосування наукових методів у дослідженнях конкретних ситуацій на підприємствах, що сприяє підвищенню якості підготовки фахівців для виробництва і наукових установ.

### 1.3 Процес наукового дослідження, його проблема і обґрунтування теми

*Наукове дослідження* – це цілеспрямований процес на здобуття та застосування нових знань про всебічне вивчення об'єкту (процесу чи явища, що породжує проблемну ситуацію), його структури та зв'язків, які спрямовані на *предмет дослідження* з метою встановлення закономірностей виникнення, розвитку і перетворення предмету в інтересах раціонального використання у практичній діяльності підприємств. Результатом дослідження є відібрані факти, гіпотези, теорії, закони й методи. Слід мати на увазі, що наукове мислення є по суті запереченням того, що на перший погляд здається очевидним. Науковими слід вважати будь-які дослідження, теорії, гіпотези, які припускають перевірку.

*Об'єкт наукового дослідження* є матеріальною чи ідеальною системою – це процес чи явище, що породжує проблемну ситуацію і обране для вивчення, на нього спрямована пізнавальна діяльність дослідника. *Предмет дослідження* знаходиться у межах об'єкта і вивчає властивості та структуру системи, взаємозв'язки її елементів, і виражає ставлення до об'єкта з встановленням залежності властивостей від внутрішніх і зовнішніх факторів[6]. Предмет дослідження є особливою проблемою, – це окремі сторони об'єкту, його властивості й особливості, які повинні бути досліджені в роботі, не виходячи за межі досліджуваного об'єкту. Наприклад, будь-який об'єкт досліджується як фізико-хімічний процес ряду перетворень на різних стадіях обробки. Предметом пізнання є дослідження технології, властивостей матеріалів на відповідних стадіях обробки і властивостей готової продукції залежно від різноманітних факторів, у тому числі й умов зберігання та експлуатації.

Будь-яке наукове дослідження основується на певній *методології*[7] – сукупності методів, способів[8], прийомів із встановленою послідовністю їх застосування, прийнятого під час розробки даного дослідження. Поняття «методологія» має два основних значення: по-перше, це – система певних правил, принципів і операцій, що застосовуються у тій чи іншій сфері діяльності (в науці, політиці, мистецтві тощо); по-друге, це – вчення про цю систему, загальна теорія метода. Специфіка наукової діяльності в значній мірі визначається методами.

*Метод* (від грецької metodos) у широкому розумінні слова – «шлях до чогось», шлях дослідження, шлях пізнання, теорія, вчення, свідомий спосіб досягнення певного результату, здійснення певної діяльності, спрямованої на пізнання об'єктивної дійсності, тобто вирішення певних задач. Він виступає як сукупність певних правил, прийомів, способів, норм пізнання і дії.

*Методика* – це фіксована сукупність прийомів практичної діяльності, що призводить до заздалегідь визначеного результату. У науковому пізнанні методика відіграє значну роль в емпіричних дослідженнях (спостереженні та

---

[6] Причинно-наслідковий вплив на якісні й кількісні зміни у об'єкті дослідження.
[7] План розв'язання науково-дослідного завдання.
[8] Послідовність дій, прийомів і операцій.

експерименті). На відміну від методу у завдання методики не входить теоретичне обґрунтування отриманого результату, вона концентрується на технічній стороні експерименту і на регламентації дій дослідника.

Наукове дослідження за обраною темою починається з досконалого вивчення наукової інформації. Найважливішим чинником роботи над відібраною з теми дослідження інформацією є *самостійність праці науковця*. Кожна сторінка має бути неспішно проаналізована, обдумана щодо поставленої мети. *Метою дослідження* є поставлена кінцева ціль, кінцевий результат, на який спрямоване все дослідження, визначення конкретного об’єкта і всебічне вивчення його структури, характеристик, зв’язків, а також одержання корисних для діяльності людини результатів. Тільки вдумливий, самостійний аналіз прочитаного дозволить переконатися у своїх судженнях, закріпити думку, поняття, уявлення.

Дуже часто важливим чинником при опрацюванні тексту, інформаційних матеріалів є *наполегливість* і *систематичність*. Часто, особливо при читанні складного нового тексту, чітко обдумати його з першого разу неможливо. Доводиться читати й перечитувати, добиваючись повного розуміння викладеного.

Послідовне, систематичне читання поліпшує засвоєння матеріалу, а відволікання зриває, порушує логічно налаштовану думку, викликає втому. Систематичне читання за планом з обдумуванням та аналізом прочитаного є набагато продуктивнішим за безсистемне читання. Слід зазначити, що повне й тривале запам’ятовування відбувається не лише тоді, коли ми цього хочемо, але й тоді, коли цього бажання немає, наприклад, при активному творчому читанні. Текст зберігається в пам’яті певний час. У середньому через один день втрачається 23–25 % прочитаного, через п’ять днів – 35, а через десять – 40 %.

*Науково-дослідний процес* – це сукупність організаційних, методичних і технічних прийомів, здійснюваних за допомогою певних процедур з використанням відповідного обладнання. Складається він з таких стадій: організаційної, дослідної, узагальнення, апробації і реалізації результатів дослідження.

На організаційній стадії вивчається стан об’єкта дослідження і виконується організаційно-методична підготовка.

*Вивчення стану об’єкту дослідження* передбачає конкретизацію теми і попереднє визначення теоретичних посилок її дослідження. При конкретизації теми визначається її місце у науковій проблемі, встановлюється зв’язок між суміжними темами, які раніше виконувалися іншими дослідниками або плануються до розробки, визначаються і обґрунтовуються предмети дослідження.

Попереднє визначення теоретичних посилань включає в себе вивчення стану об'єкту, наукової і теоретичної новизни гіпотез[9], що використовуються для проведення досліджень. Гіпотеза проходить три стадії розвитку: накопичення фактичного матеріалу і припущення на його підставі; формулювання гіпотези, тобто виведення з припущення наслідків, розгортання теорії; перевірка на практиці та уточнення за результатами цієї перевірки. Отже гіпотеза перетворюється на наукову теорію.

Визначення теоретичних основ розробки теми в технічних дослідженнях передбачає встановлення повноти висвітлення її у раніше виконаних дослідженнях, обґрунтування наукової новизни і необхідності подальшого вивчення, виходячи із народногосподарської потреби у цих знаннях. При цьому необхідно зібрати матеріал, провести його первинну обробку, узагальнити отриманий результат, дати теоретичне пояснення меті дослідження, зробити практичні висновки, рекомендації спочатку з одного питання, а потім перейти до критичного аналізу інших питань теми. Проте за будь-яких умов дослідник має починати свою роботу з вивчення теоретичних передумов, які дають змогу подати наукову значущість проблеми в цілому і визначити місце у ній досліджуваної теми.

Визначення теоретичних посилань теми дає змогу встановити її зв'язок з тенденціями розвитку досліджуваного об'єкту і загальними закономірностями певної науки.

Вивчення історії питання і сучасного стану проблеми дає змогу уникнути дублювання дослідження, помилок інших дослідників, а також використати їх знання і досвід. Збирання, відбирання та вивчення інформації здійснюється, як правило, за літературними джерелами, які відображають стан досліджуваної теми.

Висування та обгрунтування гіпотез (вибір напряму дослідження) завершує вивчення теоретичних посилань до теми дослідження. На цьому етапі аналізується сучасний стан проблеми, окреслюється коло питань, що залишились недослідженими, але мають певне значення для удосконалення чи розробки інноваційної технології. При цьому висуваються і обґрунтовуються гіпотези, які є початком перспектив подальшого вивчення проблеми і

[9] Наукове припущення, що висувається для пояснення будь-якого явища і потребує перевірки на досліді та теоретичного обґрунтування, для того щоб стати достовірною науковою теорією. Гіпотеза є формою осмислення фактичного матеріалу, формою переходу від фактів до теорії. Без гіпотези неможливо розпочати дослідження, оскільки невідомо, з якою саме метою необхідно його проводити, що і як спостерігати.

встановлення параметрів дослідження. Висування гіпотез ґрунтується на науковому прогнозуванні тенденцій розвитку досліджуваних явищ.

*Організаційно-методична підготовка* передбачає визначення теми з певної проблеми, розробку програми дослідження, техніко-економічне обґрунтування, складання плану дослідження теми, методики дослідження і робочого плану. У програмі зазначається дослідник-виконавець (кафедра, відділ, лабораторія), замовник теми, завдання, зміст і методи дослідження, очікуваний результат.

*Наукова проблема* (від грецької *problems* – задача, завдання) – це сукупність нових теоретичних чи практичних питань, які суперечать існуючим знанням або прикладним методам у цій науці й потребують вирішення за допомогою наукових досліджень. Суттю проблеми є центральне питання. Для отримання на нього відповіді необхідно дати їх на допоміжні питання. Пояснити раніше невідомі факти можна через здолання певних труднощів у процесі пізнання нових явищ. Ці труднощі проявляються у проблемних ситуаціях[10].

Наукові проблеми виникають у техніці не стихійно, а закономірно у зв'язку з розвитком продуктивних сил і виробничих відносин. Вирішуються вони за допомогою методів, запропонованих наукою. Отже, проблеми є рушійною силою розвитку технічної науки.

Для вирішення наукової проблеми у сучасних умовах науково-технічного прогресу необхідні зусилля великого колективу фахівців різного профілю (хіміків, фізико-хіміків, технологів та ін.). Кожен член наукового колективу повинен мати вольові якості у проведенні досліджень, бути цілеспрямованим у досягненні наукової істини.

*Вибір проблеми дослідження* обґрунтовується насамперед актуальністю, тобто наскільки обране дослідження сприятиме виконанню програм економічного і соціального розвитку підприємства. Висвітлення актуальності має бути не багатослівним. Актуальність теми випливає з проблемної ситуації, яку достатньо довести у межах однієї сторінки.

Оскільки наукова проблема є сукупністю складних теоретичних чи практичних питань, то в процесі наукового дослідження або визначення їх параметрів, проблему поділяють на складові компоненти – теми.

*Тема* (від грецької *thema* – основна думка, завдання, положення, яке необхідно розвинути) – частина наукової проблеми, яка охоплює кілька питань дослідження.

---

[10] Існуючі наукові знання є недостатніми для вирішення нових завдань пізнання.

Виходячи з мети НДР, яка має передбачати розробку нових концепцій чи напрямів розвитку галузі, удосконалення існуючої методології або розробку нових методик (рекомендацій) з окремих розділів даної науки, дослідник визначає тему наукової роботи. Обґрунтування вибраної теми дослідження визначають за критеріями, які наведені на рисунку 1.1.


Рисунок 1.1 – **Обґрунтування теми дослідження**

Для визначення *ефективності* теми необхідно з літературних джерел вивчити ступінь і рівень розробки дослідження, узагальнити за можливості передовий досвід підприємств і організацій.

*На стадії вибору теми визначають її назву* – змістовий заголовок.

У заголовку теми дослідження слід передбачати динамічний розвиток наукових знань. Зокрема, необхідно вкладати *зміст, динамізм і компетентність,* які відображають досягнення науково-технічного прогресу, спрямованість на кінцевий результат, наприклад: «Розробка технології формування модифікованих поліпропіленових волокон», «Отримання електропровідних властивостей текстильних матеріалів», «Удосконалення препарату і технології антисептичної обробки шкіряного напівфабрикату» тощо. У наведених заголовках тем міститься динамічний розвиток досліджень і передбачається напрям їх проведення. Студентам під час вибору теми наукових досліджень поряд із викладеними принципами обґрунтування актуальності, наукової новизни і практичної значущості, необхідно передбачати можливість використання результатів НДР на першому освітньому рівні для написання курсової, на другому – дипломної магістерської роботи.

*Відповідність теми дослідження профілю установи* включає в себе спеціалізацію наукової установи, наявність кадрів за профілем роботи, матеріально-технічну базу. Цей критерій в основному застосовується при виборі теми комплексного дослідження. *Спеціалізація* наукового закладу дає змогу застосовувати накопичений досвід виконання наукових робіт з певної тематики. *Наявність кадрів* за профілем роботи скорочує термін розробки і знижує витрати на НДР. Для апробації результатів дослідження і прискорення впровадження їх у виробництво необхідна відповідна *матеріально-технічна база*, яку слід враховувати при виборі теми дослідження.

З метою визначення джерела фінансування (госпрозрахункове, бюджетне) та його забезпечення при виборі теми враховують розмір коштів, рентабельність розробки для наукового закладу, а також створення необхідних умов для впровадження результатів досліджень у промисловість. Отримання прибутків від розробки наукової теми для наукового закладу не планується. Це однаковою мірою стосується впровадження результатів досліджень у практику діяльності підприємства.

Отже, на стадії обґрунтування теми дослідження вивчаються всі критерії її вибору, після чого приймається рішення про включення теми до плану науково-дослідницьких робіт цього закладу.

Техніко-економічне обґрунтування (ТЕО) НДР містить найменування теми і проблеми, до якої вона включена, дані про замовника, наукового керівника, підстави для виконання і класифікацію НДР (теоретична, пошукова, прикладна, конструкторська розробка), кошторисну вартість і терміни виконання, місце та час можливого впровадження.

ТЕО відображає найважливіші показники НДР, які дають змогу на стадії підготовки дослідження визначити народногосподарську значущість теми та її кінцеву мету, науково-технічну і практичну цінність, розрахунковий економічний ефект від можливого впровадження результатів дослідження. Таким ефектом є зменшення затрат на капітальні вкладення, зниження собівартості продукції, зростання продуктивності праці, підвищення якості продукції, підвищення санітарно-гігієнічних умов праці й техніки безпеки, зниження шкідливого впливу на навколишнє середовище.

План дослідження теми складається з окремих розділів, підрозділів і пунктів. Під час складанні деталізованого плану дослідження необхідно додержуватись існуючих вимог і правил оформлення. У плані визначаються підприємства на яких проводитиметься напіввиробнича апробація.

Методики дослідження містять технологічні параметри обробок, характеризують методи, відповідне обладнання і прийоми, які передбачається застосовувати під час виконання роботи з конкретної теми.

Робочий план складається відповідно до програми і плану дослідження теми, де відображаються календарні терміни початку та кінця робіт за етапами, вартість робіт і питомий відсоток їх у повній сумі витрат. Крім того, у плані вказують виконавців кожного етапу робіт. У ньому також передбачається технічна документація, що відображає результати виконаної відповідного етапу роботи.

Стадія узагальнення, апробації та реалізації результатів дослідження відображається у звітах про виконання НДР, публікаціях, дисертаціях, монографіях. Результати дослідження обговорюються у науковому колективі організації (кафедра, науково-технічна рада), який виконав наукову роботу, проводиться рецензування і експертиза, вносяться необхідні корективи, доповнення тощо. Після цього проводиться реалізація висновків і пропозицій, які обґрунтовані у виконаній роботі.

Таким чином, науково-дослідний процес є системним впливом на об’єкт дослідження з метою вивчення, виявлення закономірностей певних процесів, способів удосконалення і оптимізації їх виконання у практичній діяльності підприємств.

## 1.4 Інформаційно-пошуковий апарат бібліографічної інформації

Наукова робота дослідника з виявлення опублікованих джерел ґрунтується на інформаційно-пошуковому апараті бібліографічних джерел інформації. Бібліографія (від грецької *biblion* – книжка, *grapho* – пишу) – це галузь знань про методи і способи складання покажчиків, списків, оглядів друкованих творів. Завдання бібліографії полягає у реєстрації друкованих творів з певної галузі знань, окремої проблеми, теми. Подається вона у наукових дослідженнях у виді переліку книг, журналів і статей із посиланням на видавництво, місце і рік опублікування тощо.

Для організації інформаційного пошуку важливо раціонально розмістити книги, журнали та інші об’єкти інформації в сховищах. Для цього потрібно присвоїти об’єктам пошуку певні індекси, відповідно до яких розміщувати їх у довідково-інформаційних фондах.

Присвоєння індексів називається *індексуванням,* яке полягає у визначенні кодового позначення об’єкта пошуку згідно з інформаційно-пошуковою мовою (ІПМ). Закладами науково-технічної інформації, науковими і масовими бібліотеками застосовуються ІПМ бібліотечно-бібліографічного типу: універсальна десяткова класифікація (УДК) і бібліотечно-бібліографічна класифікація (ББК).

*УДК систематизує* всі людські знання у 10 класах (рисунок 1.2), кожний з яких розділено на розділи, які в свою чергу – на десять підрозділів. Для полегшення читання після кожного третього знаку ставиться крапка.

| Класи знань | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Загальний, бібліографія, бібліотечна справа, журналістика | Філософія. Психологія | Релігія. Теологія | Суспільні науки, економіка, право | Вільний з 1961 року | Математика та природничі науки | Прикладні науки. Медицина | Мистецтво. Декоративно-прикладне мистецтво | Мова. Мовознавство. Художня література. Літературознавство | Географія. Біографії. Історія |

Рисунок 1.2 – **Систематизація людських знань за УДК**

Отже, УДК створюється, за допомогою децимальної системи, використовуючи цифри від 0 до 9 та їх задані комбінації. Кодовим позначенням індексуються всі наукові знання, явища, поняття. Система ця відкрита, тобто нові галузі знання і поняття у міру їх виникнення знаходять в ній своє місце.

Залежно від потреб поділу інформаційно-пошукової мови до основних індексів додаються інші знаки, чим підвищується спеціалізація УДК. Для зручності сприймання кожні три знаки відокремлюються крапкою. У межах одного розділу індекси розміщуються від загального до часткового. Вони мають аналітичні позначення, що відображають ознаки, характерні для вузького кола понять, і застосовуються лише у тому розділі, на початку якого розміщені. Позначення виділяються жирною вертикальною лінією зі сторони полів і приєднуються до основних індексів за допомогою тире, крапки і нуля. Так, підручник для ВНЗ «Методологія наукових досліджень з елементами інтелектуальної власності» має класифікацію за УДК: [001.891+347.77]:378 (075.8), який розшифровується так: 001 – наука та знання в цілому. Організація розумової праці; 001.891 – наукові дослідження. Методи дослідження; 347.77 – промислова торгівельна і наукова власність та право власності; (075.8) – підручники та навчальні посібники для університетів, вищих навчальних закладів.

Багато років УДК застосовувалось як найбільш удосконалена класифікація знань. Однак розвиток наукових знань, виникнення нових понять у науковій і практичній діяльності людей зумовили появу в колишньому союзі ІПМ – бібліотечно-бібліографічної класифікації (ББК), яка має іншу систему класифікації й індексування людських знань. Основна (цифрова) частина її літерно-цифрових індексів побудована за десятковим принципом. У ній широко застосовуються знаки і прийоми УДК, що набули спадковості й свого подальшого розвитку.

ББК у виді середніх таблиць (10 випусках) призначені для систематизації літератури в бібліотеках різних типів і видів: універсальних наукових, вищих навчальних закладів, галузевих і спеціалізованих. Ці таблиці заплановано випускати протягом ряду років окремими, послідовно нумерованими випусками. Скорочені таблиці ББК в одному томі замінять варіант для масових бібліотек («Рабочие таблицы ББК для массовых библиотек», 1997 г.). Скорочене видання має виходити у світ з інтервалом у 8–10 років. За структурою таблиці ББК є:

– основними;
– спеціальних типових ділень;
– загальних типових ділень;
– абетково-предметний покажчик.

Перший ряд основних таблиць має сім відділів (таблиця 1.1), які поділено на підвідділи, що складають другий ряд ділень. Підвідділи в результаті наступної деталізації утворюють третій ряд ділень і так далі.

Всі ділення мають умовні позначення, які називаються *класифікаційними індексами*. У багатьох рубриках є посилання й відсилання. Їхнє призначення різниться. Посилання, позначені словами «див. також» пов’язують родинні за змістом галузі знання. Відсилання – позначені словом «див.» – упереджують від неправильного рішення, а крім того, підказують, до якого саме розділу потрібно віднести книгу.

Таблиця 1.1 – **Структура основного ряду ББК**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Науки про природу | 1 | Загальнонаукове і міждисциплінарне знання | А | Природничі науки |
| | 2 | Природничі науки в цілому | Б | |
| | | Фізико-математичні науки | В | |
| | | Хімічні науки | Г | |
| | | Науки про Землю | Д | |
| | | Біологічні науки | Е | Прикладні науки |
| | 3 | Техніка. Технічні науки | Ж/О | |
| | 4 | Сільське і лісове господарство. Сільськогосподарські і лісогосподарські науки | П | |
| | 5 | Охорона здоров'я. Медичні науки | Р | |
| Науки про суспільство | 6/8 | Суспільні й гуманітарні науки в цілому | С | Суспільно-політичні науки |
| | | Історія. Історичні науки | Т | |
| | | Економіка. Економічні науки | У | |
| | | Політика. Політичні науки | Ф | |
| | | Держава і право. Юридичні науки | Х | |
| | | Військова наука. Військова справа | Ц | |
| | | Культура. Наука. Освіта | Ч | Гуманітарні науки |
| | | Філологічні науки. Художня література | Ш | |
| | | Мистецтво. Мистецтвознавство | Щ | |
| Науки про мислення | | Релігія. Атеїзм | Э | |
| | | Філософські науки. Психологія | Ю | |
| | 9 | Література універсального змісту | Я | |

*Таблиці спеціальних типових ділень* за *структурою* всередині основних ділень класифікації мають спеціальні ділення. Вони дозволяють деталізувати матеріал за ознаками, що притаманні окремим наукам і галузям практичної діяльності і приєднуються до індексу основних таблиць через дефіс (Сільськогосподарські науки: -2 Біологія виду або групи сільськогосподарських тварин; -3 Розведення і племінна справа; -4 Годування і утримання).

*Загальні типові ділення* за структурою таблиць можуть використовуватися в усіх діленнях класифікації, оскільки формують комплекси видання за ознаками, які характерні для усіх або багатьох галузей знання. Поділяються на три види:

– тематичні, що відбивають типові ознаки змісту документів і призначені для більш глибокого розкриття саме змісту («с – Методика і техніка наукових досліджень і спостережень»;

– формальні – дозволяють групувати матеріал за ознаками форми і призначення документів («я5 Журнали», «я72 Підручники і навчальні посібники для середньої школи»);

– територіальні – дають змогу комплектувати матеріали за географічною ознакою, вони можуть застосовуватися в будь-якому діленні класифікації. Позначаються цифрами і великими буквами, взятими у дужки – (4УКР), (5КАЗ).

Тематичні і формальні загальні типові ділення дозволяють утворювати спеціальні рубрики для різних видів творів друку: словників, довідників, підручників та ін.; виокремити особливо важливі поняття, типові для різних галузей знань: філософські питання науки, її методологію, управління, організацію і охорону праці, техніку безпеки праці, історію науки та інше. Індекси загальних типових ділень позначаються малими літерами російського алфавіту: в, г, к, л, и, с, у, р, ц, я.

Територіальні типові ділення призначені для утворення рубрик, що позначають місцевість (територію, регіон) у відділах історії, географії та деяких інших.

В *Алфавітно-предметному покажчику* назви предметів і понять розташовані за алфавітом, а поруч зазначено класифікаційний індекс, під яким їх можна знайти в Таблицях. Покажчик полегшує і прискорює пошук потрібного класифікаційного ділення і показує як один і той же предмет представлено в різних галузях знань залежно від точки зору його розглядання.

Розглянуті інформаційно-пошукові мови застосовуються під час організації бібліотечних фондів.

Основою інформаційно-пошукового апарату бібліотек є *каталоги* – упорядковані сукупності карток, що включають в себе бібліографічний опис літературних джерел. Формуються основні каталоги або за принципом алфавіту, або за іншим принципом систематизації знань. Крім основних каталогів, створюються *допоміжні:* каталог періодичних видань, картотеки статей і рецензій.

Основними каталогами є систематичний і алфавітний.

*Систематичний каталог* формується за діючою класифікацією науки. Проблеми науки мають відповідні цифрові чи літерно-цифрові позначення (індекси), сукупність яких ієрархічно реалізується у рубриках каталогу, якими є розділи, підрозділи тощо. Публікація позначається індексом чи навіть кількома індексами, якщо вона стосується кількох проблем.

Картка з описом публікації розміщується в тих підрозділах систематичного каталогу, які позначені на ній відповідним індексом.

*Алфавітний каталог* складається за послідовністю літер алфавіту. При цьому першою літерою опису літературного джерела може бути прізвище або перше слово назви публікації, потім – друга літера і т. д. Залежно від кількості авторів, наявності спеціального, титульного редактора першим словом, за яким здійснюється опис літературного джерела та його розміщення у каталозі.

Під час створення каталогів застосовуються загальні правила індексації публікації згідно з УДК і ББК, але разом з тим великі бібліотеки створюють свої варіанти вказаних систем, за допомогою яких відображають у систематичних каталогах нові поняття. Ці особливості узагальнюються в алфавітно-предметному покажчику (АПП), який є ключем до каталогу бібліотеки. Досліднику необхідно в процесі пошуку вивчити весь інформаційно-пошуковий апарат бібліотеки для прискорення пошуку необхідної літератури з досліджуваної проблеми.

Алфавітно-предметний покажчик включає в себе алфавітний перелік понять, зафіксованих у каталогах, та присвоєні їм індекси. Разом з тим зміст багатьох публікацій не вміщується повністю в рубрики, які є, оскільки прискорення науково-технічного прогресу зумовлює виникнення нових знань, які не були раніше передбачені при розробці індексів. Тому дослідник повинен володіти активними методами пошуку, що базуються на автоматизованій бібліотечно-бібліографічній системі, створеній на технічній основі ЕОМ.

Вивчення практики бібліографічного пошуку дає змогу здійснити деякі узагальнення пошукових процедур, як це показано в таблиці 1.2.

Як видно із змісту ідентифікаційних ознак, для пошуку необхідних літературних джерел за алфавітним чи систематичним каталогом досліднику необхідно чітко, повно й однозначно сформулювати в своєму запиті пошуковий образ документа і правильно бібліографічно описати його. Тому вивчення інформаційно-пошукового апарату бібліотек є обов’язковим атрибутом для дослідника-початківця.

Таблиця 1.2 – **Вихідні дані бібліотечного пошуку літературних джерел**

| Вихідні дані пошуку | Місце пошуку | Примітка |
|---|---|---|
| 1 *Публікація одного-трьох авторів* | | Якщо прізвище автора поширене, то у пошуку приймають до уваги його ініціали |
| 1.1 Прізвище автора, першого у публікації | Алфавітний каталог, прізвище автора | |
| 1.2 Назва публікації | Систематичний каталог, назва публікації | |
| 2 *Публікації більше трьох авторів* | | |
| 2.1 Назва публікації | Алфавітний каталог, назва публікації | |
| 2.2 Прізвище редактора | Алфавітний каталог, прізвище редактора | |
| 3 *Тематичний збірник статей чи матеріалів* | | |
| 3.1 Назва збірника | Алфавітний каталог, назва збірника | |
| 3.2 Прізвище редактора | Алфавітний каталог, прізвище редактора | |
| 3.3 Автор статті, розміщеної у збірнику | Систематичний каталог | |
| 4 *Наукові записки, праці, вісники та інші періодичні видання вузів і НДІ* | | Пошук здійснюють за каталогом періодичних видань |
| 4.1 Назва, том, рік і номер випуску | Алфавітний каталог, колективний автор, назва і номер випуску | |

Таким чином, формування і управління бібліографічними фондами та використання їх у наукових дослідженнях базується на міжнародних інформаційно-пошукових мовах, чим забезпечується інтернаціоналізація науки.

## 1.5 Науково-технічна інформація. Основні джерела наукової інформації

Одним з ключових етапів проведення наукових досліджень є добір інформації. Існує думка, що найкраще рішення проблеми складається на 90 % з інформації і на 10 % з натхнення. Власне інформацію можна віднести до категорії абстрактних понять, але низка таких особливостей, як можливість фіксування, передачі, зберігання, знищення інформації наближають її до матеріальних об’єктів. Інформаційним забезпеченням називають процес задоволення потреб конкретних користувачів інформації, заснований на використанні спеціальних методів і засобів її отримання, опрацювання, накопичення та видачі в зручному для користувача виді.

Основними принципами формування різних видів інформаційного забезпечення в науковій роботі мають висвітлюватись:

√ Актуальність – реальне відображення стану об’єкта дослідження на кожен проміжок часу;

√ Достовірність – точне відтворення об’єктивного стану і розвитку об’єкта дослідження;

√ Повнота відображення – врахування всіх чинників, що впливають на стан об’єкта;

√ Інформаційна єдність – представлення інформації в такій системі показників, за якої унеможливлювалась б суперечність у висновках і неузгодженість первинних даних і висновків;

√ Релевантність даних – дає змогу отримувати інформацію відповідно до висунутих вимог, виключає роботу із зайвими даними.

У загальному випадку під джерелом інформації розуміється документ, що містить будь-яку інформацію. До документів відносять різного роду видання, що є основним джерелом наукової інформації. *Видання* – це документ, який пройшов редакційно-видавничу обробку, отриманий друкуванням, поліграфічно самостійно оформлений і призначений для поширення інформації, що міститься в ньому. Джерелами наукової інформації є також неопубліковані документи: дисертація, депонована рукопис, звіт про науково-дослідницьку роботу чи дослідно-конструкторську розробку, науковий переклад, оглядово-аналітичний матеріал. На відміну від видань ці документи не розраховані на широке і багаторазове використання. Вони тиражуються в невеликій кількості екземплярів засобами машинопису чи ЕОМ. Науковців, у першу чергу, цікавлять видання, з яких може бути почерпнута необхідна для НДР інформація – наукові, навчальні, довідникові та інформаційні.

Наукові видання відносяться до основних видів, які містять результати теоретичних та експериментальних досліджень. Їх поділяють на наступні види: монографії, статті в науково-технічних журналах, автореферати, дисертації, збірники наукових праць, препринти, матеріали наукової конференції тощо.

Монографія – наукове або науково-популярне книжкове видання, що містить повне і всебічне дослідження проблеми чи теми і належить одному автору чи кільком співавторам.

Стаття в науковому журналі – теоретичні, експериментальні чи оглядові дослідження, що висвітлюють окремі питання науково-технічної проблеми.

Збірник наукових праць – видання, що містить дослідницькі матеріали наукових установ, навчальних закладів чи суспільства, присвячені певній проблемі.

Матеріали наукової конференції – науковий неперіодичний збірник, що містить підсумки наукової конференції (програми, доповіді, рішення).

Препринт – наукове видання, що містить матеріали попереднього характеру, опубліковані до виходу в світ видання, у якому вони можуть бути поміщені.

Автореферат дисертації – наукове видання у виді брошури, яка містить складений автором реферат проведеного ним дослідження, представленого на здобуття наукового ступеня.

Тези доповідей наукової конференції – науковий неперіодичний збірник, що містить опубліковані до початку конференції матеріали попереднього характеру (анотації, реферати, доповіді чи повідомлення).

Навчальне видання містить систематизовані відомості наукового чи прикладного характеру, викладені у зручній формі для вивчення. До них відносяться наступні види: підручник, навчальний посібник (навчально-наочний і навчально-методичний), словник, енциклопедія, довідник, хрестоматія. Вони мають бути офіційно визнані через процедуру надання Вченою радою ВНЗ (раніше МОН України) відповідного грифа.

Підручник – навчальне видання, що систематизовано відтворює зміст навчальної дисципліни відповідно до офіційно затвердженої навчальної програми і офіційно *затверджено* Вченою радою ВНЗ України як даний вид видання;

Навчальний посібник – навчальне видання, що доповнює або повністю замінює підручник у викладі навчального матеріалу з певної дисципліни і офіційно *рекомендовано* Вченою радою ВНЗ України як даний вид видання;

Навчально-наочний посібник – навчальне видання, що містить ілюстративно-наочні матеріали, які сприяють вивченню і викладанню дисципліни, засвоєнню її змісту;

Навчально-методичний посібник – навчальне видання з методики викладання навчальної дисципліни;

Довідник, словник, енциклопедія – навчальні видання довідникового характеру, які містять упорядкований перелік відомостей про певну галузь знань або мовні одиниці (слова, словосполучення, фрази, терміни, поняття тощо);

Хрестоматія – навчальне видання наукового, літературно-художнього, історичного, мистецького чи іншого твору або його частини, які є об'єктом вивчення певної навчальної дисципліни відповідно до офіційно затвердженої навчальної програми.

Інформаційне видання містить упорядковану сукупність бібліографічних записів.

Бюлетень (вісник) – це періодичне чи триваюче видання, що випускається оперативно і містить короткі офіційні матеріали з питань, що входять у коло ведення випускної його організації.

У загальному випадку носіями інформації можуть бути різні документи:

– книги (монографії, підручники, навчальні посібники);

– періодичні видання (журнали, бюлетені, наукові збірники, праці університетів);

– нормативні документи (стандарти, технічні умови, інструкції, тимчасові вказівки, нормативні таблиці й ін.);

– патентна документація (патенти, авторські свідоцтва);

– звіти з науково-дослідної та дослідно-конструкторської роботи);

– інформаційні видання (збірники НТІ, аналітичні огляди, інформаційні листки, експрес-інформація, виставочні проспекти тощо);

– переклади іноземної науково-технічної літератури;

– дисертації, автореферати;

– виробничо-технічна документація організацій (звіти, акти приймання робіт тощо);

– вторинні документи (реферативні огляди, бібліографічні каталоги, реферативні журнали тощо).

Ці документи створюють величезні інформаційні потоки, обсяги і темпи яких щорічно зростають, тому пошук інформації, що здійснюється з метою її аналізу, з кожним роком ускладнюється. Всі майбутні спеціалісти мають володіти основними положеннями, пов'язаними з інформаційним пошуком.

Інформаційний пошук – сукупність операцій, спрямованих на відшукання документів, які необхідні для розробки теми. Пошук може здійснюватись:

– вручну за звичайними бібліографічними картками каталогів (алфавітного, систематичного і алфавітно-предметного покажчика до систематичного каталогу);

– автоматизовано за допомогою автоматизованого робочого місця (АРМ) читача із застосуванням ЕОМ.

Пошук інформації краще проводити за реферативними журналами, які які публікують скорочений виклад змісту первинних документів (або їх частин) з основними фактичними відомостями. Корисно переглядати закордонні реферативні видання.

В Україні видається Український реферативний журнал (УРЖ) «Джерело», що виходить у трьох серіях:

1. Природничі науки.

2. Техніка. Промисловість. Сільське господарство.

3. Суспільні й гуманітарні науки. Мистецтво.

В галузі природничих, технічних і точних наук важливим реферативним джерелом всесвітньої наукової літератури виступають реферативні журнали Всеросійського інституту наукової і технічної інформації (ВІНІТІ), які виходять з 1954 р. у 25 серіях. Зокрема, для хіміка основними джерелами інформації з НДР є:

– РЖ ВІНІТІ «Химия», «Лёгкая промышленность» і журнал американського технічного товариства «Chemikel Abstracts»;

– бібліографічний покажчик Інституту наукової інформації США «Science Citati on Index»;

– галузеві фахові журнали «Легка промисловість», «Кожевенно-обувная промышленность», Вісники ВНЗ тощо;

– іноземні журнали «Journal of American Leather and Chemical Association» (JALCA), «Journal Society of Leather Technology and Chemestry», «Das Leder», «Chem. Soc.», «World Leather» та ін.;

– офіційні бюлетені Інституту промислової власності України «Промислова власність»; Федерального інституту промислової власності Російської Федерації «Изобретения и полезные модели» «Промышленные образцы и товарные знаки»;

– реферативний збірник «Изобретения стран мира» і «Внедрённые изобретения»;

– інформаційні матеріали Українського інституту науково-технічної і економічної інформації (УкрІНТЕІ) з різних галузей знань;

– рекламні матеріали.

Реферативні журнали мають авторський, предметний і систематичний покажчики. Авторський і предметний покажчики видаються як пономерні, так і за півріччя. Пошук періодичних джерел інформації в цих журналах проводиться спочатку за авторським (якщо відомий автор) чи предметним покажчиком за сукупністю ключових слів (КС) і пояснювальних неключових слів (НКС) з почерговим виводом у рубриці (заголовок) покажчика кожного КС. Причому КС і НКС вибирають і комбінують у запису таким чином, щоб їх сукупність віддзеркалювала зміст документа.

Як КС використовують слова чи словосполучення, що являють собою основні поняття і терміни хімії, хімічної технології, а також суміжних з ними областей науки і техніки:

– матеріальні об’єкти дослідження, якими є речовини, матеріали, класи сполук, мінерали, сировина, продукти і вторинні ресурси виробництва тощо;

– властивості та характеристики речовин;

– процеси та їх характеристики;

– явища;

– прилади, улаштування;

– методи аналізу і дослідження;

– галузі науки і техніки;

– загальнонаукові терміни тощо.

Зважаючи на велике значення оглядової літератури до КС належить також слово «огляди» (російське «обзоры»).

КС і НКС відокремлюються у записах предметного покажчика точкою із комою чи комою. Наприклад, якщо до реферату складений наступний запис: горіння (КС); дифузійне (НКС); водень (КС); конвекція (КС), то у предметному покажчику будуть поміщені наступні записи:

Горіння, дифузійне; водень; конвекція…

Водень: горіння, дифузійне; конвекція…

Конвекція: горіння, дифузійне; водень…

Предметний покажчик включає не всі хімічні сполуки, що згадуються у документі, а лише ті сполуки чи групи і класи сполук, які є основою предмету дослідження чи синтезу.

У покажчиках авторських і предметних виявляють номер реферату, зміст якого знаходять у відповідному розділі систематичного покажчика РЖ.

Наприклад, номера рефератів з технології шкіри та хутра містяться в систематичному покажчику РЖ після слів «Кожа» і «Мех.».

Заслуговує уваги бібліографічний покажчик цитованої літератури з точних природничих і технічних наук «Science Citati on Index» (SCI), що випускаються фірмою «Institute for Scientific Information», США. Перед іншими видами покажчиків він має наступні переваги:

– легкість і швидкість пошуку;

– високу глибину індексування;

– всебічний охват;

– можливість використання для перевірки достовірності бібліографічного опису документів.

Під час традиційного пошуку дослідник, що переглядає сучасну літературу, знаходить в ній посилання на праці попередників і вивчає їх. Протилежний шлях передбачає методика цитування. Досліднику необхідно знати прізвище його попередника і, звернувшись до покажчика бібліографічних посилань, він може знайти всі сучасні праці, які цитують цього попередника. В даний час для підготовки покажчика SCI використовується 3,3 тис. журналів світу і 200 видань, що тривають. Він щорічно вміщує відомості про більше ніж 550 тис. нових публікацій і близько 8,5 млн. посилань. Покажчик SCI містить вичерпну інформацію майже з 90 % світової і технічної літератури. З 1979 р. покажчик SCI випускається 6 раз в рік (в м'якій обкладинці) і всі ці випуски об'єднуються потім в річні видання (обкладинка тверда).

Покажчик SCI включає три окремих, але зв'язаних між собою складових:

Citation Index (CI) – покажчик цитування;

Source Index (SI) – покажчик джерел;

Permuterm Subject Index (PSI) – премутаційний предметний покажчик (покажчик ключових слів, що містяться в заголовках статей-джерел).

Для опису структури і використання покажчика SCI введемо ряд понять:

– журнали-джерела – журнали і видання, що тривають;

– статті-джерела – публікації з журналів-джерел називаються документами, що цитуються, а автори цих публікацій – авторами, що цитуються.

– посилання, що містяться в статтях-джерелах, називаються цитовані публікації, а їх автори – цитованими авторами.

Покажчик цитування CI представлений в алфавітному порядку *перших* авторів цитованих публікацій. Під прізвищем цитованого автора наводяться всі сучасні роботи (без обмеження віку цитованої публікації), в яких були процитовані праці даного автора. Ці роботи розташовані в алфавітному порядку *перших* авторів статей-джерел. Пошук за покажчиком CI починається з прізвища першого відомого автора, що опублікував матеріал з відповідної галузі Ваших інтересів.

Фрагмент покажчика CI містить: прізвище цитованого автора; рік видання цитованої публікації; назву журналу, в якому була опублікована цитована праця; том чи номер журналу, в якому була опублікована цитована праця; перша сторінка цитованої публікації; прізвище автора, що цитується; журнал-джерело; том чи номер журналу-джерела; перша сторінка публікації, що цитується та рік її видання.

Покажчик джерел SI наведений в алфавітному порядку публікацій, що цитуються і в ньому містяться повні бібліографічні описи цих робіт (всі іншомовні заголовки переведені на англійську мову) з наведенням адреси організації, в якій виконано дослідження.

Фрагмент покажчика SI містить: прізвище автора, що цитується; прізвища співавторів; назву статті-джерела; назву журналу-джерела; його том і номер; сторінка статті-джерела; рік видання; кількість посилань, що містяться в статті; адресу організації, в якій виконано дослідження.

В першому томі покажчика SI міститься також покажчик організацій (Corporate Index). Він складається з двох розділів: географічного (Geographic) і організацій (Organization).

Географічний покажчик представлений в алфавітному порядку країн, в яких виконані роботи, що опубліковані в журналах-джерелах. Починається покажчик з назв штатів США, а потім в алфавітному порядку наведені інші країни. Під назвою країни чи штату США представлені в алфавітному порядку назви міст, а під ними назви організацій і прізвища авторів публікацій, що цитуються.

Фрагмент географічного покажчика містить: назву штату США; назву міста; скорочену назву організації; повний почтовий адрес організації; прізвище автора, що цитується; назву журналу, що цитується; сторінку і рік його видання.

Список скорочень назв організацій і їх повні назви наводяться у вступі до покажчика. Якщо дослідник не знає точно географічного розташування організацій, то він веде пошук за покажчиком організацій. Покажчик організацій представлений в алфавітному порядку скорочених назв організацій і далі вказується країна (а для США назва штату і місто), в якій знаходиться дана організація.

Покажчик PSI наведений в алфавітному порядку значущих (ключових) слів заголовків документів-джерел. Для ефективності і швидкості пошуку кожне ключове слово заголовка зв'язується попарно з будь-яким іншим словом цього заголовка, крім того багато словосполучень, найчастіше вживаних сумісно, розглядаються як один термін і зв'язуються з іншими словами заголовка. Ці пари слів, що зустрічаються в заголовку, розташовуються в алфавітному порядку. Проти них вказані прізвища авторів, що цитуються, які використовують ці слова в заголовках своїх статей, опублікованих в журналах-джерелах.

Таким чином, простий алфавітний підхід до слів веде до прізвищ авторів, які використовували ці слова в заголовках своїх статей. Ці прізвища авторів потім можна знайти в покажчику джерел SI для отримання повного бібліографічного опису статей. Під час використання покажчика «Science Citati on Index» важливо пам'ятати, що вихідний пункт пошуку може змінюватись залежно від того, що відомо: прізвище автора, предмет дослідження, назва організації тощо.

Для пошуку наукової інформації можна використовувати такі загально-державні бібліотеки:

1. *Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського* (03039, Київ, проспект 40-річчя Жовтня, 3. Електронна адреса: http:// www.nbuv.gov.ua/).

Обсяг фондів – близько 15 млн. одиниць зберігання. Це унікальне зібрання джерел інформації, що включає книги, журнали, продовжувані видання, карти, ноти, образотворчі матеріали, рукописи, стародруки, газети, документи на нетрадиційних носіях інформації.

У локальних інформаційних мережах Бібліотеки знаходиться 450 комп'ютерів; на Інтернет-порталі – 3,5 млн бібліографічних і 260 тис. реферативних записів, а також 55 тис. повних текстів документів; у Інтернет-середовищі – 700 тис. публікацій. Пошук у електронних ресурсах здійснюється програмним модулем WWW-ISIS (ЮНЕСКО).

2. *Національна парламентська бібліотека України* (01601, Київ, вул. М. Грушевського, 1. Електронна адреса: http://www. nplu.kiev.ua/.

3. *Державна науково-технічна бібліотека України* (01171, Київ, вул. Антоновича, 180. Електронна адреса: http://gntb.gov.ua/ua/). Бібліотека є місцем збереження всіх звітів про виконані науково-дослідні роботи та повних текстів дисертацій з усіх галузей знань, які захищені в Україні (у вигляді комп'ютерних файлів).

Також у бібліотеці є реферативна база депонованих наукових робіт.

Для того, щоб користуватися цими матеріалами для написання кваліфікаційних робіт різних освітньо-кваліфікаційних рівнів та дисертацій, треба у деканаті факультетів взяти лист із зазначенням конкретної теми наукової роботи, і тоді студентів і аспірантів записують до бібліотеки.

4. *Бібліотека імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка* (01017, Київ, вул. Володимирська, 64. Електронна адреса: http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/title4.php3).

Наукова бібліотека ім. М. Максимовича є структурним підрозділом Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

До послуг читачів бібліотеки є такі каталоги:

• електронний каталог книг (містить 753224 записів) – дозволяє виконувати пошук та замовлення літератури в фондах бібліотеки за допомогою Інтернету;

• каталог дисертацій та авторефератів (містить 141877 записів) – дозволяє виконувати пошук авторефератів та дисертацій. Пошук можна проводити за назвою, автором та роком видання дисертації чи автореферата;

• електронний покажчик публікацій (містить 78337 записів) – призначений для пошуку інформації серед картотеки статей, авторефератів та дисертацій. Дозволяє проводити пошук за назвою, автором та роком видання публікації.

До послуг читачів бібліотеки також діє доступ до наукометричних баз даних, зокрема Scopus[11], Web of Science[12] та інших, а також повнотекстової бази дисертацій Російської державної бібліотеки.

## 1.6 Пошук наукової інформації в мережі Internet

Обсяг наукової інформації безперервно зростає, зростає і швидкість поширення інформації. Цей процес обумовив і створення нових засобів доступу до інформації, одним з яких стала всесвітня мережа Internet. Глобальна мережа Internet – це об’єднання десятків тисяч локальних

[11] Найбільша в світі єдина реферативна база даних і наукометрична платформа (створена в 2004 р). Наукометричний аппарат бази даних забезпечує облік публікацій науковців і установ, у яких вони працюють, та статистику їх цитованості. Scopus надає гіперпосилання на повні тексти матеріалів. База даних доступна за умов підписки через веб-інтерфейс.

[12] Реферативна наукометрична база даних наукових публікацій проекту Web of Knowledge компанії Thomson Reuters. Апарат платформи забезпечує відстеження показників цитованості публікацій з ретроспективою до 1900 р. Одним з ключових концептів наукометричного апарату платформи є імпакт-фактор (індекс впливовості) наукового видання.

регіональних і корпоративних комп'ютерних мереж всього світу, що створює єдиний інформаційний простір. Система комп'ютерів, які називають маршрутизаторами, об'єднують між собою різні ділянки глобальної мережі Internet. Маршрутизатори виконують роль поштових підстанцій, приймаючи рішення про те, куди направляти інформацію. Робота маршрутизаторів регламентується певними правилами, які називають протоколами передачі даних.

Треба відзначити, що поряд із суттєвими перевагами користування Internet виникає і низка проблем і чи не найбільшою з них стає утруднена можливість знайти те, що саме потрібно користувачу. Колосальна кількість найрізноманітніших інформаційних ресурсів, доступних в діалоговому режимі, потребує спеціальних засобів їхнього пошуку в мережі Internet. Справжнім проривом користувача до інформаційних ресурсів Internet стало створення Web-технологій.

Web-технології базуються на ідеї гіпертексту – звичного тексту, який містить посилання як на власні фрагменти, так і на інші тексти. У мережі Internet взаємопов'язані тексти можна розташовувати на різних віддалених територіально комп'ютерах, а створювати і редагувати їх можуть різні люди. Таке «павутиння» взаємопов'язаних текстів становить гігантське інформаційне сховище.

Web-технологія, або WWW (World Wide Web – «всесвітня павутина») – це розподілена мережева гіпертекстова система, побудована на моделі «клієнт-сервер». На, так званих, Web-серверах у виді гіпертекстових документів зберігається інформація, яку запитують, отримують і відображають Web-клієнти. Механізм, за яким встановлюється з'єднання між клієнтом і сервером, а також процедура запиту і передачі інформації визначає протокол передачі гіпертексту (Hyper Text Transfer Protokol, HTTP). Інформація на Web-сторінках зберігається у виді Web-документів, – файлів з розміткою HTML (Hyper Text Markup Language – мова гіпертекстової розмітки). Цей формат, зокрема, визначає зовнішній вид документа, взаємне розташування текстової, графічної, мультимедійної інформації. Внесення змін на Web-сторінку здійснюється будь-яким текстовим редактором, а основною перевагою HTML-документів є їх здатність містити перехресні посилання один на одного, що робить WWW єдиною інформаційною системою. Перехресні посилання надають можливість користувачеві швидко звернутися до документу з необхідною додатковою інформацією, а потім продовжити роботу з основним текстом. Відображаючи Web-сторінки на екрані комп'ютера, перехресні посилання виділяють іншим кольором або підкресленням. Посиланням може бути будь-яке зображення або звуковий фрагмент.

Для адресації Web-документів використовують універсальний ідентифікатор документів (Uniform Resource Locator, URL), що визначає протокол доступу до документу, ім’я чи адресу сервера та зону, що містить цю Web-сторінку, а також розташування документів на Web-сервері. У загальному випадку URL має вид:

Protocol://www.server.name/directory/subdirectory/file.htm/,

де Protocol – протокол доступу до документа (найчастіше http);

http://www.server.name – ім’я www-сервера;

directory/subdirectory – місце документа в структурі web-сервера;

file.htm – ім’я HTML-файлу, що містить Web-документ.

Конкретним прикладом є http://www.microsoft.com/isapi.

Для навігації в мережі Internet використовують browser (огляд), наприклад, Internet Explorer.

В мережі Internet існує величезна кількість інформації, більша частина якої організована невпорядковано та розподілена між багатьма сайтами. Значна кількість організацій (в тому числі й офіційних) розташовує нормативну інформацію на власних сайтах. Тому для ефективного пошуку інформації в мережі Internet існують спеціальні сайти, які називають ***пошуковими системами***. Вони використовують пошукових роботів для збору інформації з сайтів та подальшої ефективної обробки за системою, аналогічною до побудови індексу цитування наукової літератури.

На нинішній стадії розвитку мережі Internet безкоштовні наукові ресурси за ступенем їхньої доступності умовно можна поділити на дві частини. Одна частина – документи, відкриті для всіх і відомі пошуковим системам. Інша – так званий схований Internet (hidden Internet): бази даних, що мають свої власні пошукові програми і їх сайти працюють тільки із зареєстрованими користувачами. Пошукові системи не мають відомостей про кожний з документів схованого Internet, але містять адреси пунктів доступу до них.

Пошукова система – це комплекс програм, баз даних та інструментів, призначених для збору інформації в Internet про наявні документи, і для знаходження потрібних документів за ознаками користувача. Предмет пошуку формулюється одним або двома ключовими словами, якими є іменники в називному відмінку (може бути іменник з прикметником). Великий обсяг інформації, отриманої в результаті пошуку, задовольнить користувача лише тоді, коли пошукова програма здатна високоякісно реагувати на виявлені документи за ступенем їхньої відповідності запиту.

Основними пошуковими системами на даний час є:

http://www.google.com

http://www.yandex.ru

При цьому лідером є пошукова система Google, яка здатна знаходити інформацію із запитів, написаних латиницею і кирилицею, а користувач за своїм бажанням із сотні варіантів може вибрати найбільш зручну для нього мову інтерфейсу програми. Відповідно до підходу Google, чим більше посилань спрямовано на дану Web-сторінку, тим вона є авторитетнішою, тим вище її ранг і тим вона більш цінна для користувача. Як показує практика, таке врахування досить плідне, і в списках результатів пошукової системи Google потрібні документи самі дійсно виявляються на перших місцях.

Для проведення складного пошуку на головній сторінці в Google можна натиснути на посилання «Складний пошук». При цьому користувач має право обрати наступні критерії для фільтрації результатів пошуку:

1. За наявності інформації (з усіма словами, з точною фразою, з одним зі слів з набору).

2. Вказувати частину сторінки, де згадується інформація, вказана в запиті (в заголовку, в тексті, в URL, серед посилань на сторінку).

3. Без наявності інформації (без слів).

4. Сторінки на певній мові.

5. Сторінки з сайтів у певній країні.

6. Файли певного формату (дуже зручно для пошуку наукових статей або презентацій).

7. Повертати сторінки виключно з певного домену (сайту).

8. Знаходити сторінки з посиланнями на вказану сторінку.

За допомогою такого інструменту можна віднайти саме потрібну інформацію. При виконанні запиту за допомогою складного пошуку всі внесені критерії пошуку трансформуються в єдину строку з певними префіксами (наприклад, точна фраза трансформується в лапки навколо фрази, перед назвою сайту, на якому шукати, додається слово site:, а для пошуку визначеного типу файлу додається префікс filetype:).

Щодо другої пошукової системи Yandex. Її специфікою є спрямованість на російськомовну частину мережі Internet та розширений пошук синонімів для запитів російською мовою. В цій системі передбачений також розвинений пошук.

Щоб оволодіти методами пошуку інформації необхідно:

1. Використовувати різні системи пошуку інформації (Google, META, Яндекс, Rambler, Yahoo! та інші). Перевагу радимо надавати Google, а також спеціальним системам пошуку наукової інформації:

Google Академія – http://scholar.google.com.ua/
Scirus – http://www.scirus.com/srsapp/
Flexum – http://science.flexum.ru/

Під час пошуку формулювати запити на основі ключових слів, проглядати значну кількість матеріалів, не обмежуватися першими у списку вибірки. Пам'ятайте найпопулярнішими в мережі є реферати, а наукові статті із збірників ви знайдете, якщо будете ретельно шукати (доведеться витратити час).

2. Навчитись користуватися інтернет-каталогами (таблиця 1.3). Робота з ними також вимагає вправності, але якщо ви правильно сформулюєте запит, то зможете укласти пристойний список джерел. Далі знаючи вже імена дослідників та назви їх робіт ви зможете звертатися у бібліотеки, шукати якщо не самі книжки, то цитати з них у інших роботах.

Таблиця 1.3 – Сайти інтернет-каталогів

| Сайт | Адреса |
|---|---|
| 1. Електронні каталоги України та Росії | http://www.e-catalog.name/cgi-bin/irbis64r_61/cgiirbis_64.exe |
| 2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського | http://www.nbuv.gov.ua/ |
| 3. Парламентська бібліотека України | http://ukrlibrary.org/book.htm |
| 4. Бібліотека імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка | http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/title4.php3 |
| 5. Науково-технічна бібліотека Київського національного університету технологій та дизайну | http://biblio.co.ua/ecatalog |
| 6. Електронна бібліотека авторефератів | http://www.nbuv.gov.ua/eb/ard.html |
| 7. Довідник журналів відкритого доступу – Directory of Open Access Journals (DOAJ) | https://doaj.org/ |
| 8. УкрПатент | http://www.ukrpatent.org/ |
| 9. Наука, прямий пошук | http://www.sciencedirect.com/science/search |
| 10. Пошук журнальних статей, книжок, стандартів тощо | http://search.crossref.org/ |
| 11. Світовий каталог | http://worldcat.org/ |
| 12. Журнали бази даних Індекс Коперник | http://journals.indexcopernicus.com/ |
| 13. Державна публічна науково-технічна бібліотека Росії | http://library.gpntb.ru/cgi/irbis64r/62/cgiirbis_64.exe |
| 14. Російська наукова бібліотека | http://www.nlr.ru:8101/poisk/index.html |

На офіційному сайті державної організації «УкрПатент» розташована актуальна інформація, зокрема:

1. Що таке винахід?
2. Як отримати патент на винахід.
3. Поділ заявки на винахід і заявки на корисну модель.
4. Як подати міжнародну заявку на винахід і корисну модель.
5. Нормативно-правові акти.
6. Державне мито та збори.
7. Форми бланків офіційних документів.
8. Державні стандарти України в галузі патентної інформації.

Одним з інформаційних продуктів, що надається даною організацією, є опис до патенту (деклараційного патенту) на винахід (корисну модель), що є вичерпним джерелом інформації стосовно винаходу (корисної моделі). Даний опис містить бібліографічні дані, власне опис, формулу винаходу (корисної моделі), а також креслення, на які існують посилання в описі. Опис розкриває суть винаходу (корисної моделі) та підтверджує обсяг правової охорони, визначений формулою винаходу (корисної моделі).

З 2005 р. одночасно з публікацією офіційного бюлетеня здійснюється електронне видання описів – національний CD-ROM «Винаходи в Україні», в якому розміщуються повні відомості про зареєстровані патенти (деклараційні патенти) на винаходи (корисні моделі) у виді структурованої інформації: бібліографічні дані, реферат, формула та текст опису винаходу (корисної моделі). В даний час в організації відбувається переведення в електронну форму (сканування) патентної інформації з усіх паперових носіїв до внутрішньої бази даних, що на даний момент перевищує об’єм 2 терабайти.

На нашу думку, найбільшу цінність для дисертантів (магістрів, аспірантів, докторантів, здобувачів тощо) становлять електронні копії авторефератів дисертацій, що знаходиться за адресою http://www.nbuv.gov.ua/eb/ard.html. Якщо ж адреса сторінки зміниться, то її нову адресу можна буде знайти за пошуком по сайту за словом «автореферат». На сторінці розташований пошук в електронній бібліотеці авторефератів з можливістю завантаження електронної копії автореферату з сайту.

Для оволодіння методами користування пошуковими системами необхідно звернутись до спеціальної літератури.

### 1.7 Оцінка роботи дослідника

Одним з ключових показників, який широко застосовується в усьому світі для оцінки роботи дослідників та наукових колективів є індекс цитування (ІЦ) – найоб’єктивніший з усіх доступних нам на даний час показників успішності професійної діяльності науковця. Незважаючи на це, його не можна вважати абсолютним показником наукового рівня вченого. Використовувати ІЦ потрібно дуже обережно, особливо для порівняння досягнень вчених різних галузей діяльності.

До недоліків ІЦ можна віднести те, що він деяким чином залежить від популярності вибраної автором теми роботи, так як актуальні проблеми привертають більшу увагу; популярності самого вченого, його активності під час проведення різних заходів, ширини кола спілкування; невизначеності ролі співавторів у колективних роботах, особливо там, де не додержуються принципів зазначення авторів у порядку зменшення їх внеску у роботу; підвищення свого ІЦ автором шляхом зловживання самоцитуванням. Також потрібно зауважити, що на об’єктивність визначення ІЦ впливає той факт, що інколи прізвище одного і того ж автора пишеться по-різному в різних статтях, або навпаки, прізвища та ініціали різних авторів абсолютно співпадають.

Для орієнтовного визначення внеску дослідника у галузь користуються *h*-індексом, або індексом Хірша[13] (Гірша), як показника впливовості науковця, колективу науковців, наукового закладу або наукового журналу, який заснований на кількості публікацій та їх цитуваннях. Індекс Гірша був запропонований американським фізиком Хорхе Гіршем в 2005 році, який показує положення автора серед інших авторів у галузі й означає кількість статей, які цитувались не менше цієї кількість разів. Для різних галузей досліджень ІЦ може відрізнятись на порядки. Так, у біомедичних науках сьогодні найвищі значення ІЦ тому, що ця галузь бурхливо розвивається, а у гуманітарних науках відкриття відбуваються дуже рідко.

Для оцінки впливу вченого або наукового закладу на світову науку, для кількісного визначення проведених наукових досліджень використовують статистичні дані вказівників *Science Citation Index* (SCI) та *Journal Citation Reports* (JCR), що випускаються американським закладом *Institute for Scientific Information* (ISI). Індекс цитування та його Internet версія (http://thomsonreuters.com/products_services/scientific/Web_of_Science) містить бібліографічний опис усіх статей з опрацьованих наукових журналів та відображає публікації за фундаментальними розділами науки у провідних міжнародних та національних журналах.

---

[13] *h*-індекс науковця дорівнює *h* якщо він є автором *h* публікацій, кожна з яких була процитована щонайменше *h* разів. Наприклад, якщо науковець є автором 5 публікацій, 3 з яких процитовано по 3 рази, а інші 2 – по 1 разу, то його *h*-індекс дорівнює 3.

Покажчик цитованості журналу за вказівником JCR визначає інформаційну значимість кожного журналу. На сьогоднішній день визнано, що фактор впливу[14] (імпакт-фактор) журналу є одним з формальних критеріїв, за яким можна порівнювати рівень наукових досліджень у споріднених галузях знань. При присудженні грантів, висуненні на наукові премії експерти обов’язково звертають увагу на наявність у пошукачів публікацій в журналах за версією JCR.

Отже, імпакт-фактор є мірою, що визначає частоту, з якою цитується типова стаття з даного журналу. Використання імпакт-фактору в якості критерію для оцінки журналу ґрунтується на припущенні: журнал, що публікує значну кількість статей, на які активно посилаються інші вчені, заслуговує на особливу увагу. При цьому мається на увазі, що чим вище значення імпакт-фактора, тим вище наукова цінність, авторитетність журналу.

Перелік журналів з найвищим імпакт-фактором за версією JCR можна знайти за адресою http://www.sciencegateway.org/rank/index.html. Також на сайті можна знайти зведену статистичну інформацію за країнами.

Перелік журналів, що використовуються *Institute for Scientific Information* для розрахунку індексу JCR можна знайти за адресою http://www. thomsonscientific.com/cgi-bin/jrnlst/jlresults.cgi?PC=K.

Проте, використання індексу JCR має певні особливості:

• в JCR індексуються переважно англомовні журнали, а це призводить до штучного зменшення кількості та імпакт-фактору україно- та російськомовних журналів. До обліку потрапляють журнали, що подають, щонайменш, бібліографію та перелік літератури англійською мовою;

• на включення журналу до переліку впливають як його якість, так і відповідність світовим стандартам: регулярність виходу, наявність бібліографії, термін проходження від подання статті до її публікації. Цитованість також залежить від наявності та доступності повнотекстових електронних версій журналів;

• на індекс цитування також впливають особливості наукового розвитку в різних галузях, що яскраво відображається для певних ділянок суспільних та гуманітарних наук.

Тому в Україні розроблено сайт «Український індекс наукового цитування» (http://uincit.uran.ua). Основною функцією сайту є надання можливостей аналізу загальних тенденцій розвитку наукового комплексу України, ролі і місця окремих учених та установ у розвитку національних наукових шкіл.

[14] Імпакт-фактор наукового видання є відношення кількості посилань на статті у журналі, видані за певний проміжок часу, до загальної кількості статей, надрукованих у журналі за цей період.

В Росії існує власний індекс цитування (http://e-library.ru/projects/citation/cit_index.asp). Розміщена в базі інформація доступна для зареєстрованих користувачів, проте на сайті існує реєстрація для сторонніх користувачів. Також в системі є велика кількість повних текстів статей більш ніж з 4 тисяч журналів.

**Запитання і завдання для самоконтролю**

1 Який зміст і послідовність виконання НДР студентами?
2 Розкрийте організацію, планування і контроль роботи аспіранта.
3 Застосування результатів виконаних НДР студентами, магістрами і аспірантами у науковому процесі.
4 Дайте характеристику організації і управління наукою в Україні.
5 Як організована підготовка кадрів в Україні?
6 Приведіть освітньо-кваліфікаційні рівні підготовки наукових кадрів в Україні.
7 Як ведеться підготовка наукових кадрів в Україні через магістратуру, аспірантуру і докторантуру?
8 Як Ви розумієте поняття «об'єкт» та «предмет» дослідження.
9 Визначте поняття «проблема» у наукових дослідженнях і дайте йому обґрунтування.
10 Чим обумовлюється вибір проблеми дослідження та тем, що формують проблему?
11 Що Ви розумієте під темою дослідження та їх поділом на теоретичні, методологічні та організаційні?
12 В чому зміст обґрунтування теми дослідження, її актуальність?
13 Які критерії наукової новизни теми дослідження?
14 Чим визначається практична значущість теми дослідження?
15 Чому необхідно у заголовок теми дослідження включати динамічний розвиток наукових знань?
16 Який зміст плану дослідження теми та характеристика його структури (розділи, підрозділи, пункти, підпункти)?
17 Що таке бібліографія і яке її призначення у дослідженнях?
18 Які відомі Вам бібліографічні джерела технічної інформації та їх класифікація?
19 Наведіть характеристику бібліографічних показників технічної літератури.
20 Зміст і завдання бібліографічного запису, реферату, бібліографічного видання.
21 Зміст і призначення інформаційно-пошукових мов бібліографічних фондів.
22 Розкрийте структуру універсальної десяткової класифікації (УДК) і порядок її застосування.
23 Яка структура бібліотечно-бібліографічної класифікації (ББК) і порядок її застосування.
24 Висвітліть порядок застосування вихідних даних бібліографічних джерел у науковому дослідженні.
25 Які основні джерела наукової інформації Вам відомі?
26 Назвіть складові бібліографічного покажчика SCI та охарактеризуйте їх структуру.
27 Які пошукові системи Інтернету Вам відомі?
28 Яку технічну літературу можна знайти в Інтернеті?

# 2 ТВОРЧА РОБОТА У СФЕРІ ВИРОБНИЦТВА

Творча діяльність, що зародилась в далекому минулому, привела до створення парової машини, ЕОМ, штучного серця і багато іншого, чого не могли собі уявити люди, які жили навіть на початку минулого сторіччя. Внаслідок творчої діяльності досягнені вражаючі успіхи в розвитку науки, які має людство на початку 21 сторіччя.

В принципі будь-яка праця є творчою, тобто діяльністю, в результаті якої дещо створюється. Однак під час праці у ряді випадків створюються вироби подібні раніше існуючим, при цьому з використанням способів і засобів уже відомих, тобто створюються по шаблону, що існує. Це характерно для праці ремісника, кустаря.

В інших випадках працею створюється щось нове, з іншими характеристиками властивостей і якостей чи з використанням інших способів і засобів, які поліпшують техніко-економічні показники процесу виготовлення предмету праці чи інші характеристики результатів праці. Вони свідчать про творчу працю – «творчість» у високому розумінні цього слова. В даному випадку під творчістю розуміється така діяльність, така створювальна праця, яка містить елементи аналізу технологічного процесу, як об’єкта праці, оцінку способів і засобів, що підвищують результативність праці, якість створюваних виробів, приводить до нових предметів виробництва чи їх різновидності. В основі такої творчої праці лежить значна доля енергії думки виконавця. Саме така творча праця розуміється під виразом «інженерна діяльність».

Активний розвиток в останнє сторіччя отримала науково-технічна творчість, яка явно відбилось у промисловій сфері виробничої діяльності. Це привело до підвищення якісних показників різних виробів, що виготовляються фабриками, заводами та іншими виробництвами. Чітко визначилась закономірність у взаємозв’язку розвитку науки, техніки і технології виробництва, удосконалення і створення нових технологій. Розвиток за всіма трьома напрямками характеризується експоненціальними кривими росту (рисунок 2.1).

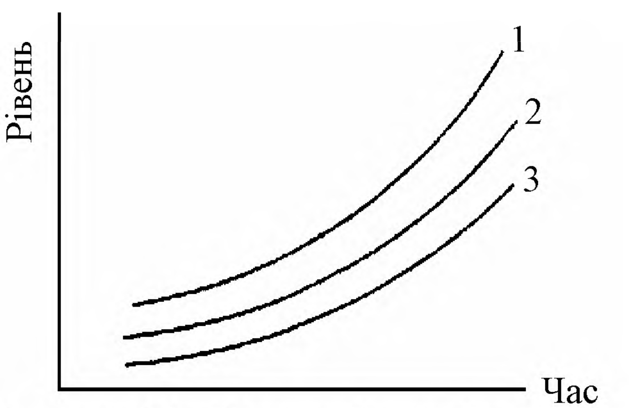


Рисунок 2.1 – **Закономірності розвитку:** 1 – науки, 2 – техніки, 3 – виробництва

Розвиток науки і техніки є тією причиною, яка визначила потребу в спеціалістах з вищою технічною освітою – підготовку для промисловості інженерних кадрів. Вони покликані вирішувати творчі виробничі задачі на рівні, що відповідає сучасним досягненням у розвитку науки і техніки. Основу їх діяльності, в принципі, складають *проектні задачі*, тобто такі задачі, які мають науково-дослідний характер. Вирішуючи їх для досягнення поставленої мати, інженер шукає, обґрунтовує і вибирає найкращі способи їх вирішення. Таким чином, діяльність інженерних кадрів, як творчих працівників, пов’язана з розвитком у них розумових здібностей, оволодінням основами методології творчої діяльності.

## 2.1 Об’єкт і предмет творчої діяльності та їх основні напрямки у виробничій сфері

Оскільки в промисловій сфері основним предметом творчості є продукт виробництва, зусилля спеціалістів направлені на забезпечення його високої якості, яка відбиває рівень технології, що складається з чергування окремих процесів і операцій, тобто відображається об’єктом творчої діяльності. Технологія виробництва і промислові вироби є основними об’єктами і предметами творчої діяльності. В промисловій сфері виробництва взагалі, творча діяльність здійснюється в трьох основних напрямках (рисунок 2.2): вдосконалення продукту виробництва, процесу його конструювання і процесу виготовлення (технології).


Рисунок 2.2 – **Творча діяльність у промисловій сфері**

Творчі роботи в цих напрямках тісно взаємопов’язані: роботи з підвищення якісних показників продукту виробництва (напрямок 1) зв’язані з вирішенням задач 2 і 3 напрямків (конструкторських і технологічних). З іншого боку, робота з вдосконалення технології виготовлення продукту виробництва (наприклад завдяки використанню нових ефективних засобів), звичайно визначає і задачі зі зміни конструкції продукту виробництва. Виготовлення виробів з використанням нових матеріалів, як правило, визначає творчі задачі у всіх трьох напрямках. Можна привести багато прикладів, що підтверджують взаємозв'язок творчої діяльності у вказаних напрямках творчості.

В полі зору фахівців знаходиться як сам продукт виробництва, так і все, що пов'язано з його виробництвом: це сировина і хімічні матеріали, за допомогою яких вона перетворюється в готовий виріб, методи виконання виробничих процесів та операцій, засоби їх виконання, аналіз умов експлуатації з врахуванням користувачів виробів тощо. Тому для вирішення загальної задачі з удосконалення продукту виробництва вирішуються і частинні взаємопов'язані задачі; визначається їх вагомість, умови і засоби вирішення поставлених задач.

Так, вирішуючи задачу з підвищення надійності виробу під час його використання (експлуатації споживачем), для виготовлення виробу із застосуванням нових матеріалів, необхідно вирішувати задачу з випробовування цих матеріалів, їх впливу на технологію виготовлення виробу, встановленню параметрів їх обробки під час розробки нової чи вдосконалення діючої технології.

Для підвищення техніко-економічних показників виробничого процесу, вдосконалення технології виготовлення виробів в умовах промислового виробництва також важливий аналіз вагомості всіх факторів, що впливають на вирішення даної загальної задачі та визначення взаємопов'язаних частин задачі. Творча робота з удосконалення технології виробництва може бути виконаною, наприклад, за рахунок використання нових наукових розробок в даній сфері виробництва; впровадження нових сучасних технологічних засобів чи за рахунок можливого використання наукових розробок в суміжних галузях техніки.

Таким чином, під об'єктом творчості будемо розуміти технологічний процес виготовлення виробів, використовувані засоби виробництва, тобто все те, що має знаходитись у сфері творчої роботи, направлене на вирішення конкретної задачі з підвищення ефективності даного виробництва, а результат  чергування процесів і операцій – сам виріб є предметом виробництва.

## 2.2 Фактори, що спонукають до творчої діяльності

Всі вироби, створені людиною, з'явились внаслідок задоволення необхідності в них, що виникла. Будь-який виріб створюється з якоюсь метою – для виконання певної роботи і має свою функцію призначення.

Необхідно відмітити, що «функція» взагалі як обов'язок, робота і «функція призначення» є різними поняттями.

Під *функцією призначення* розуміється та робота, обов'язок, завдяки якій був створений виріб. Функцією призначення виробу обумовлені ті вимоги, яким має відповідати виріб – вимоги до його якості. Звичайно це вимога корисності виробу, вимога до зручності його використання і вимога надійності. Конкретизація цих основних вимог залежить від особливостей умов використання виробу. З їх зміною відбувається уточнення не тільки основних вимог, але й додаткових, наприклад естетичних.

Внаслідок конкретизації вимог і змін, що відбуваються в умовах використання виробу, виникає необхідність в його удосконаленні. На цей процес впливає як розвиток технології виготовлення виробу, так і використання нових матеріалів та інші фактори. Це добре можна прослідкувати на прикладі виготовлення шкіряного напівфабрикату. Первісно шкури тварин використовували після простої механічної обробки як засіб захисту від холоду. Потім для їх обробки стали використовувати листя і кору дуба, дубильні матеріали інших рослин. Такі технології обробки мали значну тривалість. В наш час тривалість обробки значно скоротилась, розширився асортимент і сфера використання (меблеві та автомобільні шкіри), а юхта взуттєва замінена гідрофобними шкірами хромового дублення з високим ступенем водонепроникності.

Основним фактором, що спонукає творчу діяльність в промисловій сфері виробництва в умовах ринкової економіки є необхідність в удосконаленні продукту виробництва. Вона визначена закономірним процесом еволюційного розвитку виробу, що відбувається в умовах його створення і використання, підвищенням вимог до його якості, розвитком техніки виробництва тощо.

Необхідність як спонукач творчості реалізується в діяльності різного виду й у різній формі. У промисловому виробництві вона реалізується під час вирішення творчих задач з удосконалення виробів – продукту виробництва, а також у вирішенні інших задач, які поєднані з вдосконаленням продукту виробництва.

В інших сферах діяльності спонукачем творчості є прагнення пізнати закономірності ходу процесів і факторів, що впливають на зміни в функціонуванні об'єктів. Суттєву роль серед факторів, що спонукають до творчої діяльності є індивідуальні творчі якості інженерно-технічних робітників і відповідне спрямування їх діяльності (рисунок 2.3).

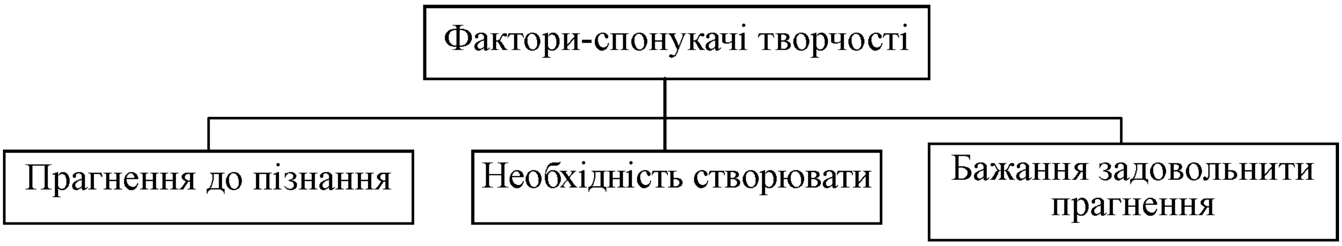



Рисунок 2.3 – **Спонукачі творчої діяльності**

Таким чином, до факторів-спонукачів творчої діяльності можна віднести:

–необхідність в удосконаленні якого-небудь об’єкта чи в створенні будь-чого нового;

– прагнення пізнати (виявити) відповідні закономірності, визначити характерні ознаки процесів, предметів тощо;

– бажання задовольнити прагнення, що виникають під час роботи самого інженера-дослідника.

## 2.3 Види творчої діяльності та способи вирішення творчих задач

Творча діяльність сучасної людини дуже різнобічна, в тому числі і в сфері промислового виробництва. Вона різниця і за направленістю, і за змістом, і за іншими характеристиками (рисунок 2.4). Вагому долю творчої діяльності у сфері промислового виробництва складає технічна творчість. Вона являє собою створення нових модифікацій об’єктів, їх технічних рішень на основі використання відомих закономірностей. Вони звичайно приводять до появи раціоналізаторських пропозицій, невеликих винаходів.

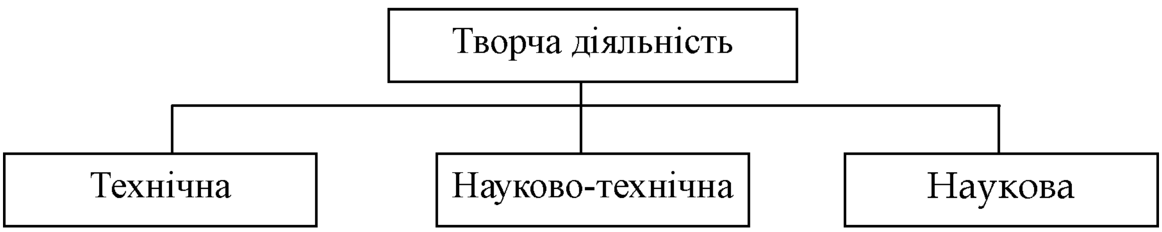



Рисунок 2.4 – **Види творчої діяльності**

З розвитком науки і техніки сформувалась творча діяльність, що називається *науково-технічною*. Для цього виду творчості характерним є галузеві дослідження, внаслідок яких встановлюються важливі для промислового виробництва закономірності (положення, принципи), визначаються оптимальні технічні рішення.

Внаслідок розвитку науково-технічної творчості формуються і розвиваються технічні науки. Теоретичною основою розвитку технічних наук і науково-технічної творчості є фундаментальні науки.

Найвищим рівнем творчості відмічається наукова творчість, направлена на пізнання закономірностей розвитку природи, суспільства, мислення. Всім добре відомі досягнення в розвитку природознавства – науки про явища природи, фізики, хімії, біології, геології, астрономії тощо. Процес пізнання явищ природи складається з наступних послідовних етапів: спостереження явищ, експеримент, порівняння, аналіз і синтез, логічний висновок, узагальнення, розробка наукової гіпотези.

Різні мета і задачі, які характеризують той чи інший вид творчої діяльності, визначають обсяг роботи, її зміст, необхідну підготовленість (кваліфікацію) виконавців і багато іншого.

Розвиток творчої діяльності увійшов у практику спочатку з використанням малоефективного методу вирішення творчих задач, відомого під назвою методу *проб і помилок*. Цей метод на стадії попереднього експерименту використовується і в теперішній час. Суть метода полягає у використанні попередньої інформації та постановки можливих варіантів вирішення задачі.

Досвід у вирішенні творчих задач привів до появи ряду пропозицій з удосконалення методів творчої діяльності. Рекомендовано значну кількість методів стимулювання творчості. В теперішній час виділяють дві характерні їх групи: евристичні і комп'ютерні (рисунок 2.5).

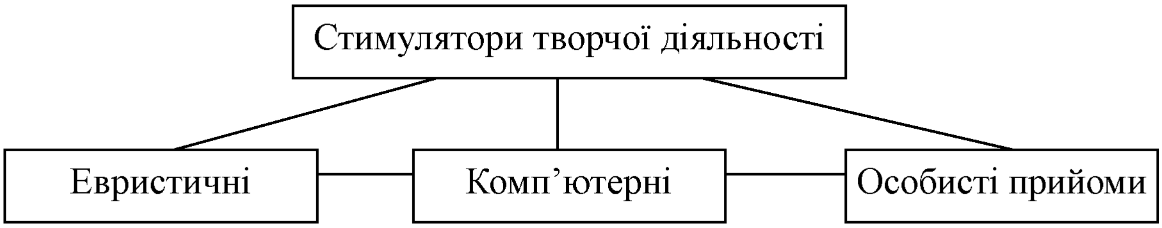



Рисунок 2.5 – **Методи стимулювання творчості**

Методи першої групи почали створюватись ще за давніх-давен. Нині відомі десятки евристичних методів. Серед них методи: морфологічного аналізу, контрольних питань, мозковий штурм та ін. За допомогою евристичних методів вирішують багато задач технічної творчості.

В основу комп’ютерних методів закладено використання ЕОМ, що дозволяє оперувати значною базою експериментальних даних з використанням стандартного програмного забезпечення і суттєво прискорює отримання бажаного результату. В наш час відомо десятки варіантів таких методів. За їх допомогою вирішуються задачі пошукового проектування та інші. Користуючись загальними положеннями і рекомендаціями, кожний творчий працівник, розвиває здібності творчо мислити, відпрацьовує свої прийоми і методи вирішення задач в сфері своєї професійної діяльності. Творити нове – отже створювати і нові прийоми і методи вирішення з врахуванням свого науково-дослідного досвіду.

Складність вирішення творчих задач залежить не тільки від мети, яка визначила її постановку. Навіть під час вирішення задач, які відносяться до одного виду творчості (технічному, науково-технічному чи науковому) вимагаються від дослідника як різні методи їх вирішення, так і різні знання, які необхідні для вирішення конкретної творчої задачі. Наприклад, для вдосконалення і проектування фізико-хімічних технологічних процесів необхідні хороші знання з хімії загальної, аналітичної, колоїдної, фізико-хімії протеїнів тощо. В інших випадках дослідник має мати певні знання з технічної естетики.

Різний підхід має місце і для розробки методики експеримен-тальних робіт. Різнобічні і методи логіко-аналітичного пошуку необхідних рішень, методи математичного аналізу тощо.

Творчі інженерні задачі, включаючи проектні, за складністю їх вирішення можна поділити на три характерні групи (рисунок 2.6). До першої групи можна віднести задачі, пов’язані в основному з виконанням робіт, що відносяться до технічної творчості. Це, звичайно, порівняно нескладні задачі. Їх вирішують з використанням відомих методів. Вирішення задач другої групи пов’язано з аналізом різних методів і засобів, оцінкою і вибором оптимальних варіантів рішення, з врахуванням конкретних вихідних даних.

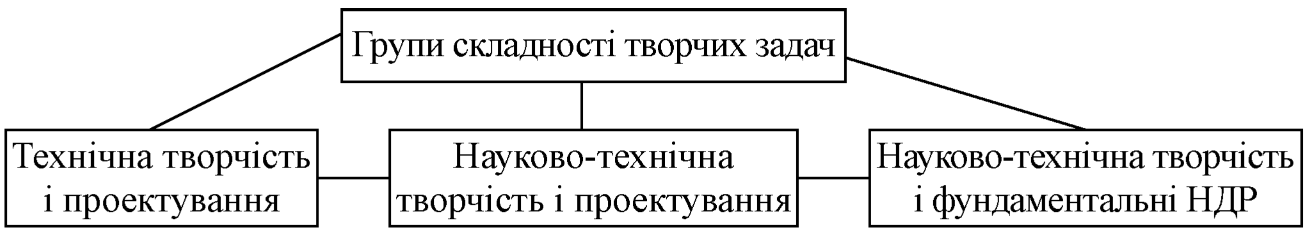



Рисунок 2.6 – **Характерні групи складності інженерних задач**

Найтрудомісткішими є творчі задачі третьої групи складності. Для цих задач нема розроблених методів і засобів їх вирішення, вимагається розробка плану робіт, які забезпечать вирішення поставленої задачі. Для них характерним є ретельний аналіз об’єкта творчості з метою розкриття тих факторів, які визначають його суть, виконувану ним роботу (функцію) тощо. Робота з вирішення задач третьої групи складності відноситься до науково-технічної творчості. Ця творча діяльність високого рівня включає роботи, що називаються науково-дослідними роботами галузевого значення.

## 2.4 Підвищення наукового рівня творчої діяльності та виконання науково-дослідної роботи

Підготовка інженерних кадрів чинить суттєвий вплив на творчу діяльність в промисловій сфері виробництва. Виріс науковий рівень у вирішенні творчих задач. Якщо до організації масового промислового виробництва виробів легкої промисловості (в першій половині XX століття) вирішення творчих задач проходило на рівні задач з технічної творчості, то з початком підготовки інженерних кадрів для промисловості, а потім і наукових багато творчих робіт стали серйозними науковими дослідженнями, виконаними на сучасному рівні розвитку науки і техніки. Внаслідок цих науково-дослідних робіт отримали розвиток і технічні науки різних галузей виробництва. Розвиток науково-технічної творчості супроводжується підвищенням якісного рівня НДР.

В творчості різних сфер діяльності пройдений значний шлях в розвитку методології наукових досліджень. Крім параметричного опису об’єкта і предмету дослідження, їх властивостей на основі спостережень, важлива роль належить морфологічному опису об’єкта і предмета (визначення функціональної залежності між їх елементами). Важлива роль належить розгляду об’єкта і предмета як цілісної системи, що функціонує в певному середовищі, визначення їх повної характеристики, стану, поведінки, роботи тощо (рисунок 2.7).

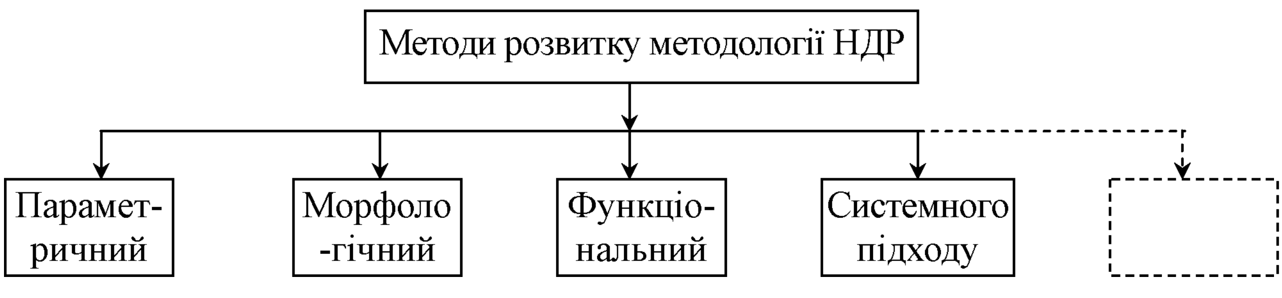



Рисунок 2.7 – **Розвиток методології НДР**

Пізнання і розвиток методів і засобів, що використовуються під час проведення досліджень – безперервні, тому що це результат розвитку науки і техніки. В теперішній час творчі роботи, що називаються науково-дослідними, є роботами високого рівня. Вони мають розроблену, яка постійно розвивається методологічну основу і займають видне місце у всіх сферах творчої діяльності, в тому числі у сфері промислового виробництва, де складають основу науково-технічної творчості.

НДР направлені на вивчення різних об’єктів – процесів і явищ. Основна мета їх виконання зводиться до встановлення закономірностей та інших характеристик процесу, що вивчається, як об’єкта для використання їх в різних сферах діяльності. Під час дослідження виходять із того, що:

– всі процеси є багатофакторними і в більшості випадків, особливо в технології обробки шкіри чи хутра – багатостадійні;

– визначення факторів і оцінка їх впливу за вагомістю на об’єкт, що вивчається – суть дослідження;

– аналіз факторів визначається конкретною метою і задачами дослідження і передбачуваною сферою використання отриманих результатів;

– для будь-якої НДР важливою є теоретична її частина, навіть якщо вона базується на результатах експерименту; при цьому необхідно обґрунтувати експеримент, його методологію, зміст, обсяг тощо.

Під час наукового дослідження вивчається вплив на об’єкт дослідження різних факторів, їх зв’язок з метою отримання даних, корисних для практики, розвитку науки. При цьому використовуються методи теоретичних і експериментальних досліджень (загальні та часткові). Як загальний широко використовується математичний метод дослідження – метод кількісного вивчення об’єкта дослідження.

Важлива роль в теоретичних дослідженнях належить методам аналізу і синтезу. В різних областях творчої діяльності використовуються різні методи дослідження як загальні, так і часткові.

Отже, технічна діяльність в умовах промислового виробництва стосується ряду аспектів еволюції вдосконалення чи створення нової технології (рисунок 2.8).

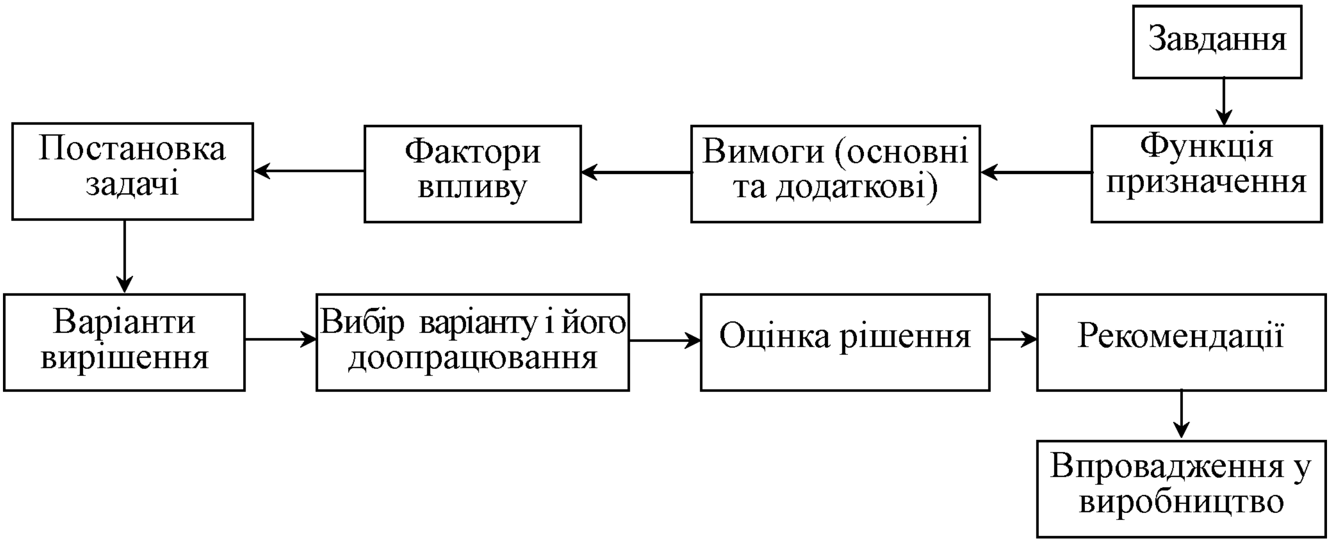



Рисунок 2.8 – **Послідовність дій у технічній творчості**

Сучасна підготовка інженерних і наукових кадрів для роботи в сфері промислового виробництва ефективно впливає на розвиток технічної творчості, формує та стимулює науково-технічну творчість і розвиток технічних наук.

Ефективність роботи з науково-технічної творчості забезпечується розвитком методології наукових досліджень, теоретичних і емпіричних методів виконання дослідної роботи.

**Запитання і завдання для самоконтролю**

1 Що ви розумієте під поняттям «творчість»?
2 Яка закономірність розвитку науки, техніки, виробництва?
3 Які задачі покликані вирішувати інженерні кадри?
4 Назвіть основні напрямки здійснення творчості у промисловій сфері.
5 Які фактори можна віднести до спонукачів творчої діяльності?
6 Які ви знаєте види творчої діяльності у сфері промислового виробництва?
7 Назвіть етапи процесу пізнання явищ природи.
8 Назвіть методи, що стимулюють творчість.
9 Що вивчається під час наукових досліджень?
10 Яка послідовність дій, що характерна для технічної творчості?

# 3 МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Дослідження будь-якого об'єкту фізико-хімічного перетворення полягає у встановленні відповідних залежностей між його властивостями та контрольованими факторами під час експерименту. При цьому завжди існують обмеження, які визначаються можливостями доступного обладнання, наявністю і вартістю реагентів, тривалістю дослідження, кваліфікацією спеціалістів тощо. В практичній діяльності дослідник отримує недостатню кількість експериментальних даних на основі яких необхідно робити висновки щодо властивостей досліджуваного об'єкту.

Оскільки на результати дослідів також впливають неконтрольовані фактори, то експериментальні дані, залежно від об'єкту дослідження, змінюють, в якійсь мірі, свої дійсні значення. В зв'язку з цим, виникає необхідність у дослідженні якості отриманих даних статистичними методами з використанням відповідних гіпотез. Як кінцевий результат оцінюються дійсні значення і похибка експерименту.

В подальшому отримані дані використовуються для пошуку аналітичних залежностей між досліджуваними величинами у виді статичних моделей, їх аналізу і практичного застосування для вдосконалення та розробки нових об'єктів.

## 3.1 Використання елементів теорії імовірності та математичної статистики в експерименті

Теорія імовірності вивчає специфічні закономірності, що спостерігаються у випадкових явищах, які перебігають кожного разу дещо по-іншому під час неодноразового відтворення експерименту. Методи теорії імовірності[15] дозволяють передбачити середній сумарний результат однорідних сукупностей випадкових явищ, передбачити середній результат великої кількості аналогічних дослідів, конкретний результат кожного із яких залишається невизначеним. Будь-який отриманий результат містить такі поняття, як дослід, спостереження, вимірювання, які замінюються одним поняттям – подія.

Всі події в природі поділяють на вірогідні, які обов'язково відбудуться; неможливі, які не можуть відбутися і випадкові, які займають проміжне

[15] Застосування теорії імовірності на практиці є математичною статистикою.

положення. В зв'язку з невизначеністю появи випадкової події, для її характеристики введено поняття *імовірності*, що відображає степінь достовірності. Якщо імовірність вірогідної події прийняти рівну одиниці, а неможливої – нулю, то імовірність випадкової події буде знаходитись між 0 і 1.

### 3.1.1 Класичне визначення імовірності

За класичним визначенням імовірності, якщо дослід зводиться до множини випадків, то ймовірність будь-якої події $A$ в цьому досліді може бути підрахована як відношення числа випадків сприятливих події $A$ до загальної кількості випадків:

$$p(A) = \frac{n_A}{n}, \tag{3.1}$$

де $n_A$ – кількість випадків, у яких подія $A$ зявилась;

$n$ – загальна кількість випадків,.

*Приклад* 3.1

В чорній скриньці є 7 шарів: 3 білих і 4 чорних; дослід 1 полягає в тому, що із скриньки дістають разом 2 шари, а в досліді 2 – дістають разом 3 шари. Знайти імовірність того, що в досліді 1 обидва шари будуть білими, а в досліді 2 – один білий і 2 чорні.

*Розв'язок*

Позначимо події $A_1$ і $A_2$ – відповідно обидва шари білі та один шар білий і 2 чорні. Тоді необхідно визначити $p(A_1)$ і $p(A_2)$.

Визначимо $p(A_1)$. Після привласнення кожному шару номера і поєднання їх по 2 отримаємо варіанти, що наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – **Варіанти поєднання шарів по 2**

| Шари | Варіанти | | | | | | $\Sigma_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6 | 1, 7 | 6 |
| 2 | 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6 | 2, 7 | | 5 |
| 3 | 3, 4 | 3, 5 | 3, 6 | 3, 7 | | | 4 |
| 4 | 4, 5 | 4, 6 | 4, 7 | | | | 3 |
| 5 | 5, 6 | 5, 7 | | | | | 2 |
| 6 | 6, 7 | | | | | | 1 |
| $\Sigma$ | | | | | | | 21 |

Підрахунок кількості поєднань із $k$ елементів по $m$ – $c_k^m$ проводиться за формулою:

$$c_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!},$$

де ! – факторіал для будь-якого числа, наприклад $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$.

Визначимо загальну кількість випадків $n$ за наведеною формулою для першого досліду:

$$n = c_7^2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21.$$

Кількість розрахованих поєднань, що визначені за формулою, відповідає їх кількості, які розраховані в таблиці 3.1 з розкриттям фізичної суті поєднань.

Число випадків сприятливих події $A_1$ (2 білих шари із 3):

$$n_{A_1} = c_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3.$$

Імовірність події $A_1$ визначаємо за формулою (3.1):

$$p(A_1) = \frac{n_{A_1}}{n} = \frac{3}{21} = 0{,}142857.$$

Визначимо $p(A_2)$. Варіанти поєднання шарів по 3 наведені в таблиці 3.2.

Визначимо загальну кількість випадків $n$ за наведеною формулою для досліду 2:

$$n = c_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

Таблиця 3.2 – **Варіанти поєднання шарів по 3**

| Шари | Варіанти | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 134 | 135 | 136 | 137 | 145 | 146 | 147 | 156 | 157 | 167 | 15 |
| 2 | 234 | 235 | 236 | 237 | 245 | 246 | 247 | 256 | 257 | 267 | | | | | | 10 |
| 3 | 345 | 346 | 347 | 356 | 357 | 367 | | | | | | | | | | 6 |
| 4 | 456 | 457 | 467 | | | | | | | | | | | | | 3 |
| 5 | 567 | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| $\Sigma$ | | | | | | | | | | | | | | | | 35 |

Число випадків сприятливих події $A_2$ визначаємо за правилом добутку[16] ймовірностей 1 білий із 3 і 2 чорних із 4:

$$n_{A_2} = c_3^1 \cdot c_4^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 18.$$

Визначаємо імовірність події $A_2$:

---

[16] Імовірність одночасної появи двох незалежних подій $A$ і $B$ дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто $p(A \text{ і } B) = p(A) \cdot p(B)$. Дві події $A$ і $B$ називаються незалежними якщо, наприклад, поява події $A$ не змінює імовірності появи події $B$.

$$p(A_2)=\frac{n_{A_2}}{n}=\frac{18}{35}=0{,}5142857.$$

Таким чином, імовірність одночасного діставання із скриньки, що містить 3 білих і 4 чорних шари, 2 білих та 1 білого і 2 чорних шарів відповідно дорівнює 0,142857 і 0,5142857 вказує на її підвищення в 3,6 рази у другому досліді.

### 3.1.2 Типи і характеристики випадкових величин

Фізико-хімічні дослідження характеризуються випадковими подіями, які містять числові значення, а отже є випадковими величинами. Вони бувають дискретними і неперервними. Прикладом дискретної випадкової величини може бути кількість поломок технологічного обладнання за визначений проміжок часу, а прикладом неперервної величини – температура оточуючого середовища чи швидкість руху будь-якого об'єкту.

Випадкові величини підпорядковуються *закону розподілу*, який передбачає будь-яке співвідношення, що встановлює взаємозв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Законом розподілу *дискретної випадкової величини* є набір окремих її значень і відповідних їм ймовірностей, які наводяться в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – **Задавання дискретної випадкової величини**

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_n$ |

де $n$ – кількість можливих значень $x_i$ випадкової величини $x$.

Сума імовірностей $p_i$ всіх можливих значень випадкової величини $x$ дорівнює одиниці, тобто $\sum p_i=1$.

На практиці отримані дані з дослідження дискретної випадкової величини $x$ наведені в таблиці 3.4

Таблиця 3.4 – **Експериментальні дані для отримання закону розподілу**

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | … | $n_m$ |

де $n_i$ – кількість повторень[17] (частота) значення $x_i$ випадкової величини $x$;

$m$[18] $\le n$ – кількість неповторюваних значень $x_i$.

---

[17] Якщо випадкова величина $x$ прийняла значення $x_1$ 2 рази, $x_2$ 5 раз, $x_3$ 7 раз, то по дослідженню випадкової величини $x$ проведено $n$ = (2+5+7) дослідів, і вона прийняла $m$ = 3 різних значень ($x_1$, $x_2$, $x_3$).

[18] Оскільки на практиці всі можливі значення випадкової величини $x$ не відомі.

Імовірність $p^*(x_i)$ появи значення $x_i$ випадкової величини $x$ розраховується за формулою:

$$p^*(x_i) = \frac{n_i}{n}, \tag{3.2}$$

де $p^*(x_i) = p_i^*$ – відносна частота чи статистична імовірність появи значення $x_i$ випадкової величини $x$;

$n$ – загальна кількість дослідів, що визначається як $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

За великої кількості дослідів відносна частота $p_i^*$ змінюється мало, коливаючись навколо деякого постійного числа, яке і є імовірністю $p_i$ появи значення $x_i$ випадкової величини $x$.

*Неперервна випадкова величина* і зв'язана з нею імовірність задається функцією, яка є законом її розподілу і називається диференціальною функцією розподілу $f(x)$ чи щільністю імовірності. Імовірність того, що неперервна випадкова величина $x$ прийме значення, яке належить інтервалу $(a;\ b)$ визначається за залежністю:

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

Якщо всі можливі значення $x_i$ неперервної випадкової величини $x$ належать інтервалу $(a;\ b)$, то тоді $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Функцію, яка визначає імовірність того, що випадкова величина $x$ набуває значення, яке не перебільшить значення $x_i$, називають інтегральною функцією розподілу:

$$F(x_i) = p(x < x_i). \tag{3.4}$$

З цього визначення випливає, що інтегральна функція є початковою для диференційної, тобто

$$f(x) = F'(x) \text{ або } F(x) = \int f(x)dx. \tag{3.5}$$

Для розуміння суті наведених функцій (3.3) і (3.4), а також зв'язку між ними (3.5) розглянемо приклад.

*Приклад* 3.2

Випадкові величини $x$ та $y$ наведені експериментальними функціями – диференційною та інтегральною:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0\\ 2x & \text{при} \quad 0<x\le 1\\ 0 & \text{при} \quad x>1\end{cases},\quad F\left(y\right)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad y\le -1\\ \dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{4} & \text{при} \quad -1<y\le 3\\ 1 & \text{при} \quad y>3\end{cases}.$$

Знайти імовірність того, що внаслідок випробовування випадкові величини $x$ та $y$ набудуть значень, які належать інтервалу (0,5; 1), а також випадкова величина $y$ прийме значення < –2 і < 1.

*Розв'язок*

Підставляючи замість $a$ і $b$ відповідно 0,5 і 1 та користуючись формулами (3.3) і (3.5) знаходимо, імовірність того, що внаслідок випробовування випадкові величини $x$ і $y$ набудуть значень, які належить інтервалу (0,5; 1)[19] за диференційною функцією:

та інтегральною функці<єю:

$$p(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx=\int_{0,5}^{1}2xdx=x^2\Big|_{0,5}^{1}=1^2-0,5^2=0,75$$

Користуючись формулою (3.4) знаходимо імовірність того, що випадкова

$$p(a<y<b)=F(b)-F(a)=F(1)-F(0,5)=\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}\right)\Bigg|_{y=1}-\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}\right)\Bigg|_{y=0,5}=0,125.$$

величина $y$ прийме значення, яке буде менше –2:

$$p\left(y<-2\right)=F\left(-2\right)=(0)\big|_{y=-2}=0$$

менше 1:

$$p\left(y<1\right)=F\left(1\right)=\left(\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}\right)\Bigg|_{y=1}=0,5.$$

Таким чином, імовірність того, що випадкові величини $x$ та $y$ приймуть значення з інтервалу (0,5; 1) дорівнюють відповідно 0,75 і 0,125, а також $y$ прийме значення, яке буде < –2 і < 1, відповідно, з імовірністю 0 та 0,5.

Для дослідника всі можливі (уявні) значення неперервної випадкової величини $x$ мають назву *генеральної сукупності*. На практиці отримуються дискретні значення з генеральної сукупності, які називаються *вибіркою*. Вони мають назву експериментальних даних.

*Числовими характеристиками* випадкової величини є мода, медіана, математичне очікування, дисперсія тощо.

---

[19] Шукаємо цей інтервал в аналітичних залежностях $f(x)$ та $F(y)$ з використанням відповідної формули.

*Мода* – найбільш ймовірне значення випадкової величини.

*Медіана* – середнє за розташуванням значення випадкової величини при її розташуванні за збільшенням чи зменшенням. Якщо число цих значень парне, то медіана дорівнює напівсумі двох середніх за розташуванням значень.

*Математичне очікування* $\mu(x)$[20] чи $\mu$ є середнім значенням випадкової величини $x$. Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини $x$ належать інтервалу $(a;\ b)$[21], то математичне очікування визначається за формулою:

$$\mu(x) = \int_a^b x f(x) dx, \tag{3.6}$$

а для дискретної величини (таблиця 3.3):

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{3.7}$$

або на практиці (таблиця 3.4) з врахуванням (3.2) аналогом математичного очікування $\mu$, яке отримано за фіксованою кількістю дослідів $n$, є $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i^* x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \tag{3.8}$$

де $n$ – загальна кількість дослідів, що дорівнює $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$;

$m$ – кількість неповторюваних значень $x_i$ випадкової величини $x$;

$x_j$ – всі значення величини $x$, які вона приймала в кожному з $n$ дослідів.

Математичне очікування $\mu$ є невипадковою постійною величиною. Воно приблизно дорівнює середньому арифметичному $\overline{x}$ випадкової величини $x$ і чим більше $n$, тим точнішим буде рівність (3.8) відповідати (3.7).

*Дисперсія* $d(x)$[22] чи $d$ характеризує розсіювання значень $x_i$ випадкової величини $x$ відносно її математичного очікування і для неперервної величини визначається за формулою:

$$d(x) = \mu\left[x - \mu(x)\right]^2 = \int_a^b \left[x - \mu(x)\right]^2 f(x) dx. \tag{3.9}$$

а для дискретної величини (таблиця 3.3):

$$d(x) = \mu\left[x - \mu(x)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \mu\right)^2. \tag{3.10}$$

---

[20] Необхідно читати як математичне очікування випадкової величини $x$.

[21] В загальному випадку межі інтервалу $(a;\ b)$ можуть бути $(-\infty;\ +\infty)$.

[22] Це позначення читається як дисперсія випадкової величини $x$.

За експериментальними даними (таблиця 3.4) дисперсія з врахуванням (3.2) аналогічно (3.8) розраховується за формулою:

$$d = \sum_{i=1}^{m} p_i^* \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)^2 . \qquad (3.11)^{23}$$

Дисперсія $d$ є невипадковою постійною величиною, яка відображає середню величину квадратів відстаней (квадрат середньої відстані) між кожним із значень $x_i$ випадкової величини $x$ та її математичним очікуванням, тобто як розкидані (розсіяні) значення $x_i$ випадкової величини відносно $\overline{x}$ .

Для оцінки розсіювання можливих значень випадкової величини навколо їх середнього значення використовуються також середнє квадратичне відхилення $\sigma(x)$ чи $\sigma = \sqrt{d}$ . Так як середнє квадратичне відхилення має таку ж розмірність як і випадкова величина $x$, то в теорії частіше використовується саме $\sigma$, а не $d$, розмірність якої дорівнює квадрату розмірності випадкової величини $x$.

При $n \to \infty$ точність рівності (3.11), за аналогією (3.8), суттєво відрізняється від дисперсії розрахованої за невеликою кількістю дослідів $n$, тому оцінкою генеральної дисперсії на практиці є *виправлена* дисперсія[24] $s^2$ (її також називають *вибірковою* чи просто дисперсія), що отримана з вибіркової дисперсії $d$ (3.11) за фіксованою кількістю дослідів і поправкою $\frac{n}{n-1}$. Її визначають за співвідношенням:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d , \qquad (3.12)$$

а вибіркове середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma \approx s = \sqrt{s^2} . \qquad (3.13)$$

*Приклад* 3.3

Результати дослідження випадкової величини $x$ наведені в таблиці 3.5

Таблиця 3.5 – **Результати досліджень випадкової величини *x***

| $x$ | 3,10 | 3,15 | 3,20 | 3,25 | 3,30 | 3,35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 50 | 16 | 10 | 4 |

---

[23] Зручнішим аналогом формул (3.11) на практиці є $d = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} x_i^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ (середнє квадратів $\overline{x^2}$ мінус квадрат середнього $\overline{x}^2$ випадкової величини $x$), де $\overline{x}$ розраховано за формулами (3.8).

[24] Зустрічаються позначення $s_x^2, s^2\{x\}$тощо, які вказують на належність дисперсії до відповідної випадкової величини.

Розрахувати числові характеристики випадкової величини: математичне очікування $\overline{x}$, виправлену дисперсію $s^2$ і середнє квадратичне відхилення $s$.

*Розв'язок*

Розрахунки математичного очікування і дисперсії за формулами (3.8) і (3.11) наведені в таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – **Розрахунок числових характеристик випадкової величини *x***

| $x_i$ | $n_i$ | $p_i^* = n_i/n$ | $p_i^* x_i$ | $x_i - \overline{x}$ | $(x_i - \overline{x})^2$ | $p_i^*(x_i - \overline{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,10 | 5 | 0,05 | 0,155 | –0,1115 | 0,01243225 | 0,000621612 |
| 3,15 | 15 | 0,15 | 0,4725 | –0,0615 | 0,00378225 | 0,000567338 |
| 3,20 | 50 | 0,5 | 1,6 | –0,0115 | 0,00013225 | 6,6125E-05 |
| 3,25 | 16 | 0,16 | 0,52 | 0,0385 | 0,00148225 | 0,00023716 |
| 3,30 | 10 | 0,1 | 0,33 | 0,0885 | 0,00783225 | 0,000783225 |
| 3,35 | 4 | 0,04 | 0,134 | 0,1385 | 0,01918225 | 0,00076729 |
| | $n = 100$ | $\Sigma p_i^* = 1$ | $\overline{x} = 3{,}2115$ | | | $d = 0{,}00304275$ |

Розраховуємо дисперсію за (3.12):

$$s^2 = \frac{100}{100-1} 0{,}00304275 = 0{,}003073485$$

і середнє квадратичне відхилення за (3.13):

$$s = \sqrt{0{,}003073485} = 0{,}055439019\,.$$

Отже, числовими характеристиками випадкової величини *x*, наведеної в таблиці 3.5, є: $\overline{x}$ = 3,2115, що відображає найбільш ймовірне дійсне значення величини *x*, що розрахована за даними експерименту; $s^2$ = 0,003073485, що відображає розсіювання експериментальних даних $x_i$ за рахунок будь-яких випадковостей (умови експерименту, інструментальна похибка, суб'єктивність дослідника) відносно $\overline{x}$, а також $s$ = 0,055439019, яке на практиці (як і $s^2$) характеризує похибку досліду.

Такі розрахунки зручно виконувати з використанням MS Excel, як наведено в додатку Б. *Завдання для самостійної роботи студентів* наведено в таблиці Б.1 цього ж додатка.

### 3.1.3 Нормальний закон розподілу випадкової величини

Розподіл імовірностей значень $x_i$ неперервної випадкової величини *x* залежно від найбільш імовірного значення $\mu$ та її похибки $\sigma$ теоретично описується нормальним законом. Якщо диференційна функція неперервної випадкової величини *x* має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.14)$$

то такий розподіл імовірностей називають нормальним (закон Гауса).

Користуючись формулами (3.6), (3.9) і (3.14) для нормально розподіленої випадкової величини $x$ можна отримати:

$$\mu(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\mu, \quad d(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2. \qquad (3.15)$$

Формули (3.15) для нормально розподіленої випадкової величини $x$ показують, що її математичне очікування дорівнює $\mu$, а дисперсія, тобто її[25] похибка, дорівнює $\sigma^2$, тобто розподіл імовірностей залежить від двох параметрів $\mu$ і $\sigma$.

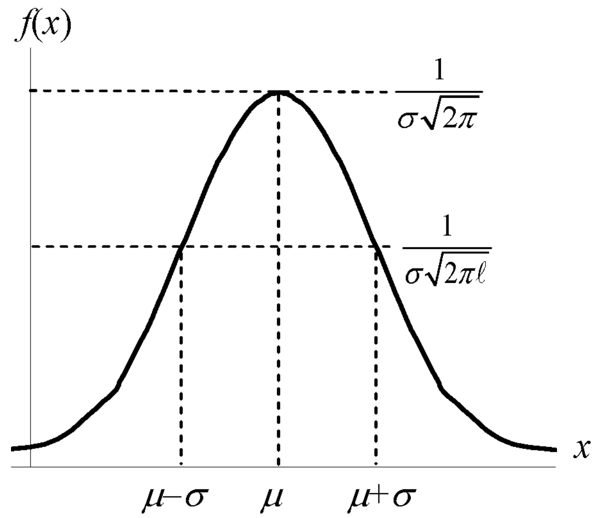



Рисунок 3.1 – **Крива нормального розподілу випадкової величини**

Для розуміння фізичної суті закону нормального розподілу розглянемо криву рисунку 3.1, яка є симетричною відносно математичного очікування $\mu$. Вона є найбільш імовірним значенням випадкової величини $x$, а її більшість[26] можливих значень $x_i$ з щільністю[27] імовірності $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\ell}};\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$[28] знаходяться в інтервалі[29] ($\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$). На форму

---

[25] Цієї випадкової величини $x$.

[26] Ймовірність попадання значень $x_i$ нормально-розподіленої випадкової величини $x$ в інтервал ($\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$) дорівнює 0.6826, тобто при проведенні $n\to\infty$ дослідів в 68,26 % з них вона прийме значення $x_i$ з цього інтервалу.

[27] Є аналогом ймовірності, але її межі не обмежені 0–1, вона змінюється (збільшується чи зменшується) тоді, коли й ймовірність.

[28] $f'(x)=-\frac{x-\mu}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ прирівнюючи $f'(x)=0$, знаходимо точку $x=\mu$, в якій функція $f(x)$ набуває екстремального значення $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

[29] $f''(x)=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}-1\right)$ прирівнюючи $f''(x)=0$, знаходимо точки $x=\mu\pm\sigma$, в яких різко змінюється напрямок функції $f(x)$ (точки перегину). В них вона набуває значення $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\ell}}$.

кривої нормального розподілу параметр $\mu$ не впливає, від нього залежить тільки положення кривої вздовж осі $x$ (рисунок 3.2, *а*).

Збільшення точності вимірювання (зменшення $\sigma$), як видно з $f\left(x_{\max}\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, обумовлює більш імовірне значення математичного очікування, що відображається на кривій у вигляді її загострення (рисунок 3.2, *б*).

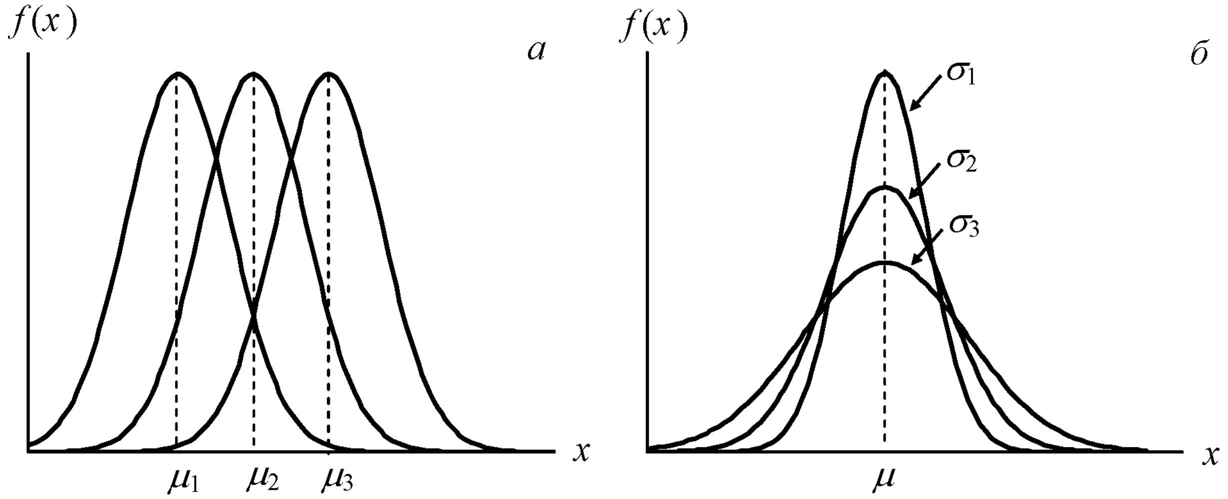



Рисунок 3.2 – **Криві нормального розподілу випадкових величин для фіксованого значення параметрів:** *а* – середнє квадратичне відхилення $\sigma$ при різних значеннях $\mu\,(\mu_1 < \mu_2 < \mu_3)$, *б* – математичне очікування $\mu$ при різних значеннях $\sigma\,(\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3)$

Отже, корисність нормального закону для дослідника полягає в наступному: якщо апріорно відомо, що випадкова величина $x$ розподілена за нормальним законом, то її максимально точно можна виміряти, а її дійсне значення $x_i$ найбільш імовірне є математичним очікуванням. Причому, чим точніше дослідник її може виміряти ($\sigma \to min$), з використанням більш точних приладів, експериментальних методів, які використовуються, тим ймовірніше, що її дійсним значенням є математичне очікування $\mu$.

На основі формули (3.3) і (3.14) визначимо імовірність того, що нормально-розподілена випадкова величина $x$ прийме значення $x_i$ в інтервалі ($a$; $b$):

$$p(a<x<b)=F\left(x\right)\Big|_a^b=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b \ell^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx= \quad (3.16)$$ [30]

[30] В MS Excel функція: =НОРМРАСП(x;среднее; стандартное_откл; интегральная) повертає значення інтегральної функції $0 \le F\left(x\right) \le 1$ (3.16) для нормально-розподіленої випадкової

$$=\left|\frac{x-\mu}{\sigma}=z; x=\sigma z+\mu; dx=\sigma dz\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\ell^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\ell^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{a-\mu}{\sigma}}\ell^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \qquad (3.17)$$

де інтеграл $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}\ell^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – є функція Лапласа $0\le\Phi(z)\le1$, (3.18)

значення якої для функції $\tilde{\Phi}(z)=\Phi(z)-0{,}5$, де $-0{,}5\le\tilde{\Phi}(z)\le0{,}5$ протабульовано[31] в таблиці В.1 (додаток В) для будь-якого $z>0$ і $\tilde{\Phi}(z)>0$, причому $\tilde{\Phi}(-z)$ знаходиться як $-\tilde{\Phi}(z)$, тобто $\tilde{\Phi}(-z)=-\tilde{\Phi}(z)$; у нашому випадку:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}. \qquad (3.19)$$

На практиці замість $\mu$ і $\sigma$ підставляють їх відповідні практичні аналоги $\bar{x}$ і $s$.

*Приклад* 3.4

За даними прикладу 3.3, вважаючи, що розподіл генеральної сукупності випадкової величини $x$, заданої таблицею 3.5 є нормальним, розрахувати значення диференційної функції, інтегральної функції для всіх значень $x_i$, а також ймовірність попадання значення $x_i$ в інтервал $(a_i; b_i)$.

*Розв'язок*

На практиці експериментальні дані таблиці 3.5 отримують в результаті поділу всього інтервалу можливих значень випадкової величини $x$ на $i$ інтервалів $(a_i, b_i)$ однакової довжини і проводять досліди. Апріорно визначено, що значення випадкової величини $x$ знаходяться в межах 3,075–3,375. Цей інтервал розбиваємо, наприклад, на 6 інтервалів, і отримуємо довжину інтервалу $\Delta x_i$ = (3,375–3,075) / 6 = 0,05. Після додавання до $a_i$ значення $\Delta x_i$ отримуємо межі кожного інтервалу $(a_i; b_i)$. Серединою інтервалу є середнє значенням $x_i$ випадкової величини $x$ кожного з інтервалів. Якщо випадкова величина прийняла своє значення з поточного $i$ інтервалу, то до останньої величини $n_i$ додається 1.

---

величини $x$ при параметрі «интегральная» рівне «ИСТИНА» та диференційної (3.14) при параметрі «интегральная» рівне «ЛОЖЬ».

[31] В MS Excel функція: =НОРМСТРАСП(z) повертає значення інтегральної функції Лапласа $0\le\Phi(z)\le1$ в координатах $z$, тому $\Phi(-z)\ne-\Phi(z)$. Для переходу від функції MS Excel $\Phi(z)$ до табличного значення $\tilde{\Phi}(z)$ (додаток В) необхідно $\tilde{\Phi}(z)=\Phi(z)-0{,}5$.

За вище отриманими $\overline{x}$ = 3,2115 і $s$ = 0,055439019 (приклад 3.3) розраховуємо значення диференційної функції $f(x_i)$ за (3.14). Значення інтегральної функції $F(x)$ в точках $x_i$, $a_i$, $b_i$ розраховуємо за (3.5) в MS Excel, а імовірність попадання значення $x_i$ в інтервал ($a_i$; $b_i$) за (3.16). Результати розрахунків наведені в таблиці 3.7.

Таблиця 3.7 – **Розрахунок диференційної й інтегральної функцій та імовірності прийняття значення з інтервалу**

| $i$ | Інтервал | | $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ | $f(x_i)$ | $F(x_i)$[32] | $F(a_i)$ | $F(b_i)$ | $p = F(b_i) - F(a_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_i$ | $b_i$ | | | | | | |
| 1 | 3,075 | 3,125 | 3,1 | 0,9522 | 0,0222 | 0,0069 | 0,0593 | 0,0524 |
| 2 | 3,125 | 3,175 | 3,15 | 3,8893 | 0,1336 | 0,0593 | 0,2551 | 0,1958 |
| 3 | 3,175 | 3,225 | 3,2 | 7,0429 | 0,4178 | 0,2551 | 0,5962 | 0,3410 |
| 4 | 3,225 | 3,275 | 3,25 | 5,6542 | 0,7563 | 0,5962 | 0,8740 | 0,2778 |
| 5 | 3,275 | 3,325 | 3,3 | 2,0125 | 0,9448 | 0,8740 | 0,9797 | 0,1057 |
| 6 | 3,325 | 3,375 | 3,35 | 0,3176 | 0,9938 | 0,9797 | 0,9984 | 0,0187 |

Аналогічні розрахунки можна провести за допомогою функції Лапласа (3.17). Значення $z_{a_i}$, $z_{b_i}$, $z_i$ (таблиця 3.8) розраховуємо за (3.19) у нашому випадку $z = \frac{x - 3{,}2115}{0{,}055439019}$, відповідно при $x$ = $a_i$, $b_i$, $x_i$ за даними таблиці 3.7. Значення функції Лапласа (3.18) у вигляді $\tilde{\Phi}(z)$ для $z_{a_i}$, $z_{b_i}$, $z_i$ знаходимо з таблиці В.1 (додаток В). Імовірність $p$ попадання значення $x_i$ в інтервал ($a_i$; $b_i$) розраховуємо за (3.17).

Таблиця 3.8 – **Розрахунок імовірності прийняття значення з інтервалу за допомогою табульованої функції Лапласа**

| $i$ | $z_{a_i}$ | $z_{b_i}$ | $z_i$ | $\tilde{\Phi}(z_i)$ | $\Phi(z_i)^*$ | $\tilde{\Phi}(z_{a_i})$ | $\tilde{\Phi}(z_{b_i})$ | $p=\tilde{\Phi}(z_{b_i})-\tilde{\Phi}(z_{a_i})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –2,4622 | –1,5603 | –2,0112 | –0,4778 | 0,0222 | –0,4931 | –0,4407 | 0,0524 |
| 2 | –1,5603 | –0,6584 | –1,1093 | –0,3664 | 0,1336 | –0,4407 | –0,2449 | 0,1958 |
| 3 | –0,6584 | 0,2435 | –0,2074 | –0,0822 | 0,4178 | –0,2449 | 0,0962 | 0,3410 |
| 4 | 0,2435 | 1,1454 | 0,6945 | 0,2563 | 0,7563 | 0,0962 | 0,3740 | 0,2778 |
| 5 | 1,1454 | 2,0473 | 1,5963 | 0,4448 | 0,9448 | 0,3740 | 0,4797 | 0,1057 |
| 6 | 2,0473 | 2,9492 | 2,4982 | 0,4938 | 0,9938 | 0,4797 | 0,4984 | 0,0187 |

Примітка. * – $\Phi(z_i) = \tilde{\Phi}(z_i) + 0{,}5$ є аналогом $F(x_i)$, розраховані відповідно в координатах $z$ і $x$

[32] Імовірність того, що випадкова величина $x$ прийме значення менше за $x_i$, наприклад, $p$ ($x < 3{,}25$) = 0,7563.

Таким чином, дійсне значення випадкової величини $x$ знаходиться в інтервалі (3,175; 3,225) з імовірністю 0,341. В цьому ж інтервалі знаходиться і математичне очікування $\overline{x}$, яке дорівнює 3,2115 і є найбільш імовірним дійсним значенням випадкової величини $x$. Слід відзначити, що $p$ = 0,341 є теоретичною імовірністю за умови, якщо генеральна сукупність значень випадкової величини розподілена дійсно нормально.

На практиці ця імовірність за даними таблиці 3.5: $n_i/n$ = 50/100 = 0,5. Це відхилення можна пояснити тим, що експериментальні дані отримані з генеральної сукупності, яка має розподіл наближений до нормального. В математичній статистиці відповідність отриманого на практиці розподілу нормальному закону перевіряється за гіпотезою (3.1.4).

Як видно з рисунка 3.1, випадкова величина $x$ набуває більшість значень в інтервалі ($\mu$–$\sigma$, $\mu$+$\sigma$). Важливим є наперед визначити імовірність того, що випадкова величина $x$ набуде значення $x_i$, яке буде відрізнятися від математичного очікування $\mu$ із наперед заданою точністю $\delta$, тобто $p\left(\left|x_i-\mu\right|<\delta\right)$.

Якщо замінити нерівність $\left|x_i-\mu\right|<\delta$ подвійною нерівністю $-\delta<x_i-\mu<\delta$ чи $\mu-\delta<x_i<\mu+\delta$, то зважаючи на формулу (3.17) у позначеннях $\tilde{\Phi}(z)$ маємо:

$$p\left(\mu-\delta<x_i<\mu+\delta\right)=\tilde{\Phi}\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right)-\tilde{\Phi}\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right)=\tilde{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\tilde{\Phi}\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)=2\tilde{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

тобто

$$p\left(\left|x_i-\mu\right|<\delta\right)=2\tilde{\Phi}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (3.20)$$

Однак, зручніше на практиці (3.20), представляти не через задану дослідником похибку $\delta$, а через її взаємозв'язок з похибкою визначення $\sigma$ випадкової величини $x$. Якщо прийняти $\delta/\sigma=o$ або $\delta=o\sigma$ та підставити в (3.20), то отримаємо:

$$p\left(\left|x_i-\mu\right|<o\sigma\right)=2\tilde{\Phi}(o), \qquad (3.21)$$

тобто значення $2\tilde{\Phi}(o)$ при заданому значенні $o$ визначає імовірність того, що нормально-розподілена величина $x$ набуде в експерименті значення $x_i$, яке буде за абсолютною величиною відрізнятись від $\mu$ менше, ніж число $o\sigma$.

Нехай $o$ = 1, тоді згідно з (3.21) $p\left(\left|x_i-\mu\right|<\sigma\right)=2\tilde{\Phi}(1)=0{,}6826$, тобто імовірність того, що випадкова величина $x$ набуде значення $x_i$, яке буде відрізнятись від $\mu$ менше, ніж похибка $\sigma$ знаходження дійсного значення цієї величини дорівнює 0,6826. При $o$ = 2 маємо $p(|x_i - \mu| < 2\sigma) = 2\tilde{\Phi}(2) = 0,9544$. При $o$ = 3 маємо $p(|x_i - \mu| < 3\sigma) = 2\tilde{\Phi}(3) = 0,9973$. Отже, інтервал $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ покриває собою практично всі можливі значення нормально-розподіленої випадкової величини $x$ з імовірністю 0,9973, а значить імовірність того, що випадкова величина не прийме значення з цього інтервалу дорівнює 1–0,9973 = 0,0027[33].

Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то відхилення значення $x_i$ випадкової величини $x$ від її математичного очікування не перебільшує потроєного середньоквадратичного відхилення. В цьому полягає *правило* 3 $\sigma$. В практичному використанні це правило застосовується так: якщо розподіл випадкової величини $x$ невідомий, але умова правила 3 $\sigma$, виконується, то можна передбачати, що випадкова величина підпорядковується нормальному закону розподілу. В протилежному випадку, розподіл цієї величини не є нормальним. Як було відмічено вище в практичних розрахунках аналогом $\mu$ і $\sigma$ відповідно є $\bar{x}$ і $s$, в зв'язку з чим правило $3\sigma$ набуває наступного вигляду:

$$|x_i - \bar{x}| < 3s. \tag{3.22}$$

Формулу (3.22) також можна використовувати для виключення грубих похибок нормально розподіленої випадкової величини $x$ з метою підвищення якості експериментальних даних.

Таким чином, у випадку розподілу випадкової величина $x$ за нормальним законом, її дійсне значення $x^*$ можна виміряти максимально точно, що дозволяє досліднику ставити, так звані, *паралельні досліди* і приймати за дійсне значення $x^*$ їх середнє арифметичне $\bar{x}$ з похибкою $s$.

*Завдання для самостійної роботи студентів* виконувати за даними таблиці Б.1 додатка Б, як показано в прикладі 3.4.

### 3.1.4 Дослідження якості експериментальних даних

Експериментальні дані на різних стадіях дослідження будь-якого об'єкту підлягають перевірці на якість і надійність. Така задача може зустрічатись на практиці у кількох варіантах, наприклад, перевірка отриманих експериментальних даних на відповідність нормальному розподілу; відповідність математичного очікування експериментальних даних, отриманих

[33] Тобто тільки у 0,27 % випадках це може відбутись, що є практично неможливим.

за однакових умов, завчасно відомій сталій[34] величині, що визначена, наприклад, теоретично; виключення експериментальних даних з грубою похибкою[35]; перевірка відтворюваності досліду; визначення похибки експерименту тощо. Ці процедури здійснюються за допомогою відповідних гіпотез.

*Гіпотезою* називають припущення, що можна перевірити статистичним чи іншим методом. Гіпотези, що висуваються, поділяються на вихідну (нульова) $H_0$ і конкуруючі (альтернативні) $H_1$, $H_2$, ... . Після висування гіпотези вибирають *критерії*[36] (правила), що визначають методику їх експериментальної перевірки. Для перевірки гіпотези $H_0$ за експериментальними даними розраховують часткові значення величин, що входять в критерій, і таким чином отримують експериментальне (розрахункове) значення критерію.

Оскільки перевірка гіпотези здійснюється статистичними методами, то можуть бути прийняті два невірні рішення, тобто допущені похибки двох типів. Похибка першого типу полягає в тому, що гіпотеза $H_0$ є вірною, а вона відхиляється і приймається гіпотеза $H_1$. Ймовірність здійснити похибку першого типу називають *рівнем значущості*[37] $q$, а отже ймовірність прийняти вірне рішення є *довірчою імовірністю* $p = 1 - q$. Похибка другого типу полягає в тому, що гіпотеза $H_0$ є невірною, а вона приймається.

Теоретичне ж значення критерію знаходять за відповідною таблицею при заданому рівні значущості $q$ і числу степенів вільності (ЧСВ), яке визначається як загальна кількість вимірів за відрахуванням кількості додаткових величин, що необхідні для підрахунку цього критерію. Наприклад, для виправленої дисперсії (3.12) кількість степенів вільності дорівнює $n$–1, тобто для її підрахунку необхідно поставити $n$ дослідів, але для її підрахунку необхідно ще визначити одну додаткову величину – математичне очікування. Після співставлення експериментального значення критерію з його теоретичним значенням за певним правилом робиться висновок про прийняття гіпотези $H_0$ чи її відхилення. Якщо гіпотеза $H_0$ відхиляється і є тільки одна альтернативна гіпотеза $H_1$, то її приймають без додаткової перевірки.

[34] Такою задачею може бути визначення необхідності повірки лабораторного обладнання.
[35] Відхилення результату реального вимірювання від його дійсного значення.
[36] Спеціально підібрана випадкова величина, точний чи приблизний розподіл якої відомий і яка використовується для перевірки гіпотези $H_0$, наприклад, $\chi^2$-розподіл (Пірсона), $t$-розподіл (Стьюдента), $G$-розподіл (Кохрена), $F$-розподіл (Фішера) тощо.
[37] Якщо, наприклад, рівень значущості $q$ = 0,05 чи 5 %, то це означає, що у 5 випадках із 100 ми ризикуємо допустити похибку першого типу, тобто відкинути вірну гіпотезу.

Розглянемо кілька задач з перевірки статистичних гіпотез, які найбільш широко використовуються на практиці.

*Перевірка нормальності закону розподілу.* У випадку, коли всі можливі значення випадкової величини $x$ належать інтервалу ($a$; $b$) за великої кількості дослідів $n$, для зручності його поділяють на підінтервали ($a_i$; $b_i$) і експериментальні *дані групують*. Нехай результати досліджень випадкової величини $x$ отримані у вигляді інтервального розподілу – послідовності $m$ інтервалів[38] ($a_i$; $b_i$) з відповідною частотою $n_i$:

| $(a_i; b_i)$ | $(a_1; b_1)$ | $(a_2; b_2)$ | … | $(a_m; b_m)$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_m$ |

Для перевірки гіпотези $H_0$ – експериментальні дані розподілені за нормальним законом при альтернативній гіпотезі $H_1$ – експериментальні дані не розподілені за нормальним законом з рівнем значущості $q$, використовується критерій Пірсона $\chi^2$. З цією метою необхідно:

– розрахувати математичне очікування $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення $s = \sqrt{d}$ (для невиправленої дисперсії $d$ (3.11)[39]). За значення випадкової величини $x_i$ приймаємо середнє арифметичне $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ меж інтервалів ($a_i$; $b_i$);

– перейти від координат $x$ до координат $z$ за формулою (3.19), яка для розрахунків має вигляд: $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$ і в цих координатах розрахувати межі інтервалу $\left(z_{a_i}; z_{b_i}\right)$, при цьому найменшому значенню $z_{a_1}$ привласнюємо $-\infty$, а найбільшому $z_{b_m}$ – $+\infty$;

– розрахувати теоретичні частоти $n_i' = np_i$, де за (3.17) $p_i = \tilde{\Phi}\left(z_{b_i}\right) - \tilde{\Phi}\left(z_{a_i}\right)$ і відповідає теоретичній імовірності попадання значення $x_i$ випадкової величини $x$ в межі ($a_i$; $b_i$);

– розрахувати експериментальне (розрахункове) значення критерію Пірсона за формулою:

$$\chi_p^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (3.23)$$

---

[38] Використовується на практиці при значній кількості дослідів $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, коли експериментальні значення $x_i$ випадкової величини $x$ розбивають на інтервали і групують $a_i < x_i < b_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $m$). На практиці $m = 1 + 3{,}21\lg n$.

[39] Так передбачено застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези $H_0$.

і за таблицею В.2 розподілу $\chi^2$ (додаток В) знайти його теоретичне значення $\chi^2_{теор}[q;f]$ при заданому рівні значущості $q$ і ЧСВ $f=m–3$;

– порівняти експериментальні $n_i$ й теоретичні $n_i'$ частоти за правилом, згідно з яким співставляються значення критеріїв Пірсона (розрахункового і теоретичного):

$$\chi^2_p < \chi^2_{табл}[q;f]. \tag{3.24}$$

і якщо умова (3.24) виконується, то гіпотеза $H_0$ приймається.

*Примітка.* Для незгрупованих даних, що мають рівновіддалені між собою значення $x_{i+1} - x_i = h$, випадкової величини $x$ (таблиця 3.4) використовується наведений алгоритм за винятком: теоретичні частоти – $n_i' = \frac{nh}{s}\tilde{\Phi}(z_i)$, де за (3.19) $z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}$.

*Приклад* 3.5

Перевірити гіпотезу нормального закону випадкової величини $x$, що наведена інтервальним розподілом[40]:

| $(a_i; b_i)$ | 3,075–3,125 | 3,125–3,175 | 3,175–3,225 | 3,225–3,275 | 3,275–3,325 | 3,325–3,375 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 50 | 16 | 10 | 4 |

*Розв'язок*

Визначаємо значення математичного очікування $\overline{x}$ дисперсії $s_x^2$ і середнього квадратичного відхилення $s_x$ випадкової величини $x$ за допомогою формул (3.2), (3.8) і (3.11) за вихідними даними, що наведені в таблиці 3.9.

Таблиця 3.9 – **Допоміжні розрахунки для визначення $\overline{x}$ і $s_x^2$**

| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ | $n_i$ | $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ | $p_i^* x_i$ | $p_i^* x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,075 | 3,125 | 3,10 | 5 | 0,05 | 0,1550 | 0,4805 |
| 2 | 3,125 | 3,175 | 3,15 | 15 | 0,15 | 0,4725 | 1,4884 |
| 3 | 3,175 | 3,225 | 3,20 | 50 | 0,50 | 1,6000 | 5,1200 |
| 4 | 3,225 | 3,275 | 3,25 | 16 | 0,16 | 0,5200 | 1,6900 |
| 5 | 3,275 | 3,325 | 3,30 | 10 | 0,10 | 0,3300 | 1,0890 |
| 6 | 3,325 | 3,375 | 3,35 | 4 | 0,04 | 0,1340 | 0,4489 |
| $\sum$ | | | | $n$=100 | 1 | 3,2115 | 10,3168 |

За даними таблиці 3.9 знаходимо:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{6} p_i^* x_i = 3,2115$$

[40] За даними прикладів 3.3 (таблиця 3.6) і 3.4 (таблиця 3.7).

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{6} p_i^* x_i^2 - \overline{x}^2 = 10{,}3168 - 3{,}2115^2 = 3{,}042754 \cdot 10^{-3}; \quad s_x = \sqrt{s_x^2} = 5{,}516116 \cdot 10^{-2}.$$

Визначаємо межі інтервалів ($a_i$; $b_i$) випадкової величини $x$ в координатах $z = \dfrac{x - 3{,}2115}{5{,}516116 \cdot 10^{-2}}$ і за таблицею В.1 (додаток В) знаходимо значення функції Лапласа $\tilde{\Phi}(z)$ в цих межах. Отримані результати заносимо в таблицю 3.10 і з їх використанням розраховуємо теоретичні імовірності $p_i$ та вихідні дані для $\chi_p^2$.

Таблиця 3.10 – **Допоміжні розрахунки для визначення** $\chi_p^2$

| $i$ | $z_{a_i}$ | $z_{b_i}$ | $\tilde{\Phi}(z_{a_i})$ | $\tilde{\Phi}(z_{b_i})$ | $p_i = \tilde{\Phi}(z_{b_i}) - \tilde{\Phi}(z_{a_i})$ | $n_i' = np_i$ | $\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\infty$ | –1,5681 | –0,5000 | –0,4418 | 0,0582 | 5,82 | 0,1155 |
| 2 | –1,5681 | –0,6617 | –0,4418 | –0,2454 | 0,1964 | 19,64 | 1,0962 |
| 3 | –0,6617 | 0,2447 | –0,2454 | 0,0948 | 0,3402 | 34,02 | 7,5062 |
| 4 | 0,2447 | 1,1512 | 0,0948 | 0,3749 | 0,2801 | 28,01 | 5,1496 |
| 5 | 1,1512 | 2,0576 | 0,3749 | 0,4803 | 0,1054 | 10,54 | 0,0277 |
| 6 | 2,0576 | $+\infty$ | 0,4803 | 0,5000 | 0,0197 | 1,97 | 2,0918 |
| $\sum$ | | | | | 1 | | 15,9870 |

За формулою (3.23) знаходимо значення $\chi_p^2$ = 15,9870. З таблиці В.2 (додаток В) для $f$ = 6 – 3 = 3 і $q$ = 5 % знаходимо $\chi^2_{табл}$[5%,3] = 7,815.

Оскільки умова (3.24) не виконується, тобто $\chi_p^2 = 15{,}9870 > \chi^2_{табл} = 7{,}815$, то гіпотеза нормальності закону розподілу замірів випадкової величини $x$ не приймається. Отже, якщо всі можливі значення випадкової величини $x$ в одних і тих же умовах належать інтервалу (3,075; 3,375), то її дійсне значення не можна знайти прийнявши його за математичне очікування 3,2115, що отримано в прикладах 3.3–3.5, а тому подальші експериментальні дослідження з цією величиною на цьому пристрої проводити немає сенсу, оскільки цінність таких експериментальних даних невелика. Вийти з положення під час постановки технологічної задачі можна переглядом її режиму чи ретельнішим проведення вимірювання (збільшення точності пристрою) тощо.

За отриманими даними $p_i$ і $p_i^*$ побудуємо в координатах $p = f(x)$ чи $p = f(i)$, де $i$ номер інтервалу, гістограму розподілу випадкової величини $x$ (рисунок 3.3). Як з неї видно практичний і теоретичний розподіл випадкової величини $x$ суттєво відрізняється.

*Відповідність математичного очікування завчасно відомій сталій величині*. Експериментальна перевірка будь-якої фізико-хімічної величини, яка

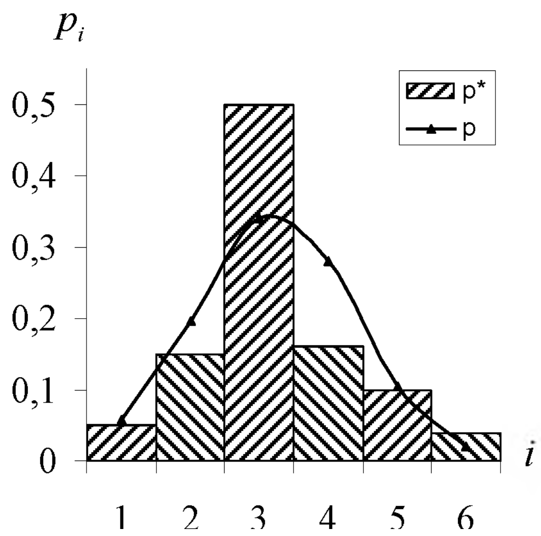



Рисунок 3.3 – **Гістограма розподілу випадкової величини $x$**

обчислена теоретично, наприклад, визначення точності лабораторного обладнання[41], здійснюється за гіпотезою, згідно з якою математичне очікування практично отриманих показників $\overline{x}$ не дорівнює сталій (стандартній) величині $\overline{x}^*$, тобто $H_0$ – $\overline{x} \neq \overline{x}^*$ за альтернативної гіпотези $H_1$ – $\overline{x} = \overline{x}^*$.

Перевірка гіпотези $H_0$ здійснюється за правилом:

$$\left|\overline{x}^* - \overline{x}\right| > t_{табл}[q; f]\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (3.25)$$

де $t_{табл}[q;\ f]$ – критерій Стьюдента для ЧСВ $f = n - 1$ і рівні значущості $q$, який знаходиться за таблицею В.3 $t$-розподілу (додаток В). Якщо умова (3.25) виконується, то гіпотеза $H_0$ приймається, тобто математичне очікування всіх показників $\overline{x}$ в статистичному сенсі суттєво відрізняється від стандартної середньої величини $\overline{x}^*$, тобто значення величини $\overline{x}^*$ не знаходить експериментального підтвердження.

Формулу (3.25) можна використати для розрахунку *довірчого інтервалу*[42] математичного очікування у вигляді:

$$x^* > \overline{x} \pm t_{табл}[q; f]\frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (3.26)$$

де $x^*$ – дійсне значення випадкової величини $x$.

*Приклад 3.6*

Перевірка показників електрорушійної сили (ЕРС) електродної системи рН-метра відносно стандартного буферного розчину (0,01 М розчин тетраборнокислого натрію), що має рН 9,22 за температури 20 °С, який показує[43] $\overline{x}^*$ = 535,70 мВ наведені в таблиці 3.11.

Таблиця 3.11 – **Показники $x_i$ та допоміжні розрахунки**

| | | | | | | | | | | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 536 | 537 | 541 | 544 | 533 | 535 | 536 | 548 | 531 | 533 | 5374 |
| $(x_i - \overline{x})^2$ | 1,96 | 0,16 | 12,96 | 43,56 | 19,36 | 5,76 | 1,96 | 112,36 | 40,96 | 19,36 | 258,4 |

[41] Що підлягає метрологічному контролю (повірці на відповідність його показань паспортним даним).
[42] Який з довірчою ймовірністю покриває дійсне значення необхідного параметру.
[43] 0,0581 В на одиницю рН.

Необхідно перевірити гіпотезу, що середнє з показників pH-метра значуще (суттєво) відрізняється від стандартного значення.

*Розв'язок*

За формулами (3.8), (3.11)–(3.13) знаходимо математичне очікування, виправлену дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{5374}{10} = 537{,}4; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 537{,}4)^2 = \frac{258{,}4}{10-1} = 28{,}7111; \quad s = \sqrt{s^2} = 5{,}3583.$$

За таблицею В.3 додатка В при $q$ = 5%, $f = n - 1 = 9$ знаходимо $t_{табл}[5\%,9]$ = 2,26[44]. За формулою (3.25) знаходимо:

$$\left|\overline{x}^* - \overline{x}\right| = \left|535{,}7 - 537{,}4\right| = 1{,}7; \quad t_{табл}[q,f]\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}26\cdot 5{,}3583}{\sqrt{10}} = 3{,}8294.$$

Оскільки за правилом (3.25) 1,7 < 3,8294, то гіпотеза $H_0$ – $\overline{x} \neq \overline{x}^*$ не приймається, а приймається $H_1$ – $\overline{x} = \overline{x}^*$: середнє значення із десяти замірів pH-метром ЕРС не відрізняється від показання стандартного буферного розчину.

Таким чином, pH-метр не підлягає настройці.

*Виключення експериментальних даних з грубою похибкою*. Під час обробки експериментальних даних в першому наближенні, їх перевіряють на наявність значень $x_i$, котрі значно відхилені від дійсного значення внаслідок впливу структури досліджуваного матеріалу, точності вимірювання, досвіду дослідника, умов постановки експерименту тощо. При цьому для нормально розподіленої випадкової величини з використанням (3.22) з імовірністю 1 – 0,9973 = 0,0027 можна записати, що якщо виконується умова

$$\left|x_i - \overline{x}\right| > 3s, \tag{3.27}$$

то значення $x_i$ є грубою похибкою.

Однак, на практиці нерівність (3.27) майже не працює при невеликій кількості дослідів $n$, тому грубість похибки можна перевірити за гіпотезою $H_0$: $\left|x_i - \overline{x}\right|$ – груба похибка за альтернативної $H_1$: похибка $\left|x_i - \overline{x}\right|$ не відноситься до грубої.

Висунуту гіпотезу $H_0$ можна перевірити з використанням критерію Романовського[45] $R$ за правилом:

$$\left|x_i - \overline{x}\right| > sR\left[q;f\right], \tag{3.28}$$

де $R\left[q;f\right]$ – табличне значення критерію (додаток В, таблиця В.4 ) з ЧСВ $f$ = $n$ – 2.

---

[44] В MS Excel функція: =СТЬЮДРАСПОБР(вероятность;степени_свободы), так, наприклад, =СТЬЮДРАСПОБР(0,05;9) дорівнює 2,262158887.

[45] Є інші критерії, наприклад, $Q$-критерій, $\beta(\beta')$-критерій тощо.

Якщо правило (3.28) виконується, то значення $x_i$ має бути відкинуто.

*Приклад 3.7*

Перевірити з використанням критерію Романовського отримані експериментальні дані межі міцності біополімеру, МПа, на наявність серед них некоректних значень. Вихідні дані занесені в таблицю 3.12.

Таблиця 3.12 – **Вихідні дані і допоміжні розрахунки**

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$, МПа | 21 | 23 | 21 | 24 | 13 | 24 | 21 | 23 | 20 | 23 | 213 |
| $x_i^2$ | 441 | 529 | 441 | 576 | 169 | 576 | 441 | 529 | 400 | 529 | 4631 |
| $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$ | 0,3 | 1,7 | 0,3 | 2,7 | 8,3 | 2,7 | 0,3 | 1,7 | 1,3 | 1,7 | – |

*Розв'язок*

За формулами (3.8), (3.11)–(3.13) і використанням допоміжних розрахунків таблиці 3.12 знаходимо математичне очікування $\overline{x}$ і середнє квадратичне відхилення $s$:

$$\overline{x} = \frac{213}{10} = 21{,}3;\ d = \frac{4631}{10} - 21{,}3^2 = 9{,}41;\ s^2 = \frac{10}{9}9{,}41 = 10{,}4556;\ s = \sqrt{10{,}4556} = 3{,}2335$$

За формулою (3.28) і таблицею В.4 додатка В визначаємо:

$$sR[5\%;8] = 3{,}2335 \cdot 2{,}51 = 8{,}1161.$$

Порівнявши всі значення $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$ таблиці 3.12 із значенням 8,1161 критерію (3.28) знаходимо, що значення $x_i$ = 13 МПа є некоректним, тому його виключаємо із вихідних експериментальних даних і розрахунки повторюємо. Після цього знаходимо: $\overline{x} = 22{,}2222$, $s = 1{,}4814$, $sR[5\%;7] = 1{,}4814 \cdot 2{,}62 = 3{,}7182$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$ | 1,22 | 0,78 | 1,22 | 1,78 | – | 1,78 | 1,22 | 0,78 | 2,22 | 0,78 | – |

і за правилом (3.28) бачимо, що грубі похибки відсутні.

За формулою (3.26) при $t_{табл}[5\%,8] = 2{,}31$ (таблиця В.3, додаток В) знаходимо довірчий інтервал математичного очікування $\pm 2{,}31\frac{1{,}4814}{\sqrt{8}}$, а отже дійсне значення $x^*$ дорівнює $22{,}22 \pm 1{,}21$ МПа.

Таким чином, після перевірки гіпотези $H_0$ на наявність грубої похибки, що відноситься до дефектності структури, отримано дійсне значення межі міцності біополімерного матеріалу в межах 21,01–23,43.

*Перевірка відтворюваності досліду*. На практиці ця задача полягає в тому, щоб з'ясувати чи не суттєво[46] відрізняються *за похибкою* кілька серій

[46] Якщо суттєво, то це означає що великий вплив чинить похибка експерименту.

дослідів (проведених, наприклад, в різні дні чи в різних лабораторіях), поставлених в однакових[47] умовах. При цьому перевіряється гіпотеза про однорідність дисперсій $H_0$: $s_1^2 = s_2^2 = \ldots = s_n^2$[48] за альтернативної гіпотези $H_1$: є якась одна $s_i^2$ (чи кілька), яка не дорівнює усім іншим $s_1^2 \neq s_2^2 \neq \ldots \neq s_n^2$. Вихідні дані наведено в таблиці 3.13.

Таблиця 3.13 – **Серії паралельних дослідів**

| Серія | Паралельні досліди | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1m}$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2m}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋱ | ⋮ |
| $n$ | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | … | $x_{nm}$ |

Перевірка гіпотези $H_0$ залежить від кількості серій дослідів: при $n = 2$ використовується $F$-критерій Фішера, а при $n \geq 2$ – $G$-критерій Кохрена (за однакової кількості паралельних дослідів $m$ в кожній серії[49]). Їх розрахункові значення визначаються за відповідними залежностями:

$$F_p = \frac{s_б^2}{s_м^2}, \tag{3.29}$$

де $s_б^2$, $s_м^2$ – відповідно більша і менша з дисперсій $s_1^2$, $s_2^2$;

$$G_p = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2}, \tag{3.30}$$

де $s_{\max}^2$ – максимальне із значень $s_i^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

При цьому якщо виконується умова:

$$F_p < F_{табл}[q; f_1 = f_б; f_2 = f_м] \text{ чи } G_p < G_{табл}[q; f_1 = m-1; f_2 = n], \tag{3.31}$$

де $f_б, f_м$ – ЧСВ більшої та меншої за величиною дисперсії (в нашому випадку[50] $f_б = f_м = m - 1$),

то гіпотеза про однорідність дисперсій $H_0$ приймається.

---

[47] За різних умов експерименту значення випадкової величини $x$ залежить, наприклад, від температури $x = f(T)$, то похибка вимірювання $x$ має не суттєво відрізнятись за різних $T$. За суттєвої відмінності похибки вимірювання $x$ – вважається експеримент некоректним.

[48] Іншими словами експериментальні дані кожної серії взяті з однієї генеральної сукупності $x$, яка має дисперсію $d$, тобто $d(x_1) = d(x_2) = \ldots = d(x_n)$.

[49] За різної кількості $m_i$ паралельних дослідів в $i$ серії використовується інший критерій, наприклад, критерій Бартлета.

[50] На практиці критерій (3.29) можна використовувати за різної кількості $m$ паралельних дослідів у серіях 1 і 2.

*Приклад 3.8*

За різних значень температур $T$, °С, отримані відповідні залишкові концентрації хімічного матеріалу $x$, г/л, у відпрацьованому технологічному розчині (таблиця 3.14). Перевірити гіпотезу однорідності дисперсій за $G$-критерієм.

Таблиця 3.14 – **Вихідні дані експерименту**

| Серія $i$ дослідів при $T$, °С | Паралельні $j$ досліди вимірювання $x$, г/л | | | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 5,1 | 5,5 | 5,2 | 5,4 |
| 45 | 3,9 | 4,0 | 3,7 | 3,9 |
| 50 | 1,5 | 1,7 | 1,7 | 1,9 |
| 55 | 0,7 | 0,9 | 0,9 | 1,0 |
| 60 | 0,3 | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

*Розв'язок*

За формулами (3.8), (3.11), (3.12) знаходимо математичні очікування $\bar{x}_i$ і дисперсії $s_i^2$ серій дослідів, що зведені в таблицю 3.15.

Таблиця 3.15 – **Розрахунок дисперсій**

| $i$ | $\sum x_i$ | $\bar{x}_i$ | $x_{ij}^2$ | | | | $\sum x_i^2$ | $\dfrac{\sum x_i^2}{m}$ | $d_i = \dfrac{\sum x_i^2}{m} - \bar{x}_i^2$ | $s_i^2 = \dfrac{m}{m-1} d_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 21,2 | 5,3 | 26,01 | 30,25 | 27,04 | 29,16 | 112,46 | 28,115 | 0,025 | 0,033333 |
| 2 | 15,5 | 3,875 | 15,21 | 16 | 13,69 | 15,21 | 60,11 | 15,0275 | 0,011875 | 0,015833 |
| 3 | 6,8 | 1,7 | 2,25 | 2,89 | 2,89 | 3,61 | 11,64 | 2,91 | 0,02 | 0,026667 |
| 4 | 3,5 | 0,875 | 0,49 | 0,81 | 0,81 | 1 | 3,11 | 0,7775 | 0,011875 | 0,015833 |
| 5 | 1,3 | 0,325 | 0,09 | 0,25 | 0,04 | 0,09 | 0,47 | 0,1175 | 0,011875 | 0,015833 |
| $\sum$ | | | | | | | | | | 0,1075 |

*Примітка.* Лічильник рядків $i$ = 1–5, колонок $j$ = 1–4; проведено $n$ = 5 серій і в кожній з них $m$ = 4 паралельних досліди

За формулою (3.30) визначаємо розрахункове значення $G_p$:

$$G_p = \frac{0{,}033333}{0{,}033333+0{,}015833+0{,}026667+0{,}015833+0{,}015833} = \frac{0{,}033333}{0{,}1075} = 0{,}3101.$$

За таблицею В.5 (додаток В) знаходимо табличне значення $G$-критерію при $q$ = 0,05; $f_1$ = 4 – 1 = 3; $f_2$ = 5, яке дорівнює $G_{табл}[5\%;3;5] = 0{,}5981$..

Оскільки правило (3.31) виконується $G_p = 0{,}3101 < G_{табл} = 0{,}5981$, то $H_0$-гіпотеза про однорідність дисперсій приймається, що дозволяє отримані дані використовувати для розрахунку похибки експерименту і прийняти за дійсне значення в $i$-серії[51] її математичне очікування $\overline{x}_i$. У випадку відхилення цієї гіпотези необхідно збільшувати кількість паралельних дослідів $m$.

*Визначення похибки експерименту.* Відомо, що якщо $m$ раз поставити досліди за $i$ однакових чи різних умов, тобто серії ($i$ = 1, 2, …, $n$), то отримані значення $x_{i1}$, $x_{i2}$, …, $x_{im}$ (таблиця 3.13) будуть в більшій чи меншій мірі відрізнятися один від одного за рахунок всіляких випадковостей. Підрахуємо середнє значення випадкової величини $x$ в кожній серії $\overline{x}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}$. Тоді, чим менша буде *сума квадратів відхилень* поточного значення $x_{ij}$ від їх середнього $\overline{x}_i$, тобто $\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2$, тим буде краща *відтворюваність дослідів в серії* і, відповідно, менша похибка (більша точність) $\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2$ виміру значення $x_i$.

Точність відтворюваності дослідів всього експерименту, визначається дисперсією відтворюваності за формулою:

$$s_{експ}^2 = \frac{1}{n(m-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2 \qquad (3.32)$$

і називається похибкою[52] експерименту з ЧСВ $f_{експ} = n\,(m-1)$.

*Приклад 3.9*

За даними прикладу 3.8, в якому серії дослідів поставлено за різних умов, розрахувати похибку експерименту.

*Розв'язок*

Оскільки в прикладі 3.8 доведено однорідність експериментальних даних 5 серій за $G$-критерієм, то в подальшому такі дані можна використати для визначення похибки експерименту. В зв'язку з цим, за отриманим результатом розрахунків $\sum_{i=1}^{5} s_i^2$ (таблиця 3.15) і формулою (3.32) визначаємо похибку експерименту:

---

[51] Оскільки випадкова величина набувала свої значення за різних умов (температури); за однакових умов отримується точніше значення випадкової величини, що отримується усередненням $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i$.

[52] На практиці під час подальших статистичних розрахунків використовують (3.32) саме як дисперсію $s^2$, а не як середнє квадратичне відхилення $s$.

$$s^2_{експ}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i^2=\frac{0,1075}{5}=0,0215 \text{ чи } s=0,1466,\ г/л$$

з ЧСВ[53] $f_{експ}=n\,(m-1)=5(4-1)=15$.

Таким чином, експериментальні дані, що отримані в серіях, в середньому розсіяні навколо їх[54] математичних очікувань $\bar{x}_i$ з похибкою ±0,1466, а $s^2_{експ}=0,0215$ з $f_{експ}=15$ в подальшому можна використовувати для оцінки якості математичної залежності, що буде відображати зміну концентрації хімічного матеріалу $x$ від температури процесу $T$ у вигляді математичної формули $x=f(T)$, див. приклад 3.17.

На практиці нормальний закон розподілу відіграє важливу роль. Оскільки, для встановлення підпорядкованості експериментальних даних його впливу потрібно багато експериментального матеріалу, то в багатьох випадках достатньо з довірчою імовірністю пройти етапи дослідження якості експериментальних даних: виключити дані з грубою похибкою; перевірити їх однорідність; прийняти за дійсні значення $x_i^*$ експериментальних даних $x_i$ їх математичні очікування, що розраховані за серією паралельних дослідів (для кожного значення $x_i$ за різних умов своя серія), з відповідною похибкою $s$; встановити середню похибку всього експерименту. В подальшому приблизні дійсні значення $x_i^*$ можна використовувати для математичного опису досліджуваного об'єкту, його аналізу та оптимізації.

*Завдання для самостійної роботи студентів* на відповідність розподілу нормальному закону виконувати за даними таблиці Б.1 додатка Б, як показано в прикладі 3.5, а на перевірку відтворюваності досліду – за даними додатка Г, як показано в прикладах 3.8 і 3.9.

### 3.1.5 Елементи кореляційного аналізу

В практичній роботі виникає необхідність встановлення взаємозв'язку між випадковими величинами у вигляді залежності, наприклад, математичної формули. Частина математичної статистики, що розглядає методи визначення взаємозалежностей між досліджуваними випадковими величинами, вивчається теорією кореляції (від латинського *correlatio* – співвідношення, взаємозв'язок).

---

[53] Використовується для пошуку теоретичного значення критерію за таблицею, наприклад, для перевірки відповідності отриманої за даними експерименту математичної моделі експериментальним даним за $F$-відношенням (див. приклад 3.17).

[54] За однакових умов експериментальні дані розсіюються навколо глобального (одного) математичного очікування, яке є більш наближеним до дійсного значення випадкової величини $x$.

Основними задачами кореляційного аналізу є встановлення залежності впливу значень однієї випадкової величини на значення іншої та визначення тісноти (сили) цієї залежності.

Дві величини $x$ та $y$ можуть бути пов'язані функціональною чи статистичною залежністю чи бути незалежними. При *функціональній залежності* кожному значенню однієї величини (аргумент, незалежна змінна, фактор), яку будемо позначати через $x$, відповідає певне значення другої величини (залежна змінна, змінна стану об'єкту, функція), яку будемо позначати через $y$. *Статистичною* є залежність при якій зміна випадкової величини $x$ викликає зміну розподілу[55] випадкової величини $y$. *Кореляційна* залежність являє собою статистичну[56] у випадку, коли зміна величини $x$ змінює середнє значення (математичне очікування) величини $y$.

Якщо внаслідок експерименту при кожному значенні випадкової величини $x = x_i$ ($i = 1, 2, ..., k$), випадкова величина $y$ прийняла кілька значень $y_1, y_2, ..., y_m$ (таблиця 3.16), то кореляційну залежність можна визначити як функціональну:

$$\hat{\bar{y}}_x = f(x), \tag{3.33}$$

де $\hat{\bar{y}}_x$ – прогнозне значення величини $\bar{y}_x$ за моделлю (3.33);

$\bar{y}_x = \dfrac{n_{i1}y_1 + n_{i2}y_2 + \ldots + n_{im}y_m}{n_{x_i}}$ – умовне[57] середнє значення[58] величини $y$ при $x = x_i$, котре підпорядковується дійсній (невідомій, теоретичній) функції $\bar{y}_x = \varphi(x)$[59].

Таблиця 3.16 – **Експериментальні дані**[60]

| $x$ \ $y$ | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_m$ | $n_{x_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_{11}$ | $n_{12}$ | … | $n_{1m}$ | $\sum n_{1j}$ |
| $x_2$ | $n_{21}$ | $n_{22}$ | … | $n_{2m}$ | $\sum n_{2j}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | $n_{ij}$ | ⋮ | ⋮ |
| $x_k$ | $n_{k1}$ | $n_{k2}$ | … | $n_{km}$ | $\sum n_{kj}$ |
| $n_{y_j}$ | $\sum n_{i1}$ | $\sum n_{i2}$ | … | $\sum n_{im}$ | $n = \sum n_{x_i} = \sum n_{y_j}$ |

Примітка 1. Позначення $n_{x_i}$ відповідає кількості разів (частота), в яких випадкова величина $x$ приймала значення $x_i$; $n_{y_j}$ – скільки раз величина $y$ приймала значення $y_j$; $n_{ij}$ –

[55] Див. таблицю 3.4 – в даному випадку наведено розподіл випадкової величини $x$.
[56] Кореляційна залежність є частковим випадком статистичної.
[57] Знайдене при фіксованому значенні $x_i$.
[58] Користуючись формулою (3.8) в позначеннях $y$.
[59] Функція генеральної сукупності зв'язку між значеннями випадкових величин $x$ та $y$, вигляд якої на практиці дослідник пропонує залежністю (3.33).
[60] Котрі попередньо групують за аналогією прикладу 3.4.

скільки раз спостерігалась одна й та ж пара значень ($x_i$; $y_j$) випадкових величин $x$ та $y$; $i$, $j$ – лічильники значень випадкових величин $x$ та $y$ і відповідних їх повторень.

Примітка 2. Деякі з $n_{ij}$ обов'язково мають дорівнювати нулю, в протилежному випадку кореляційна залежність відсутня.

Залежність (3.33) називають математичною моделлю (рівнянням регресії) $y$ від $x$, позначення $f(x)$ – функцією (регресією) $y$ від $x$, а її графік – лінією функції (регресії) $y$ від $x$. Аналогічно можна визначити кореляційну залежність $\bar{x}_y$ від $y$[61].

Наявність чи відсутність кореляційного зв'язку між $y$ та $x$ графічно ілюструється кореляційним полем (рисунок 3.4). Як видно з рисунку 3.4 кореляція може бути позитивною чи негативною, тобто зі збільшенням $x$ величина $y$, відповідно, збільшується чи зменшується. При відсутності кореляції значення випадкових величин розташовуються в кореляційному полі хаотично, що вказує на відсутність зв'язку між величинами $y$ та $x$.

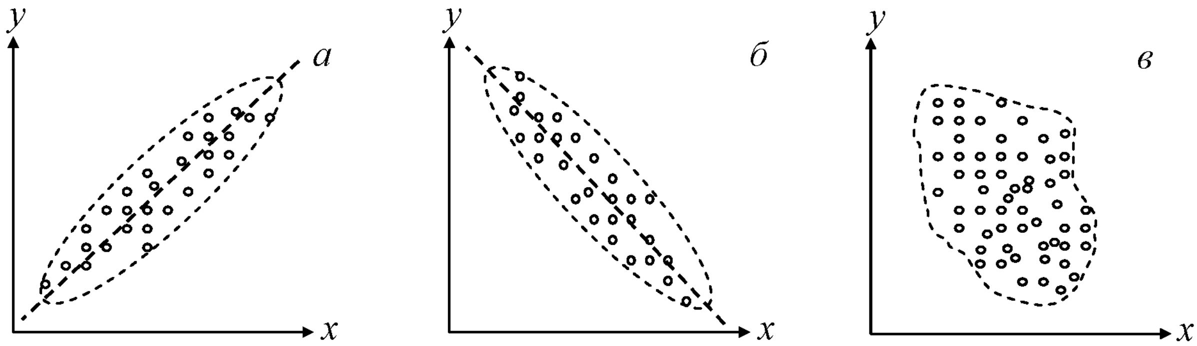



Рисунок 3.4 – **Кореляційне поле при наявності позитивної (*а*) і негативної (*б*) та відсутності (*в*) кореляції**

Нехай випадкові величини $x$ та $y$ лінійно корелюють між собою, тобто їх графіком є пряма лінія, навколо якої розташовуються експериментальні точки ($x_i$; $y_j$), тоді функція (3.33) має вигляд:

$$\hat{\bar{y}}_x = b_0 + b_1 x \tag{3.34}$$

де $b_0, b_1$– невідомі коефіцієнти[62] (параметри); їх відповідно називають – вільний член і кутовий коефіцієнт.

Пошук невідомих коефіцієнтів здійснюється за методом найменших квадратів (МНК), який детально розглянуто в (3.2.3).

[61] Як функціональну залежність $\hat{\bar{x}}_y = \psi(y)$ (*) умовного $\bar{x}_y = \dfrac{n_{1j}x_1 + n_{2j}x_2 + \ldots + n_{kj}x_k}{n_{y_j}}$ середнього арифметичного значення $x$, що відповідає значенню $y_j$ ($j$ = 1, 2, …, $m$) випадкової величини $y$, в якій: (*) – математична модель $x$ від $y$; позначення $\psi(y)$ – функція $x$ від $y$, а її графік – лінія функції $x$ від $y$.

[62] $b_0$ – значення функції при $x = 0$; $b_1$ – тангенс кута між прямою і віссю $x$.

### 3.1.5.1 Визначення параметрів лінійної моделі

Спочатку розглянемо частковий випадок для (3.34), коли різні значення $x_i$ величини $x$ і відповідні їм значення $y_i$ величини $y$ спостерігались по одному разу. В цьому випадку такі експериментальні дані ($x_i$; $y_i$) при $i$ = 1, 2, ..., $n$ немає необхідності групувати і тому не використовується поняття умовної середньої $\overline{y}_x$. Тоді аналог моделі (3.34) набуває вигляду[63]:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x, \tag{3.35}$$

де $\hat{y}$ – модельний прогноз експериментального значення $y_i$ при $x = x_i$.

Невідомі коефіцієнти $b_0, b_1$ підберемо такими, щоб точки ($x_1$; $y_1$), ($x_2$; $y_2$), ..., ($x_n$; $y_n$) побудовані за даними спостереження на площині $x0y$ розташовувались якомога ближче до прямої (3.35), тобто щоб відхилення $\varepsilon_i = \hat{y}_i - y_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $n$) були найменшими. Математично ця умова виражається МНК у вигляді:

$$\varepsilon\left(b_0, b_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 \to \min, \tag{3.36}$$

оскільки при кожному експериментальному значенні незалежної змінної $x_i$ кожне відхилення $\varepsilon_i$ значення залежної змінної $y_i$ в експерименті від його прогнозного значення $\hat{y}_i$ за (3.35) залежить від шуканих параметрів $b_0, b_1$, то й сума квадратів відхилень є функція $\varepsilon$ цих параметрів.

Для визначення коефіцієнтів $b_0, b_1$ підставимо в (3.36) модель (3.35):

$$\varepsilon\left(b_0, b_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right)^2 \tag{3.37}$$

та візьмемо від функції $\varepsilon$ (3.37) часткові похідні[64] по кожному з коефіцієнтів $b_0, b_1$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right) \cdot x_i = 0 \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} b_0 n + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \tag{3.38}$$

Формули для розрахунку коефіцієнтів отримуємо розв'язком системи (3.38) за формулами Крамера[65]:

[63] В літературі $\hat{y} = ax + b, \hat{y} = a + bx$ та інші відображають вигляд моделі (3.35) в різних позначеннях..

[64] Аналітична умова мінімізації функції (3.37), детальніше наведено в 3.2.3.1 і прикладі 3.15.

$$b_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_ix_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2},\ b_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2} \qquad (3.39)$$

За формулами (3.39) знаходимо невідомі коефіцієнти $b_0, b_1$, після підстановки яких в модель (3.35) знаходимо конкретний вид лінійної математичної моделі[66].

У випадку експериментальних даних наведених в таблиці 3.16 для визначення параметрів моделі (3.34) необхідно записати систему (3.38) з використанням поняття загальних[67] середніх величин. Для цього скористаємось тотожностями:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x};\quad \overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}y_i=n\overline{y};\quad \overline{x^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n\overline{x^2};$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}x_iy_j\ .$$

Підставляючи тотожності в систему рівнянь (3.38) отримаємо:

$$\begin{cases} nb_0 & + & \left(n\overline{x}\right)b_1 & = & n\overline{y} \\ \left(n\overline{x}\right)b_0 & + & \left(n\overline{x^2}\right)b_1 & = & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}x_iy_j \end{cases} \qquad (3.40)$$

З рівняння 1 системи (3.40) після скорочення на $n$ виразимо $b_0$:

$$b_0=\overline{y}-b_1\overline{x}\,. \qquad (3.41)$$

Після підстановки (3.41) в (3.34) за аналогією (3.33) отримаємо:

$$\hat{\overline{y}}_x=b_1x+\overline{y}-b_1\overline{x}\quad \text{чи}\quad \hat{\overline{y}}_x-\overline{y}=b_1\left(x-\overline{x}\right). \qquad (3.42)$$

Знайдемо $b_1$ із системи рівнянь (3.40) з використанням (3.11) через позначення середнього квадратичного відхилення $\sigma$ випадкової величини $x$:

---

[65] Система $\begin{cases} a_{11}b_0+a_{12}b_1=c_1 \\ a_{21}b_0+a_{22}b_1=c_2 \end{cases}$ має розв'язок: $b_0=\frac{\Delta_{b_0}}{\Delta}; b_1=\frac{\Delta_{b_1}}{\Delta}$ , де $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,

$\Delta_{b_0}=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}=c_1a_{22}-c_2a_{12}$, $\Delta_{b_1}=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}=a_{11}c_2-a_{21}c_1$.

[66] Див. приклад 3.15.

[67] За даними таблиці 3.16 розраховується загальне математичне очікування випадкових величини $x$ та $y$.

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_i y_j - n\overline{x}\cdot n\overline{y}}{n^2\overline{x^2} - \left(n\overline{x}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_i y_j - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_i y_j - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x^2} \qquad (3.43)$$

і після його підстановки в (3.42) отримаємо шукане рівняння лінійної моделі.

### 3.1.5.2 Коефіцієнт кореляції як оцінка тісноти лінійного зв'язку

Зв'язок між випадковими величинами $x$ і $y$ виражається коефіцієнтом кореляції $r_{xy}$, який характеризує тісноту лінійного зв'язку. Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною, значення якого змінюється від –1 до +1. При наближенні абсолютної величини $r_{xy}$ до нуля[68] зв'язок послаблюється, а до одиниці – тіснота зв'язку зростає. Якщо значення коефіцієнта кореляції $r_{xy} > 0$, то кореляція є позитивною, а при $r_{xy} < 0$ – негативною (рисунок 3.4).

Вираз для коефіцієнта кореляції можна отримати домноженням правої і лівої частин рівності (3.43) на $\sigma_x/\sigma_y$:

$$r_{xy} = b_1\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_i y_j - n\overline{x}\cdot\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}. \qquad (3.44)$$

Для спрощення переходу від моделі (3.33), що відображає залежність $y$ від $x$ до оберненої $\overline{x}_y = \psi(y)$, що відображає залежність $x$ від $y$ на практиці зручніше подавати модель (3.42) через коефіцієнт кореляції. Після перебудови лівої частини залежності (3.44) відносно $b_1 = r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ і підстановки в (3.42) отримаємо модель (3.34) через коефіцієнт кореляції після зведення подібних доданків:

$$\hat{\overline{y}}_x - \overline{y} = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right), \qquad (3.45)$$

де $r_{xy}$ визначається правою частиною виразу (3.44).

Аналогічно знаходимо математичну модель, що виражає обернену залежність $x$ від $y$:

$$\hat{\overline{x}}_y - \overline{x} = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}\right). \qquad (3.46)$$

---

[68] При $r_{xy} = 0$ лінійний зв'язок відсутній; при $\left|r_{xy}\right| = 1$ зв'язок є функціональним.

Оскільки моделі (3.45), (3.46), коефіцієнти $b_0, b_1$, а також коефіцієнт кореляції (3.44) отримують за експериментальними даними з генеральної сукупності, то їх називають вибірковими, емпіричними тощо.

Якщо величина коефіцієнта кореляції $r_{xy}$ значуща в статистичному сенсі, то існує зв’язок між досліджуваними змінними. Для перевірки значущості коефіцієнту кореляції найчастіше використовується розподіл Стьюдента. При цьому, якщо виконується умова

$$t_p = \frac{|r_{xy}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} > t_{табл}[q;f] \tag{3.47}$$

для рівня значущості $q = 0{,}05$ і ЧСВ $f = n-2$, то коефіцієнт кореляції є значущим і відповідно можна зробити висновок про наявність[69] зв’язку між досліджуваними величинами $x$ та $y$.

Оцінка експериментальних даних за (3.47) дає можливість в першому наближенні визначити вид математичного опису (3.45), (3.46) до постановки основного експерименту.

*Приклад* 3.10

Для заданої кореляційної таблиці 3.17 знайти вибіркові лінійні математичні моделі, що виражають залежності $y$ від $x$ та $x$ від $y$. Якщо коефіцієнт кореляції значущий в статистичному сенсі, то оцінити тісноту зв'язку між величинами $x$ і $y$.

*Розв'язок*

Для отримання математичних моделей (3.45) і (3.46) розрахуємо їх складові $\overline{x}, \overline{y}, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$. Результати допоміжних обчислень для визначення наведених складових зручно записувати в двох таблицях, що розташовані справа і знизу від вихідної кореляційної таблиці 3.17.

За значення $x_i$ випадкової величини $x$ приймемо середини інтервалів $x_1 =$ 30 (середина інтервалу 25−35), $x_2$ = 40 (середина інтервалу 35−45) тощо. Запишемо ці значення в колонку $x_i$ основної таблиці. Аналогічно визначаємо значення $y_j$ величини $y$: $y_1$ = 35, $y_2$ = 45 тощо і записуємо їх в рядок $y_j$. Частоти $n_{x_i}$, $n_{y_j}$ розраховуємо за формулами таблиці (3.16) й поміщаємо у відповідні колонку і рядок. Результати розрахунків добутків $n_{x_i}x_i$, $n_{x_i}x_i^2$, $n_{y_j}y_j$, $n_{y_j}y_j^2$ теж розташовуємо у відповідні колонку і рядок допоміжних таблиць.

[69] Якщо апріорно (попередньо) відомо, що зв'язок між $x$ та $y$ є лінійним.

Таблиця 3.17 – **Кореляційна і допоміжні («права» і «нижня») таблиці**

| | $x$ \ $y$ | 30–40 | 40–50 | 50–60 | 60–70 | 70–80 | $x_i$ | права таблиця | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $n_{x_i}$ | $n_{x_i}x_i$ | $n_{x_i}x_i^2$ | $u_i$ | $u_i\,x_i$ |
| | 25–35 | 3 | | | | | 30 | 3 | 90 | 2700 | 105 | 3150 |
| | 35–45 | 1 | 2 | | | | 40 | 3 | 120 | 4800 | 125 | 5000 |
| | 45–55 | | 3 | 5 | 7 | | 50 | 15 | 750 | 37500 | 865 | 43250 |
| | 55–65 | | | 21 | 8 | 2 | 60 | 31 | 1860 | 111600 | 1825 | 109500 |
| | 65–75 | | | 7 | 4 | 5 | 70 | 16 | 1120 | 78400 | 1020 | 71400 |
| | 75–85 | | | | | 3 | 80 | 3 | 240 | 19200 | 225 | 18000 |
| | $y_j$ | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 | | | суми | | | |
| нижня таблиця | $n_{y_j}$ | 4 | 5 | 33 | 19 | 10 | | *71* | *4180* | *254200* | | *250300* |
| | $n_{y_j}y_j$ | 140 | 225 | 1815 | 1235 | 750 | суми | *4165* | | | | |
| | $n_{y_j}y_j^2$ | 4900 | 10125 | 99825 | 80275 | 56250 | | *251375* | | | | |
| | $v_j$ | 130 | 230 | 2000 | 1110 | 710 | | | | | | |
| | $v_j\,y_j$ | 4550 | 10350 | 110000 | 72150 | 53250 | | *250300* | | | | |

Для визначення величини $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_i y_j$ в (3.44) побудуємо допоміжні колонку $u_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}y_j$ ($i$ = 1, 2, …, $k$) і рядок[70] $v_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}x_i$ ($j$ = 1, 2, …, $m$), де $k$, $m$ відповідно дорівнюють 6 і 5. Так, наприклад, $u_1 = n_{11}\cdot y_1 = 3\cdot 35 = 105$, $u_2 = n_{21}\cdot y_1 + n_{22}\cdot y_2 = 1\cdot 35 + 2\cdot 45 = 125$, …; $v_1 = n_{11}\cdot x_1 + n_{21}\cdot x_2 = 3\cdot 30 + 1\cdot 40 = 130$, $v_2 = n_{22}\cdot x_2 + n_{32}\cdot x_3 = 2\cdot 40 + 3\cdot 50 = 230$ тощо. Після чого розраховуємо добутки $u_i\,x_i$ і $v_j\,y_j$. За даними (виділені курсивом) таблиці послідовно знаходимо:

– математичні очікування

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_{x_i}x_i}{n} = \frac{4180}{71} = 58{,}87323944, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{5} n_{y_j}y_j}{n} = \frac{4165}{71} = 58{,}66197183;$$

– середні квадратичні відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} n_{x_i}x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{254200}{71} - 58{,}87323944^2} = 10{,}68753332,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} n_{y_j}y_j^2}{n} - \overline{y}^2} = \sqrt{\frac{251375}{71} - 58{,}66197183^2} = 9{,}963233343.$$

[70] Колонка і рядок є альтернативними і розраховуються сумісно для контролю обчислень.

Враховуючи, що $\sum u_i x_i = \sum v_j y_j = 250300$, знайдемо за (3.44) вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{250300 - 71 \cdot 58,87323944 \cdot 58,66197183}{71 \cdot 10,68753332 \cdot 9,963233343} = 0,673649421. \qquad (3.48)$$

Після підстановки знайдених величин в (3.45) знаходимо лінійну математичну модель $y$ від $x$:

$$\hat{\bar{y}}_x - 58,66197183 = 0,673649421 \frac{9,963233343}{10,68753332}(x - 58,87323944)$$

або після зведення подібних доданків остаточно:

$$\hat{\bar{y}}_x = 21,68982286 + 0,627995832x. \qquad (3.49)$$

Аналогічно, на основі (3.46) отримуємо лінійну модель $x$ від $y$:

$$\hat{\bar{x}}_y - 58,87323944 = 0,673649421 \frac{10,68753332}{9,963233343}(y - 58,66197183)$$

або остаточно:

$$\hat{\bar{x}}_y = 16,48281375 + 0,722621902y. \qquad (3.50)$$

Кореляційне поле і лінії функцій (3.49), (3.50) наведені на рисунку 3.5.

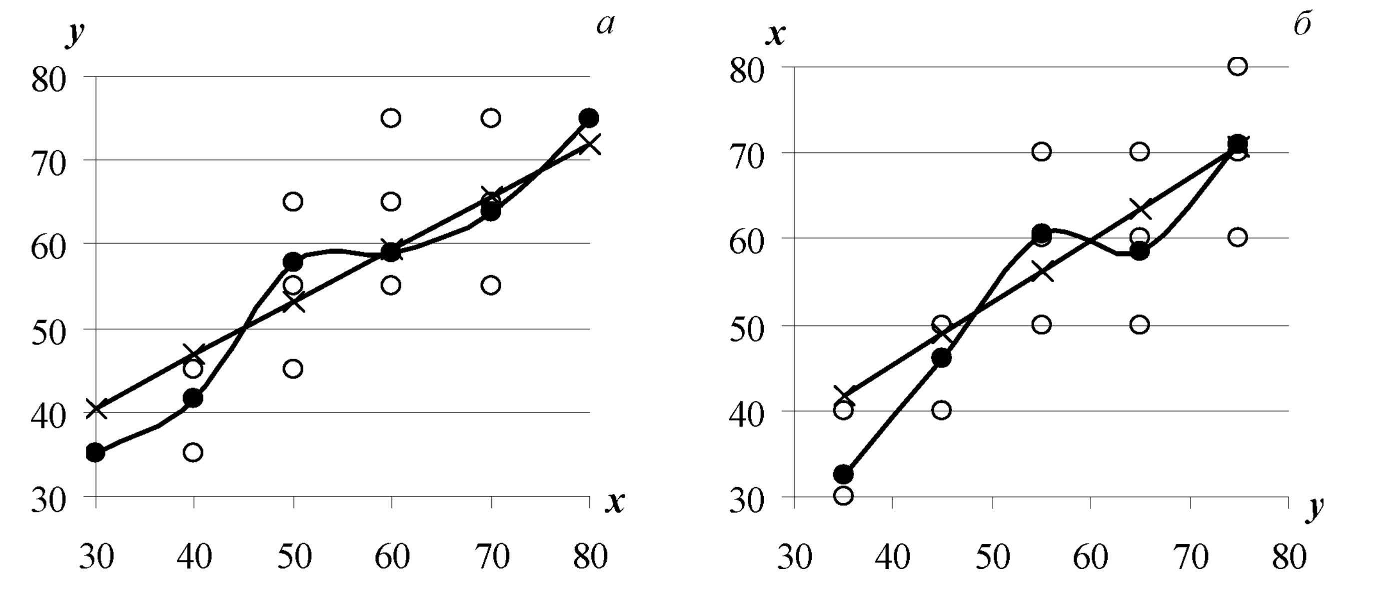



Рисунок 3.5 – **Дані експериментальні (о), побудовані за умовними середніми значеннями експериментальних величин (•) і розраховані за моделями (×) залежностей:** *а* – *y* від *x*, *б* – *x* від *y*

Порівняємо умовні середні, що розраховані за моделями (3.49), (3.50), з даними вихідної кореляційної таблиці 3.17. Для цього складемо таблиці 3.18 і 3.19.

Перевіримо статистичну значущість коефіцієнту кореляції (3.48) за правилом (3.47):

$$t_{табл} = \frac{|0{,}673649421|\sqrt{71-2}}{\sqrt{1-0{,}673649421^2}} = 10{,}24494444 > t_{табл}[5\%;69] = 1{,}99494539. \qquad (3.51)$$

Таблиця 3.18 – **Відхилення умовних середніх, що розраховані за даними експерименту $\overline{y}_x$ і моделлю $\hat{\overline{y}}_x$ (3.49)**

| $x_i$ | $\overline{y}_x$ | $\hat{\overline{y}}_x$ | $\overline{y}_x - \hat{\overline{y}}_x$ |
|---|---|---|---|
| 30 | 35 | 40,5297 | –5,5297 |
| 40 | 41,66667 | 46,80966 | –5,14299 |
| 50 | 57,66667 | 53,08961 | 4,577052 |
| 60 | 58,87097 | 59,36957 | –0,49861 |
| 70 | 63,75 | 65,64953 | –1,89953 |
| 80 | 75 | 71,92949 | 3,070511 |

Таблиця 3.19 – **Відхилення умовних середніх, що розраховані за даними експерименту $\overline{x}_y$ і моделлю $\hat{\overline{x}}_y$ (3.50)**

| $y_i$ | $\overline{x}_y$ | $\hat{\overline{x}}_y$ | $\overline{x}_y - \hat{\overline{x}}_y$ |
|---|---|---|---|
| 35 | 32,5 | 41,77458 | –9,27458 |
| 45 | 46 | 49,0008 | –3,0008 |
| 55 | 60,60606 | 56,22702 | 4,379042 |
| 65 | 58,42105 | 63,45324 | –5,03218 |
| 75 | 71 | 70,67946 | 0,320544 |

Отже коефіцієнт кореляції $r_{xy}$ = 0,673649421 за (3.51) є статистично значущим, тому його значенню можна довіряти, оскільки він його набув не за рахунок експериментальних випадковостей, наприклад, похибок вимірювання.

Таким чином, величина $r_{xy} > 0$ вказує на позитивну кореляцію, тобто зростання однієї величини викликає збільшення іншої. Коефіцієнт кореляції є мірою відповідності (адекватності) моделі експериментальним даним при їх лінійному корелюванні. При цьому чим ближче він до одиниці, тим точніше експериментальні дані наближаються до прямої і точніше описуються моделями (3.49), (3.50). За отриманими моделями є можливість прогнозувати значення залежної змінної за потрібних значень, які цікавлять дослідника. При значному відхиленні експериментальних даних від прямої йде мова про нелінійну кореляційну залежність, а при одночасному впливу кількох випадкових величин на середнє значення іншої йде мова про множинну кореляційну залежність, що розглядається нижче як задача наближення функцій.

*Завдання для самостійної роботи студентів* наведено в додатку Д.

### 3.2 Наближення функцій

Нехай деяка невідома функція $y = \varphi(x)$ задана таблицею, тобто при значеннях аргументу $x = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ функція $\varphi(x)$ приймає значення $y = y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ (таблиця 3.20).

Таблиця 3.20 – **Дані експерименту**

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | … | $y_n$ |

Задача наближення функції полягає в тому, щоб експериментальну функцію $\varphi(x)$ приблизно замінити (апроксимувати) функцією $\hat{y} = f(x)$ вигляду:

$$\hat{y} = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \ldots + b_l f_l(x), \tag{3.52}$$

де $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – невідомі коефіцієнти; $f_1, f_2, \ldots, f_l$ – відомі функції[71], від незалежної змінної $x$; $l$ – кількість складових функції ($l \le n$).

Заміну необхідно здійснити так, щоб відхилення $y - \hat{y}$ функцій $\varphi(x)$ від $f(x)$ в деякому сенсі на заданій множині $x$ було найменшим. В задачах наближення функція (3.52) називається апроксимуючою, математичною моделлю, регресією тощо.

Припустимо, що шукана апроксимуюча функція має вигляд[72]

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} \tag{3.53}$$

і критерієм її оптимальності є умова

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots f(x_n) = y_n. \tag{3.54}$$

Для визначення коефіцієнтів $b_i$ ($i$ = 0, 1, 2, ...) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з $n$ невідомими:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + \ldots + b_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2 + \ldots + b_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \\ b_0 + b_1 x_n + b_2 x_n^2 + \ldots + b_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases} \tag{3.55}$$

де $x_i$ і $y_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) – табличні значення аргументу і функції.

Розв'язавши систему (3.55), отримаємо коефіцієнти $b_i$, після підстановки яких в (3.53), знаходимо шукану апроксимуючу функцію.

[71] Наприклад, $\sin x$, $\cos x$, $x^j$ ($j$ = 0, 1, 2, ...) тощо. Так для функції $\hat{y} = b_1 + b_2 \sin(x^2) + b_3 \ell^x$ відомими функціями (ті котрі стоять після коефіцієнтів $b_j$) є $f_1 = 1, f_2 = \sin(x^2), f_3 = \ell^x$.

[72] Нумерація коефіцієнтів щодо (3.52) змінена, оскільки позначення $b_0$ стосується вільного члена, однак в загальному випадку в (3.52) це є просто відома функція $f_1(x) = 1$.

*Приклад* 3.11

Знайти апроксимуючу функцію $y = f(x)$ для експериментальних даних, наведених в таблиці

| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,3 | 8,2 | 10,7 | 11,1 | ? |

і розрахувати значення $y$ при $x = 1$.

*Розв'язок*

У нашому випадку математична модель (3.52) з використанням (3.53) набуває вигляду:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \tag{3.56}$$

Для знаходження коефіцієнтів моделі (3.56) використаємо систему (3.55), яка у нашому випадку матиме вигляд:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1^3 = y_1 \\ b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_2^3 = y_2 \\ b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 = y_3 \\ b_0 + b_1 x_4 + b_2 x_4^2 + b_3 x_4^3 = y_4 \end{cases} \tag{3.57}$$

За даними наведеної таблиці складемо систему рівнянь (3.57)

$$\begin{cases} b_0 + b_1 0{,}1 + b_2 0{,}01 + b_3 0{,}001 = 2{,}3 \\ b_0 + b_1 0{,}3 + b_2 0{,}09 + b_3 0{,}027 = 8{,}2 \\ b_0 + b_1 0{,}6 + b_2 0{,}36 + b_3 0{,}216 = 10{,}7 \\ b_0 + b_1 0{,}9 + b_2 0{,}81 + b_3 0{,}729 = 11{,}1 \end{cases} \tag{3.58}$$

Розв'язати систему[73] (3.58) можна за допомогою таких методів: визначників (формули Крамера), Гауса, оберненої матриці тощо. Скористаємось методом оберненої матриці, оскільки в будь-якому математичному пакеті, наприклад, MS Excel є функція обернення матриці[74], крім того він простий у використанні.

Систему (3.57) можна записати в матричному вигляді:

$$XB = Y\ , \tag{3.59}$$

[73] Розв'язок (3.55) можна замінити операцією зведення подібних доданків поліному Лагранжа: $\hat{y} = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} y_2 + $ $+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_3-x_n)} y_3 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n$. На практиці часто не зводять подібних доданків цього поліному, а підставляють замість $x$ необхідне значення аргументу, при якому необхідно розрахувати значення функції $y$. Така постановка задачі називається інтерполюванням функції.

[74] Раніше це було проблематично через недостатній рівень технічних засобів.

де $X = \begin{Vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}, Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix}$.

Тоді (3.59) запишемо в розгорнутому вигляді:

$$\begin{Vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix}. \qquad (3.60)$$

Коефіцієнти системи (3.59), вона ж (3.60), в матричному вигляді знаходимо після матричних перетворень:

$$B = X^{-1}Y \text{ або } \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{Vmatrix}^{-1} \times \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix}, \qquad (3.61)$$

де $^{-1}$ – операція обернення[75] матриці $X$.

Розв'язок системи (3.58) в матричному вигляді (3.61):

$$\begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0,1 & 0,01 & 0,001 \\ 1 & 0,3 & 0,09 & 0,027 \\ 1 & 0,6 & 0,36 & 0,216 \\ 1 & 0,9 & 0,81 & 0,729 \end{Vmatrix}^{-1} \times \begin{Vmatrix} 2,3 \\ 8,2 \\ 10,7 \\ 11,1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2,025 & -1,5 & 0,6 & -0,125 \\ -12,375 & 19,16666667 & -8,666666667 & 1,875 \\ 22,5 & -44,44444444 & 28,88888889 & -6,944444444 \\ -12,5 & 27,77777778 & -22,22222222 & 6,944444444 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 2,3 \\ 8,2 \\ 10,7 \\ 11,1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2,61 \\ 56,78333333 \\ -80,66666667 \\ 38,33333333 \end{Vmatrix} \qquad (3.62)$$

Розрахунки з матрицями зручно проводити в MS Excel. Приклад розрахунків наведено в додатку Е.

Підставляючи знайдені коефіцієнти (3.62) в (3.56) отримаємо шукану математичну модель

$$\hat{y} = -2,61 + 56,78333333x - 80,66666667x^2 + 38,33333333x^3 \qquad (3.63)$$

Спрогнозуємо значення залежної змінної $y$ при $x = 1$[76]. З цією метою підставимо значення $x = 1$ в модель (3.63):

---

[75] Виконується в MS Excel функцією: =МОБР(массив).

$$\hat{y} = -2{,}61 + 56{,}78333333 \cdot 1 - 80{,}66666667 \cdot 1^2 + 38{,}33333333 \cdot 1^3 = 11{,}84 .$$

Перевагою такого підходу є повний збіг[77] значень залежної змінної (рисунок 3.6), що отримані експериментально $y_i$ і за моделлю (3.63) $\hat{y}_i$, при всіх експериментальних даних $x_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $n$). Однак, це не означає, що функція (3.63) веде себе як дійсна при значеннях $x$ відмінних від $x_i$. До недоліків можна віднести значну кількість складових моделі $f_i(x)$ (3.53), які дорівнюють кількості експериментальних точок $n$, що призводить до значного зростання рівнянь в системі (3.55), ускладнює її розв’язання і викликає незручності в користуванні моделлю (3.53).

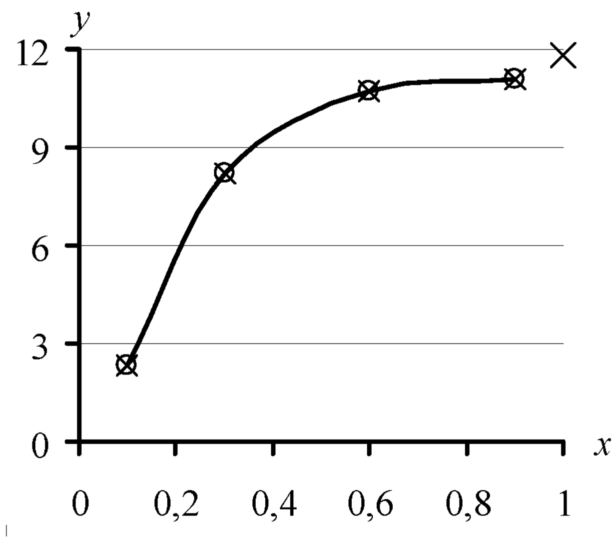


Рисунок 3.6 – **Експериментальні дані (о), розраховані за моделлю (3.59) і прогнозне значення при $x$ = 1 (×)**

Усунути цей недолік можна використанням методу Чебишева, в якому умова (3.54) замінюється на умову (3.36) – залишкова сума[78] $SS_{зал}$ прямує до мінімуму. При цьому порядок моделі (3.53) знижується зі збереженням точності передбачення за моделлю.

*Завдання для самостійної роботи студентів* виконувати за даними таблиці Е.1 додатка Е.

---

[76] За поліномом Лагранжа: $\hat{y} = \frac{(1-0{,}3)(1-0{,}6)(1-0{,}9)}{(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}6)(0{,}1-0{,}9)} 2{,}3 + \frac{(1-0{,}1)(1-0{,}6)(1-0{,}9)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}6)(0{,}3-0{,}9)} 8{,}2 +$

$+ \frac{(1-0{,}1)(1-0{,}3)(1-0{,}9)}{(0{,}6-0{,}1)(0{,}6-0{,}3)(0{,}6-0{,}9)} 10{,}7 + \frac{(1-0{,}1)(1-0{,}3)(1-0{,}6)}{(0{,}9-0{,}1)(0{,}9-0{,}3)(0{,}9-0{,}6)} 11{,}1 = 11{,}84 .$

[77] Властивість насиченого плану експерименту: кількість експериментальних даних дорівнює кількості коефіцієнтів моделі.

[78] Критерій МНК $\varepsilon$ називають також залишковою сумою. Необхідно зазначити, що складовими будь-якої дисперсії $s^2$ випадкової величини $x$ є *сума квадратів відхилень* її значень $x_i$ від їх математичного очікування $\bar{x}$, яка буде позначатись через $SS$ і *число ступенів вільності f*, котре, взагалі, прив'язує значення величини дисперсії до кількості експериментальних даних, за якими це значення було отримано, і до кількості допоміжних величин (накладених зв'язків), які допомогли визначити це значення. Тому $s^2 = SS/f$, де індексами можна вказати тип дисперсії (залишкова, навколо середнього, регресійна) чи величину ($x$, $y$, $b_j$), до якої вона відноситься.

### 3.2.1 Апроксимація функції за способом Чебишева

Якщо апроксимуючу функцію взяти у вигляді багаточлена степеня $l \le n-1$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_l x^l, \tag{3.64}$$

то, зі збільшенням степеня цього багаточлену, зазвичай, можна отримати будь-який ступінь наближення.

За способом Чебишева апроксимуючий багаточлен (3.64) шукається не безпосередньо у вигляді суми складових $b_i x^i$, а у вигляді $a_i f_i(x)$, де $f_i(x)$ є багаточленом виду (3.64) степеня $i$, причому додавання нових складових не змінює[79] коефіцієнти при попередніх складових (властивість ортогональності). Запишемо шуканий багаточлен[80] у вигляді:

$$\hat{y} = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_l f_l(x), \tag{3.65}$$

де

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_1(x) = x + \alpha_1^{(1)} \\ f_2(x) = x^2 + \alpha_1^{(2)} x + \alpha_2^{(2)} \\ f_3(x) = x^3 + \alpha_1^{(3)} x^2 + \alpha_2^{(3)} x + \alpha_3^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_l(x) = x^l + \alpha_1^{(l)} x^{l-1} + \alpha_2^{(l)} x^{l-2} + \ldots + \alpha_l^{(l)} \end{cases} \tag{3.66}$$

Багаточлени (3.66) задовольняють умовам:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} f_j(x_i) \cdot f_k(x_i) = 0 \quad (j \ne k) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[ f_j(x_i) \right]^2 \ne 0 \qquad (j = 0,1,2,\ldots l) \end{cases} \tag{3.67}$$

і називаються ортогональними багаточленами Чебишева.

Для виконання умови (3.67) необхідно підібрати параметри $\alpha_i^{(j)}$ ($j$ = 1, 2, …, $l$; $i$ = 1, 2, …, $j$), що залежать від значень незалежної змінної $x$, які забезпечують діагональність інформаційної матриці[81] $I$. Під час першого

[79] Можна виключити складову $f_j(x)$, при цьому коефіцієнти $a_i$ ($i$ = 1, 2, …, $l$; $i \ne j$) не змінять своїх значень.

[80] Введені позначення коефіцієнтів $a_0$, $a_1$, ... $a_l$ в зв'язку з тим, що їх значення відрізняються від відповідних $b_0$, $b_1$, ..., $b_l$, але останні отримаємо внаслідок зведення подібних доданків функції (3.65).

[81] Див. визначення інформаційної матриці $I$, вектора відомих функцій $f^T(x)$ , узагальненої матриці $F$ в п. 3.2.3.

ознайомлення з матеріалом можна пропустити його частину до формули (3.70), оскільки цей матеріал наведено для пояснення властивості ортогональності.

На основі апроксимуючої функції (3.65) степеня ($l$–1) вектор відомих функцій запишеться так:

$$f^T(x) = \left\| f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_{l-1}(x) \right\|. \tag{3.68}$$

За даними значень незалежної змінної $x$ (план експерименту) з врахуванням вектора $f^T(x)$ складемо узагальнену матрицю $F$:

| $x$ | Узагальнена за видом моделі (3.68) матриця $F$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $f_1=f_0(x)$ | $f_2=f_1(x)$ | $f_3=f_2(x)$ | … | $f_l=f_{l-1}(x)$ |
| $x_1$ | 1 | $x_1+\alpha_1^{(1)}$ | $x_1^2+\alpha_1^{(2)}x_1+\alpha_2^{(2)}$ | … | $x_1^{l-1}+\alpha_1^{(l-1)}x_1^{l-2}+\alpha_2^{(l-1)}x_1^{l-3}+\ldots+\alpha_{l-1}^{(l-1)}$ |
| $x_2$ | 1 | $x_2+\alpha_1^{(1)}$ | $x_2^2+\alpha_1^{(2)}x_2+\alpha_2^{(2)}$ | … | $x_2^{l-1}+\alpha_1^{(l-1)}x_2^{l-2}+\alpha_2^{(l-1)}x_2^{l-3}+\ldots+\alpha_{l-1}^{(l-1)}$ |
| $x_3$ | 1 | $x_3+\alpha_1^{(1)}$ | $x_3^2+\alpha_1^{(2)}x_3+\alpha_2^{(2)}$ | … | $x_3^{l-1}+\alpha_1^{(l-1)}x_3^{l-2}+\alpha_2^{(l-1)}x_3^{l-3}+\ldots+\alpha_{l-1}^{(l-1)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_n$ | 1 | $x_n+\alpha_1^{(1)}$ | $x_n^2+\alpha_1^{(2)}x_n+\alpha_2^{(2)}$ | … | $x_n^{l-1}+\alpha_1^{(l-1)}x_n^{l-2}+\alpha_2^{(l-1)}x_n^{l-3}+\ldots+\alpha_{l-1}^{(l-1)}$ |

На основі матриці $F$ запишемо інформаційну матрицю $I$:

$$I = F^T F = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_l \end{array} \begin{array}{ccccc} f_1 & f_2 & f_3 & \ldots & f_l \\ \left\| \begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^{n}[f_0(x_i)]^2 & \sum_{i=1}^{n} f_0(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{n} f_0(x_i) f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_0(x_i) f_{l-1}(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{n}[f_1(x_i)]^2 & \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_{l-1}(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} f_2(x_i) f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{n} f_2(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{n}[f_2(x_i)]^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} f_2(x_i) f_{l-1}(x_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} f_{l-1}(x_i) f_0(x_i) & \sum_{i=1}^{n} f_{l-1}(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{n} f_{l-1}(x_i) f_2(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n}[f_{l-1}(x_i)]^2 \end{array} \right\| \end{array}$$

Тоді інформаційна матриця на момент введення в модель (3.65) поточної складової $f_l(x)$ буде мати наступні недіагональні блоки відмінні від нуля:

$$
I = \begin{array}{c|cccccc|}
 & f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_l & f_{l+1} \\
\hline
f_1 & \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_0(x_i)\right]^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} f_0(x_i) f_l(x_i) \\
f_2 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_1(x_i)\right]^2 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_l(x_i) \\
f_3 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_2(x_i)\right]^2 & \cdots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} f_2(x_i) f_l(x_i) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
f_l & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_{l-1}(x_i)\right]^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} f_{l-1}(x_i) f_l(x_i) \\
f_{l+1} & \sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i) f_0(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i) f_1(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i) f_2(x_i) & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i) f_{l-1}(x_i) & \sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_l(x_i)\right]^2
\end{array}
$$

Система рівнянь для визначення поточних параметрів $\alpha_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \ldots, l$), які ортогоналізують інформаційну матрицю $I$ при введенні складової $f_l(x)$ в рівняння (3.65), за відомими на поточний момент параметрами $\alpha_i^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, l{-}1$; $i = 1, 2, \ldots, j$), буде мати вигляд:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i)\cdot f_0(x_i) & = & 0 \\
\sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i)\cdot f_1(x_i) & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} f_l(x_i)\cdot f_{l-1}(x_i) & = & 0
\end{cases}
$$

чи в розгорнутому вигляді з врахуванням (3.66) і зведенням подібних доданків:

$$
\begin{cases}
\alpha_1^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-1} f_0(x_i) + \alpha_2^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-2} f_0(x_i) + \ldots + \alpha_l^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{0} f_0(x_i) & = & -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l} f_0(x_i) \\
\alpha_1^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-1} f_1(x_i) + \alpha_2^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-2} f_1(x_i) + \ldots + \alpha_l^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{0} f_1(x_i) & = & -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l} f_1(x_i) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_1^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-1} f_{l-1}(x_i) + \alpha_2^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l-2} f_{l-1}(x_i) + \ldots + \alpha_l^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{0} f_{l-1}(x_i) & = & -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{l} f_{l-1}(x_i)
\end{cases}
\qquad (3.69)
$$

Для спрощення розрахунків визначення коефіцієнтів $\alpha_i^{(l)}$ розв'язок системи (3.69) можна замінити альтернативною операцією[82] – зведенням подібних доданків «породжуючого» полінома. Рекурентна формула, що дозволяє розраховувати наступний із багаточленів (3.66) за двома попередніми, яка для зручності обчислень навожиться не для складової $f_l(x)$, а для $f_{l+1}(x)$ має вигляд[83]:

$$f_{l+1}(x)=(x+\beta_{l+1})\,f_l(x)+\gamma_{l+1}f_{l-1}(x),\quad (l=1,2,3,\ldots), \tag{3.70}$$

де коефіцієнти $\beta_{l+1}$ і $\gamma_{l+1}$ розраховують за формулами:

$$\beta_{l+1}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\left[f_l(x_i)\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_l(x_i)\right]^2},\quad \gamma_{l+1}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i f_{l-1}(x_i)\,f_l(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_{l-1}(x_i)\right]^2}. \tag{3.71}$$

Для визначення $\beta_{l+1}$ і $\gamma_{l+1}$ за формулами (3.71) необхідно тільки визначити суми степенів $x_i$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_l(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^{2l}+\alpha_1^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{2l-1}+\ldots+\alpha_l^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{l}; \tag{3.72}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i f_{l-1}(x_i)\,f_l(x_i) = \sum_{i=1}^{n}x_i^{2l}+\alpha_1^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{2l-1}+\ldots+\alpha_l^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{l}; \tag{3.73}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left[f_l(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^{2l+1}+\alpha_1^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{2l}+\ldots+\alpha_l^{(l)}\sum_{i=1}^{n}x_i^{l+1}+\alpha_1^{(l)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[f_l(x_i)\right]^2\right] \tag{3.74}$$

Коефіцієнти $a_0$, $a_1,\ldots$, $a_l$, з врахуванням діагональної інформаційної матриці $I$, визначаються за формулою:

$$a_l=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i f_l(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_l(x_i)\right]^2},\quad (l=0,1,2,3,\ldots). \tag{3.75}$$

Розрахунок знаменника цієї формули виконується відповідно до (3.72), а чисельник розраховується так:

---

[82] Оскільки для всіх многочленів (3.66), окрім властивості (3.67), виконується наступна: частка від ділення многочленів $f_l(x)/f_{l-1}(x)$ є $(x+\beta_l)$ із залишком $\gamma_l f_{l-2}(x)$, де $\beta_l$, $\gamma_l$ деякі сталі.

[83] В позначеннях системи (3.69):

$$\beta_l=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^l f_{l-1}(x_i)+\alpha_1^{(l)}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{l-1}f_{l-1}(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{l-1}f_{l-1}(x_i)}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\left[f_{l-1}(x_i)\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_{l-1}(x_i)\right]^2},\ \gamma_l=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{l-1}f_{l-1}(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{l-2}f_{l-2}(x_i)}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i f_{l-1}(x_i)f_{l-2}(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_{l-2}(x_i)\right]^2}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_l(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^l + \alpha_1^{(l)} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^{l-1} + \ldots + \alpha_l^{(l)} \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (3.76)$$

Підставивши знайдені таким чином коефіцієнти $a_0$, $a_1$,…, $a_l$ і складові $f_0(x)$, $f_1(x)$,…, $f_l(x)$ в (3.65), після спрощення, отримаємо шуканий апроксимуючий багаточлен (поліном) $l$ степеня (3.64). Якщо точність досягнута поліномом $l$ степеня не задовольняє нас, то можна побудувати поліном ($l$+1) степеня. Для цього необхідно за формулами (3.70) і (3.71) побудувати складову $f_{l+1}(x)$, а за формулою (3.75) розрахувати коефіцієнт $a_{l+1}$, потім знайти добуток $a_{l+1}f_{l+1}(x)$ і додати його до правої частини полінома (3.65).

*Приклад* 3.12

Підібрати загальний вид апроксимуючої залежності та визначити її параметри за способом Чебишева, для опису результатів експерименту з дослідження залежності межі міцності при розтягу біополімеру ($\sigma_p$, *МПа*) від вмісту в ньому пластифікатора (*m*, *%*) за даними таблиці 3.21.

Таблиця 3.21 – **Результати дослідів**

| *m, %* | x | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_p$, *МПа* | y | 7,0 | 8,75 | 10,15 | 11,23 | 11,8 | 12,0 |

*Розв'язок*

Аргумент (незалежну змінну) *m* позначимо через *x*, а функцію (вихідну змінну) $\sigma_p$ – через *y*. Необхідні для розрахунків дані наведено в таблиці 3.22.

Таблиця 3.22 – **Дані для розрахунків за способом Чебишева**

| *n* | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i x_i$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $y_i x_i^2$ | $x_i^5$ | $x_i^6$ | $y_i x_i^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 7 | 4 | 14 | 8 | 16 | 28 | 32 | 64 | 56 |
| 2 | 4 | 8,75 | 16 | 35 | 64 | 256 | 140 | 1024 | 4096 | 560 |
| 3 | 7 | 10,15 | 49 | 71,05 | 343 | 2401 | 497,35 | 16807 | 117649 | 3481,45 |
| 4 | 11 | 11,23 | 121 | 123,53 | 1331 | 14641 | 1358,83 | 161051 | 1771561 | 14947,13 |
| 5 | 16 | 11,8 | 256 | 188,8 | 4096 | 65536 | 3020,8 | 1048576 | $1{,}677722\cdot10^7$ | 48332,8 |
| 6 | 22 | 12 | 484 | 264 | 10648 | 234256 | 5808 | 5153632 | $1{,}133799\cdot10^8$ | 127776 |
| $\sum$ | 62 | 60,93 | 930 | 696,38 | 16490 | 317106 | 10852,98 | 6381122 | $1{,}320505\cdot10^8$ | 195153,4 |

Побудуємо спочатку поліном першого порядку:

$$\hat{y} = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) \qquad (3.77)$$

*Визначимо коефіцієнт* $\alpha_1$. Із складових (3.66) маємо: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x + \alpha_1$. Враховуючи властивість ортогональності (3.67) складових можна записати:

$$\sum_{i=1}^{n} f_0(x_i)\cdot f_1(x_i)=0;\quad \sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i+\alpha_1)=0;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i+n\alpha_1=0;\quad \alpha_1=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Оскільки $n = 6$, то $\alpha_1=-\frac{1}{n}\sum x_i=-\frac{1}{6}\cdot 62=-10,33333$. Тоді $f_1(x)=x-10,33333$. Тепер знайдемо $a_0$ и $a_1$ за формулою (3.75) з врахуванням формул (3.76) і (3.72) (для простоти запису індекси сум упущені):

$$a_0=\frac{\sum y_i f_0(x_i)}{\sum\left[f_0(x_i)\right]^2}=\frac{\sum y_i x_i^0}{\sum x_i^0}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{60,93}{6}=10,155;$$

$$a_1=\frac{\sum y_i f_1(x_i)}{\sum\left[f_1(x_i)\right]^2}=\frac{\sum y_i x_i+\alpha_1^{(1)}\sum y_i}{\sum x_i^2+\alpha_1^{(1)}\sum x_i}=\frac{696,38-10,33333\cdot 60,93}{930-10,33333\cdot 62}=\frac{66,7702}{289,3333}=0,2307721.$$

Апроксимуючий багаточлен (3.77) набуде вигляду:

$\hat{y}=10,155+0,2307721(x-10,33333)$ чи після перетворень:

$$\hat{y}=7,770355+0,2307721x. \tag{3.78}$$

Визначимо точність формули (3.78). Для цього знайдемо залишкову суму квадратів $SS_{зал}^{(1)}$, що являє собою суму квадратів різниці дослідних даних $y_i$ і значень $\hat{y}_i$, розрахованих за формулою (3.78). Результати розрахунків наведені в таблиці 3.23.

Таблиця 3.23 – **Оцінка точності формули (3.78)**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $y_i-\hat{y}_i$ | $(y_i-\hat{y}_i)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 7,00 | 8,232 | –1,232 | 1,5176 |
| 2 | 4 | 8,75 | 8,693 | 0,057 | 0,0032 |
| 3 | 7 | 10,15 | 9,386 | 0,764 | 0,5841 |
| 4 | 11 | 11,23 | 10,309 | 0,921 | 0,8485 |
| 5 | 16 | 11,80 | 11,463 | 0,337 | 0,1138 |
| 6 | 22 | 12,00 | 12,847 | –0,847 | 0,7180 |
| $SS_{зал}^{(1)}$ | | | | | 3,7851 |

Побудуємо тепер апроксимуючий поліном другого порядку:

$$\hat{y}=a_0 f_0(x)+a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x), \tag{3.79}$$

для чого знайдемо $f_2(x)$ і $a_2$. Складову $f_2(x)$ побудуємо з використанням рекурентної формули (3.70) у вигляді:

$$f_2(x)=(x+\beta_2)f_1(x)+\gamma_2 f_0(x).$$

Для цього спочатку визначимо значення $\beta_2$ і $\gamma_2$ за формулами (3.71).

При обчисленні $\beta_2$ чисельник і знаменник розраховуються відповідно за формулами (3.74) і (3.72), необхідно замітити, що знаменник був розрахований раніше. Тоді знаходимо:

$$\beta_2 = -\frac{\sum x_i\left[f_1(x_i)\right]^2}{\sum\left[f_1(x_i)\right]^2} = -\frac{\sum x_i^3 + \alpha_1^{(1)}\sum x_i^2 + \alpha_1^{(1)}\left[\sum x_i^2 + \alpha_1^{(1)}\sum x_i\right]}{\sum x_i^2 + \alpha_1^{(1)}\sum x_i},$$

$$\beta_2 = -\frac{16490 - 10{,}33333\cdot 930 - 10{,}33333\left[289{,}3333\right]}{289{,}3333} = -13{,}44547\,.$$

При обчисленні $\gamma_2$ за формулами (3.73) і (3.72) маємо[84]:

$$\gamma_2 = -\frac{\sum x_i f_0(x_i) f_1(x_i)}{\sum\left[f_0(x_i)\right]^2} = -\frac{\sum x_i^2 + \alpha_1^{(1)}\sum x_i}{\sum x_i^0} = -\frac{289{,}3333}{6} = -48{,}22223\,.$$

Підставивши в (3.70) знайдені значення $\beta_2$, $\gamma_2$ і $f_1(x) = x - 10{,}33333$ та $f_0(x) = 1$ отримаємо:

$$f_2(x) = (x - 13{,}44547)(x - 10{,}33333) - 48{,}22223 = x^2 - 23{,}7788x + 90{,}71429$$

Формула (3.75) для обчислення $a_2$ з врахуванням формул (3.76) і (3.72) буде мати вигляд:

$$a_2 = \frac{\sum y_i f_2(x_i)}{\sum\left[f_2(x_i)\right]^2} = \frac{\sum y_i x_i^2 + \alpha_1^{(2)}\sum y_i x_i + \alpha_2^{(2)}\sum y_i}{\sum x_i^4 + \alpha_1^{(2)}\sum x_i^3 + \alpha_2^{(2)}\sum x_i^2}$$

$$a_2 = \frac{10852{,}98 - 23{,}7788\cdot 696{,}38 + 90{,}71429\cdot 60{,}93}{317106 - 23{,}7788\cdot 16490 + 90{,}71429\cdot 930} = \frac{-178{,}8809}{9357{,}833} = -1{,}911563\cdot 10^{-2}.$$

Таким чином, апроксимуючий поліном (3.79) набуває вигляду:

$$\hat{y} = 7{,}770355 + 0{,}2307721x - 1{,}911563\cdot 10^{-2}\left(x^2 - 23{,}7788x + 90{,}71429\right)$$

чи після алгебраїчних перетворень:

$$\hat{y} = 6{,}036294 + 0{,}685319x - 1{,}911563\cdot 10^{-2}x^2. \qquad (3.80)$$

Розрахуємо залишкову суму $SS_{зал}^{(2)}$ квадратів відхилень дослідних значень $y_i$ від значень $\hat{y}_i$, знайдених за формулою (3.80). Результати обчислень наведені в таблиці 3.24.

Порівнюючи точність наближення дослідних даних поліномами (3.78) і (3.80), бачимо, що (3.80) дає точніше наближення ($SS_{зал}^{(2)} < SS_{зал}^{(1)}$).

Тепер побудуємо апроксимуючий поліном третього порядку:

$$\hat{y} = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x), \qquad (3.81)$$

---

[84] При обчисленні $\gamma_l$ за формулою (3.71) чисельник і знаменник на даний момент вже розраховано вище.

для чого знайдемо $f_3(x)$ і $a_3$.

Таблиця 3.24 – **Оцінка точності формули (3.80)**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $y_i-\hat{y}_i$ | $(y_i-\hat{y}_i)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 7,00 | 7,330 | –0,330 | 0,1092 |
| 2 | 4 | 8,75 | 8,472 | 0,278 | 0,0774 |
| 3 | 7 | 10,15 | 9,897 | 0,253 | 0,0641 |
| 4 | 11 | 11,23 | 11,262 | –0,032 | 0,0010 |
| 5 | 16 | 11,80 | 12,108 | –0,308 | 0,0947 |
| 6 | 22 | 12,00 | 11,861 | 0,139 | 0,0192 |
| $SS_{зал}^{(2)}$ | | | | | 0,3657 |

За рекурентною формулою (3.70) отримаємо вираз для $f_3(x)$:

$$f_3(x)=(x+\beta_3)f_2(x)+\gamma_3 f_1(x)$$

За формулами (3.71) маємо:

$$\beta_3=-\frac{\sum x_i\left[f_2(x_i)\right]^2}{\sum\left[f_2(x_i)\right]^2}=-\frac{\sum x_i^5+\alpha_1^{(2)}\sum x_i^4+\alpha_2^{(2)}\sum x_i^3+\alpha_1^{(2)}\left[\sum x_i^4+\alpha_1^{(2)}\sum x_i^3+\alpha_2^{(2)}\sum x_i^2\right]}{\sum x_i^4+\alpha_1^{(2)}\sum x_i^3+\alpha_2^{(2)}\sum x_i^2},$$

$$\beta_3=-\frac{6381122-23{,}7788\cdot 317106+90{,}71429\cdot 16490-23{,}7788\cdot\left[9357{,}833\right]}{9357{,}833}=-12{,}19102,$$

$$\gamma_3=-\frac{\sum x_i f_1(x_i)f_2(x_i)}{\sum\left[f_1(x_i)\right]^2}=-\frac{\sum\left[f_2(x_i)\right]^2}{\sum\left[f_1(x_i)\right]^2}=-\frac{9357{,}833}{289{,}3333}=-32{,}34274.$$

Тоді вираз для $f_3(x)$ набуває вигляду:

$$f_3(x)=(x-12{,}19102)\left(x^2-23{,}7788x+90{,}71429\right)-32{,}34274(x-10{,}33333)=$$

$$x^3-35{,}96982x^2+348{,}2594x-771{,}6915$$

Обчислимо коефіцієнт $a_3$ на основі (3.75):

$$a_3=\frac{\sum y_i f_3(x_i)}{\sum\left[f_3(x_i)\right]^2}=\frac{\sum y_i x_i^3+\alpha_1^{(3)}\sum y_i x_i^2+\alpha_2^{(3)}\sum y_i x_i+\alpha_3^{(3)}\sum y_i}{\sum x_i^6+\alpha_1^{(3)}\sum x_i^5+\alpha_2^{(3)}\sum x_i^4+\alpha_3^{(3)}\sum x_i^3},$$

$$a_3=\frac{195153{,}4-35{,}96982\cdot 10852{,}98+348{,}2594\cdot 696{,}38-771{,}6915\cdot 60{,}93}{1{,}320505\cdot 10^8-35{,}96982\cdot 6381122+348{,}2594\cdot 317106-771{,}6915\cdot 16490}=$$

$$=\frac{275{,}3145}{232615{,}7}=1{,}183559\cdot 10^{-3}.$$

Після підстановки $f_3(x)$ і $a_3$ в (3.81) маємо:

$$\hat{y}=\left(6{,}036294+0{,}685319x-1{,}911563\cdot10^{-2}x^2\right)+1{,}183559\cdot10^{-3}\left(x^3-35{,}96982x^2+348{,}2594x-771{,}6915\right)$$

чи після алгебраїчних перетворень:

$$\hat{y}=5{,}122951+1{,}097505x-6{,}168805\cdot10^{-2}x^2+1{,}183559\cdot10^{-3}x^3\,. \qquad (3.82)$$

Обчислимо залишкову суму $SS^{(3)}_{зал}$ квадратів відхилень дослідних значень $y_i$ від значень $\hat{y}_i$, знайдених за формулою (3.82). Результати розрахунків наводяться в таблиці 3.25.

Таблиця 3.25 – **Оцінка точності формули (3.82)**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $y_i-\hat{y}_i$ | $\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 7,00 | 7,081 | –0,081 | 0,0065 |
| 2 | 4 | 8,75 | 8,602 | 0,148 | 0,0220 |
| 3 | 7 | 10,15 | 10,189 | –0,039 | 0,0015 |
| 4 | 11 | 11,23 | 11,307 | –0,077 | 0,0059 |
| 5 | 16 | 11,80 | 11,739 | 0,061 | 0,0038 |
| 6 | 22 | 12,00 | 12,014 | –0,014 | 0,0002 |
| $SS^{(3)}_{зал}$ | | | | | $3{,}9798\cdot10^{-2}$ |

Порівнюючи точність наближення дослідних даних поліномів (3.80) і (3.82), бачимо, що (3.82) дає ще точніше наближення ($SS^{(3)}_{зал}$ < $SS^{(2)}_{зал}$). Точність прогнозу за моделями (3.78), (3.80) і (3.82) наведено на рисунку 3.7. Якщо досягнута точність не задовольняє, можна побудувати поліном четвертого порядку. Встановлено, що, за звичай, зменшення залишкової суми $SS_{зал}$ відбувається до тих пір, поки кількість оцінюваних коефіцієнтів моделі $l \le n$, а на далі спостерігається швидке зростання[85] $SS_{зал}$ або ж, рідко, її почергове зменшення та збільшення[86].

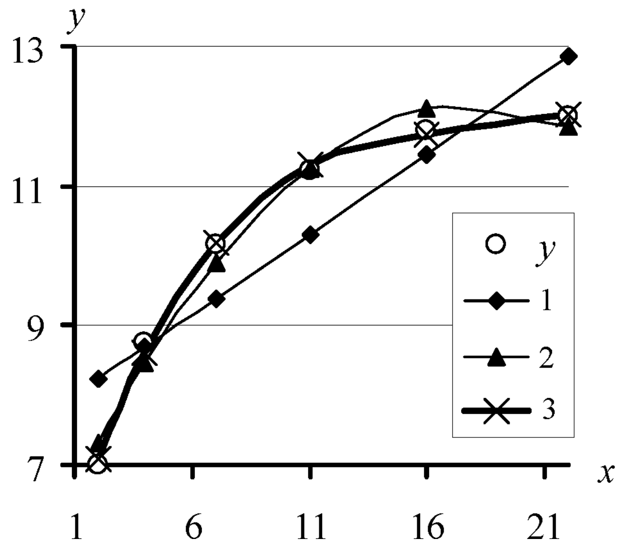



Рисунок 3.7 – **Дані експериментальні (о) і розраховані за моделями:** 1 (3.78), 2 (3.80), 3 (3.82)

[85] Також впливає точність (одинарна – 32 біт, подвійна – 64 біта тощо) розрахунку на ПК.

[86] Це пояснюється тим, що розрахунок коефіцієнтів $a_i$ здійснюється за окремою формулою, яка виводиться з МНК для випадку діагональної дисперсійної матриці $D$. За МНК для оцінки $l$ коефіцієнтів моделі необхідно поставити $n$ різних дослідів, причому $n \ge l$.

Зупиняючись на поліномі[87] 3 порядку емпірична[88] математична модель, що відображає залежність межі міцності при розтягу біополімеру ($\sigma_p$, *МПа*) від вмісту в ньому пластифікатора ($m$, *%*), матиме вигляд:

$$\sigma_p = 5{,}122951 + 1{,}097505\, m - 6{,}168805\cdot 10^{-2} m^2 + 1{,}183559\cdot 10^{-3} m^3.$$

*Примітка.* Для спрощення розрахунків залишкових сум $SS_{зал}^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, l$) можна скористатись рекурентною формулою (3.84), а для перевірки адекватності (відповідності) експериментально-статистичної моделі (3.65) експериментальним даним можна скористатись наступним прийомом:

– розраховується залишкова дисперсія для полінома $l$ порядку за формулою:

$$S_{l\,зал}^2 = \frac{SS_{зал}^{(l)}}{n-l-1}, \tag{3.83}$$

де суми квадратів відхилень залишків $SS_{зал}^{(l)}$, що розраховуються за рекурентною формулою:

$$SS_{зал}^{(l)} = SS_{зал}^{(l-1)} - a_l^2 \sum_{i=1}^{n} f_l^2(x_i), \tag{3.84}$$

необхідно тільки раніше підрахувати $SS_{зал}^{(0)}$:

$$SS_{зал}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a_0 f_0(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} \tag{3.85}$$

– суттєвість переходу від поліномів степенів ($l$–1) до $l$ перевіряється за критерієм Фішера

$$F_p = \frac{S_{l-1\,зал}^2}{S_{l\,зал}^2}. \tag{3.86}$$

Якщо виконується умова

$$F_p > F_{теор}[q\%, f_1, f_2], \tag{3.87}$$

де $F_p$ і $F_{теор}$ – відповідно розрахункове і теоретичне (табличне) значення критерію Фішера, що знаходиться за таблицею (додаток В, таблиця В.6) при степенях вільності $f_1 = n - l$; $f_2 = n - l - 1$, то рівняння $l$ порядку є суттєвим уточненням рівняння ($l$–1) порядку і необхідно далі підвищувати порядок полінома до ($l$+1).

---

[87] Для моделі $\hat{y} = a_0 + a_1(x - 10{,}33333) + a_2(x^2 - 23{,}7788x + 90{,}71429) + a_3(x^3 - 35{,}96982x^2 + 348{,}2594x - 771{,}6915)$ інформаційна матриця $I$, а отже і дисперсійна $D$ є діагональною, тому коефіцієнти $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ не взаємозв'язані між собою в моделі, тобто виключення будь-якої складової $f_j(x)$ не змінює значень інших коефіцієнтів.

[88] Отримана за даними експерименту, її складові, за звичай, не мають фізичного сенсу.

У випадку *рівновіддалених значень аргументу* формули для розрахунків коефіцієнтів $\alpha_i^{(j)}$ ($j$ = 1, 2, …, $l$; $i$ = 1, 2, …, $j$) і $a_i$ ($i$ = 1, 2, …, $l$) значно спрощуються.

Нехай результати дослідів, що наведені у таблиці 3.20, рівні фактору $x$ є рівновіддаленими:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h, \quad \text{тобто} \quad x_{i+1} = x_1 + ih, \quad (i = 0,1,2,...,n),$$

де $h$ – шаг апроксимації.

Тоді параметри $\alpha_i^{(j)}$ ($j$ = 1, 2, …, $l$; $i$ = 1, 2, …, $j$) ортогональних багаточленів $f_j(x)$ (3.66) залежить тільки від кількості експериментальних даних $n$, якщо провести заміну змінних

$$z = \frac{x - x_1}{h} + 1. \tag{3.88}$$

У цьому випадку кожне значення $x_i$ заміниться своїм номером, тобто $z_i = i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$), і апроксимуючий поліном (3.65) запишеться у вигляді:

$$\hat{y} = \tilde{a}_0 f_0(z) + \tilde{a}_1 f_1(z) + \ldots + \tilde{a}_l f_l(z). \tag{3.89}$$

Багаточлени Чебишева визначаються за формулами:

$$\begin{cases} f_0(z) = 1 \\ f_1(z) = z - \dfrac{n+1}{2} \\ f_2(z) = z^2 - (n+1)z + \dfrac{(n+1)(n+2)}{6} \\ f_3(z) = z^3 - \dfrac{3(n+1)}{2} z^2 + \dfrac{6n^2+15n+11}{10} z - \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{20} \\ f_4(z) = z^4 - 2(n+1)z^3 + \dfrac{9n^2+21n+4}{7} z^2 - \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+10)}{7} z + \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{70} \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ f_{l+1}(z) = f_1(z) f_l(z) - \dfrac{l^2(n^2-l^2)}{4(4l^2-1)} f_{l-1}(z) \end{cases} \tag{3.90}$$

Коефіцієнти поліному (3.89) визначаються за формулами:

$$\tilde{a}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_1(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_1^2(z_i)}, \quad \ldots, \quad \tilde{a}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i f_l(z_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_l^2(z_i)} \tag{3.91}$$

Суми, що розташовані в знаменнику (3.91), можна визначити за скороченою формулою:

$$\sum_{i=1}^{n} f_l^2(z_i) = \sum_{i=1}^{n} f_l^2(i) = \frac{(l!)^2 n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-l^2)}{\left[(2l-1)!!\right]^2 2^{2l}(2l+1)}, \qquad (3.92)$$

де $(2l-1)!!$ – добуток всіх непарних чисел від 1 до $2l-1$ включно. Так, наприклад:

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^2(i) = \frac{n(n^2-1)}{12},$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_2^2(i) = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{180},$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_3^2(i) = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{2800},$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_4^2(i) = \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)}{44100}$$

Суми (3.92) використовуються і для розрахунків сум $SS_{зал}^{(l)}$, необхідних для обчислення залишкової дисперсії (3.83):

$$SS_{зал}^{(l)} = SS_{зал}^{(l-1)} - \tilde{a}_l^2 \sum_{i=1}^{n} f_l^2(i) \qquad (3.93)$$

Після отримання моделі (3.89) змінну $z$, з врахуванням (3.88), знову замінюють вихідною змінною $x$ і таким чином переходять до (3.65), а після зведення подібних доданків до (3.64).

*Приклад* 3.13

Знайти залежність ізобарної теплоємкості $c_p$, Дж/(моль·К) ізобутану від температури $T$, К. Експериментальні дані наведені в таблиці 3.26.

Таблиця 3.26 – **Експериментальна залежність $c_p = \varphi(T)$**

| $T$ | 340 | 380 | 420 | 460 | 500 | 540 | 580 | 620 | 660 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_p$ | 108,7 | 119,5 | 129,7 | 139,4 | 148,5 | 157,2 | 165,5 | 173,3 | 180,6 |

*Розв'язок*

Температура фіксувалась через рівні інтервали 40 К (***h*** = 40). Для встановлення залежності $c_p = \varphi(T)$ проведено 9 дослідів ($n$ = 9). З врахуванням (3.88) зробимо заміну змінних за формулою:

$$z = \frac{T - 300}{40}. \tag{3.94}$$

Одночасно для зручності обчислень замінимо $c_p$ на $y$:

$$y = c_p - 108{,}7. \tag{3.95}$$

Отримані значення $z_i$, $y_i$ і необхідні для розрахунків дані: $f_j(z_i)$ і $y_i f_j(z_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, 9$; $j = 1, 2, 3$) наведені в таблиці 3.27.

Таблиця 3.27 – **Дані для розрахунків за способом Чебишева**
(при рівновіддалених значеннях аргументу)

| $z_i = i$ | $y_i$ | $f_1(i)$ | $y_i f_1(i)$ | $y_i^2$ | $f_2(i)$ | $y_i f_2(i)$ | $f_3(i)$ | $y_i f_3(i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | –4 | 0 | 0 | 9,33333 | 0 | –16,8 | 0 |
| 2 | 10,8 | –3 | –32,4 | 116,64 | 2,33333 | 25,19996 | 8,4 | 90,72 |
| 3 | 21 | –2 | –42 | 441 | –2,66667 | –56,0001 | 15,6 | 327,6 |
| 4 | 30,7 | –1 | –30,7 | 942,49 | –5,66667 | –173,967 | 10,8 | 331,56 |
| 5 | 39,8 | 0 | 0 | 1584,04 | –6,66667 | –265,333 | 0 | 0 |
| 6 | 48,5 | 1 | 48,5 | 2352,25 | –5,66667 | –274,833 | –10,8 | –523,8 |
| 7 | 56,8 | 2 | 113,6 | 3226,24 | –2,66667 | –151,467 | –15,6 | –886,08 |
| 8 | 64,6 | 3 | 193,8 | 4173,16 | 2,33333 | 150,7331 | –8,4 | –542,64 |
| 9 | 71,9 | 4 | 287,6 | 5169,61 | 9,33333 | 671,0664 | 16,8 | 1207,92 |
| Σ | 344,1 | | 538,4 | 18005,43 | | –74,6011 | | 5,288 |

Визначимо коефіцієнти поліному 1 порядку:

$$\hat{y} = \tilde{a}_0 f_0(z) + \tilde{a}_1 f_1(z) \tag{3.96}$$

За формулами (3.90), підставляючи $n = 9$ знаходимо:

$$f_0(z) = 1; \quad f_1(z) = z - \frac{9+1}{2} = z - 5.$$

За формулами (3.91) знаходимо:

$$\tilde{a}_0 = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{344{,}1}{9} = 38{,}23333.$$

Для знаходження $\tilde{a}_1$ за (3.92) знаходимо:

$$\sum f_1^2(i) = \frac{n(n^2 - 1)}{12} = \frac{9(9^2 - 1)}{12} = 60,$$

тоді за (3.91) маємо:

$$\tilde{a}_1 = \frac{\sum y_i f_1(i)}{\sum f_1^2(i)} = \frac{538{,}4}{60} = 8{,}97333$$

Апроксимуючий поліном (3.96) набуває вигляду:

$$\hat{y} = 38{,}23333 + 8{,}97333(z - 5). \tag{3.97}$$

Визначимо залишкову дисперсію $s^2_{1зал}$. Для цього за формулами (3.85) і (3.93) розрахуємо суми:

$$SS^{(0)}_{зал} = \sum_{i=1}^{9} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{9} y_i\right)^2}{9} = 18005,43 - \frac{344,1^2}{9} = 4849,34;$$

$$SS^{(1)}_{зал} = SS^{(0)}_{зал} - \tilde{a}_1^2 \sum f_1^2(i) = 4849,34 - 8,97333^2 \cdot 60 = 18,09666$$

звідки

$$s^2_{1зал} = \frac{SS^{(1)}_{зал}}{n-2} = \frac{18,09666}{7} = 2,585237.$$

Побудуємо тепер апроксимуючий поліном 2 порядку:

$$\hat{y} = \tilde{a}_0 f_0(z) + \tilde{a}_1 f_1(z) + \tilde{a}_2 f_2(z) \tag{3.98}$$

і знайдемо $f_2(z)$ і $\tilde{a}_2$.

За формулою (3.90) $f_2(z)$ дорівнює:

$$f_2(z) = z^2 - (9+1)z + \frac{(9+1)(9+2)}{6} = z^2 - 10z + 18,33333.$$

За формулою (3.92) знаходимо

$$\sum f_2^2(i) = \frac{9(9^2-1)(9^2-4)}{180} = 308$$

і визначаємо:

$$\tilde{a}_2 = \frac{\sum y_i f_2(i)}{\sum f_2^2(i)} = \frac{-74,6011}{308} = -0,2422071.$$

Таким чином, апроксимуючий поліном (3.98) набуває вигляду:

$$\hat{y} = 38,23333 + 8,97333(z-5) - 0,2422071(z^2 - 10z + 18,33333). \tag{3.99}$$

Визначимо залишкову дисперсію $s^2_{2зал}$ за (3.83) з врахуванням (3.93):

$$s_2^2 = \frac{SS^{(2)}_{зал}}{n-3} = \frac{SS^{(1)}_{зал} - \tilde{a}_2^2 \sum f_2^2(i)}{n-3} = \frac{18,09666 - (-0,2422071)^2 \cdot 308}{9-3}$$

$$= \frac{2,805889 \cdot 10^{-2}}{6} = 4,676481 \cdot 10^{-3}.$$

Перевіримо значущість розбіжності $s^2_{1зал}$ і $s^2_{2зал}$ за критерієм Фішера (3.87):

$$F_p = \frac{2,585237}{4,676481 \cdot 10^{-3}} = 552,82 \quad >> \quad F_{табл}[5\%; 7; 6] = 4,21,$$

отже, поліном другого порядку (3.99) є суттєвим уточненням поліному першого порядку (3.97). Знайдемо модель третього порядку:

$$\hat{y} = \tilde{a}_0 f_0(z) + \tilde{a}_1 f_1(z) + \tilde{a}_2 f_2(z) + \tilde{a}_3 f_3(z). \qquad (3.100)$$

Підставляючи $n = 9$ в формулу (3.90) знаходимо:

$$f_3(z) = z^3 - \frac{3(9+1)}{2}z^2 + \frac{6\cdot 9^2 + 15\cdot 9 + 11}{10}z - \frac{(9+1)(9+2)(9+3)}{20} = z^3 - 15z^2 + 63{,}2z - 66.$$

За формулою (3.92) знаходимо:

$$\sum f_3^2(i) = \frac{9(9^2-1)(9^2-4)(9^2-9)}{2800} = 1425{,}6$$

звідки:

$$\tilde{a}_3 = \frac{5{,}288}{1425{,}6} = 3{,}709204 \cdot 10^{-3}$$

і поліном третього порядку матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 38{,}23333 + 8{,}97333(z-5) - 0{,}2422071(z^2 - 10z + 18{,}33333) + \\ &+ 3{,}709204\cdot 10^{-3}(z^3 - 15z^2 + 63{,}2z - 66)\end{aligned} \qquad (3.101)$$

чи після алгебраїчних перетворень:

$$\hat{y} = -11{,}3186 + 11{,}62983z - 0{,}2978452z^2 + 3{,}709204\cdot 10^{-3}z^3. \qquad (3.102)$$

Перевіримо суттєвість переходу від поліному другого порядку (3.99) до третього порядку (3.101). Для цього знаходимо:

$$s_{3\,зал}^2 = \frac{SS_{зал}^{(3)}}{n-4} = \frac{SS_{зал}^{(2)} - \tilde{a}_3^2 \sum f_3^2(i)}{n-4} = \frac{2{,}805889\cdot 10^{-2} - (3{,}709204\cdot 10^{-3})^2 \cdot 1425{,}6}{9-4} =$$

$$= \frac{8{,}445201\cdot 10^{-3}}{5} = 1{,}68904\cdot 10^{-3}.$$

Перевіримо значущість розбіжностей $s_{2\,зал}^2$ і $s_{3\,зал}^2$ за критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{4{,}676481\cdot 10^{-3}}{1{,}68904\cdot 10^{-3}} = 2{,}77 \quad < \quad F_{табл}[5\%;6;5] = 4{,}95.$$

Перехід від полінома другого порядку до третього не суттєвий, однак оскільки $SS_{зал}^{(3)} < SS_{зал}^{(2)}$, отже необхідно зупинитися на поліномі третього порядку (3.102).

Після зворотної заміни $y$ на $c_p$ за (3.95) та $z$ на $T$ за (3.94), з виразу (3.102) отримаємо:

$$c_p - 108,7 = -11,3186 + 11,62983\left(\frac{T-300}{40}\right) - 0,2978452\left(\frac{T-300}{40}\right)^2 +$$
$$+3,709204\cdot 10^{-3}\left(\frac{T-300}{40}\right)^3$$

чи після алгебраїчних перетворень:

$$c_p = -8,179026 + 0,4182014T - 2,385529\cdot 10^{-4}T^2 + 5,811687\cdot 10^{-8}T^3. \qquad (3.103)$$

Оцінимо передбачувану здатність моделі (3.103) в результаті розрахунків за нею. Результати розрахунків наведені в таблиці 3.28.

Таблиця 3.28 – **Оцінка точності формули (3.103)**

| $i$ | $T_i$ | $c_{p_i}$ | $\hat{c}_{p_i}$ | $c_{p_i} - \hat{c}_{p_i}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 340 | 108,7 | 108,72 | 0,02 |
| 2 | 380 | 119,5 | 119,48 | –0,02 |
| 3 | 420 | 129,7 | 129,69 | –0,01 |
| 4 | 460 | 139,4 | 139,37 | –0,03 |
| 5 | 500 | 148,5 | 148,55 | 0,05 |
| 6 | 540 | 157,2 | 157,24 | 0,04 |
| 7 | 580 | 165,5 | 165,47 | –0,03 |
| 8 | 620 | 173,3 | 173,26 | –0,04 |
| 9 | 660 | 180,6 | 180,63 | 0,03 |

Таким чином, для рівновіддалених значень аргументу, розрахунки за способом Чебишева значно спрощуються: пошук складових $f_j(z)$, діагональні елементи дисперсійної матриці (3.2.3) $\sum_{i=1}^{n} f_j^2(z_i)$ залежать від кількості експериментальних даних *n*, а коефіцієнти $\tilde{a}_j$ залежать також від експериментальної ситуації. Ця обставина дозволяє протабулювати $f_j(z)$ та $\sum_{i=1}^{n} f_j^2(z_i)$, де $j$ = 1, 2, …, $l$ залежно від $n$ і порядку полінома $l$, який розраховується.

Розрахунки прикладу 3.13 в MS Excel за програмою і *завдання для самостійної роботи студентів* наведені в додатку Ж.

### 3.2.2 Приведення нелінійної моделі до виду лінійної за параметрами

Зі збільшенням порядку поліному ускладнюється вид математичної моделі. При цьому в практичній роботі досить часто зустрічаються логарифмічні, показникові тощо нелінійні залежності, котрі описуються простішими математичними формулами і є зручнішими у використанні. Коефіцієнти таких нелінійних моделей можна знаходити за вищенаведеним, часто лінійним, поліномом (3.52) після спеціальних перетворень вихідних даних.

Під час аналізу і опису закономірностей хімічних і фізико-хімічних процесів і явищ за експериментальними даними (таблиця 3.20) емпіричну формулу[89] найчастіше приходиться вибирати серед функцій, найтиповіші криві яких та відповідні їм формули наведено на рисунку 3.8: *а)* степенева, причому при $b_1 > 0$ залежність параболічна, при $b_1 < 0$ – гіперболічна; *б)* показникова; *в)* і *г)* дробово-раціональні; *д)* логарифмічна; *е)* гіперболічна чи лінійної *ж)* $y = b_0 + b_1 x$. Тут $b_0$ і $b_1$ – параметри, які необхідно визначити.

Для визначення виду емпіричної формули необхідно за даними таблиці 3.20 в системі координат $x0y$ нанести точки $(x_i, y_i)$, провести між ними усереднену криву, яка має назву лінії тренду[90], і порівняти її з відомими кривими (окремі неправильності при цьому ігноруються).

На практиці, за звичай, з використанням ЕОМ визначають невідомі коефіцієнти всіх емпіричних формул та вибирають ту, котра характеризується мінімальною залишковою сумою $SS_{зал}$. Однак, є аналітичний критерій (приклад 3.14) вибору емпіричних формул серед наведених для даної експериментальної ситуації (таблиця 3.20). Але такий підхід до вибору математичної залежності не універсальний через завжди присутні похибки експерименту, а також відсутність апріорної інформації про те, що експериментальні дані підлягають під дію саме формул *а–ж*.

Розрахунок невідомих коефіцієнтів $b_0$ і $b_1$ моделей *а–е* може виявитись досить трудомістким внаслідок необхідності розв'язання системи нелінійних рівнянь. Розрахунки спрощуються, якщо провести заміну змінних і таким чином привести ці моделі до виду лінійного за параметрами, а потім невідомі коефіцієнти $b_0$ і $b_1$ визначити одним із відомих методів апроксимації, наприклад за способом Чебишева, формулами (3.39) і нижчерозглянутим МНК (3.2.3).

---

[89] Аналітичний вираз залежності $y = f(x)$, параметри якого відшукуються за даними експерименту, прийнято називати емпіричною формулою.

[90] Тренд – це лінія навколо якої групуються дослідні (експериментальні) дані.

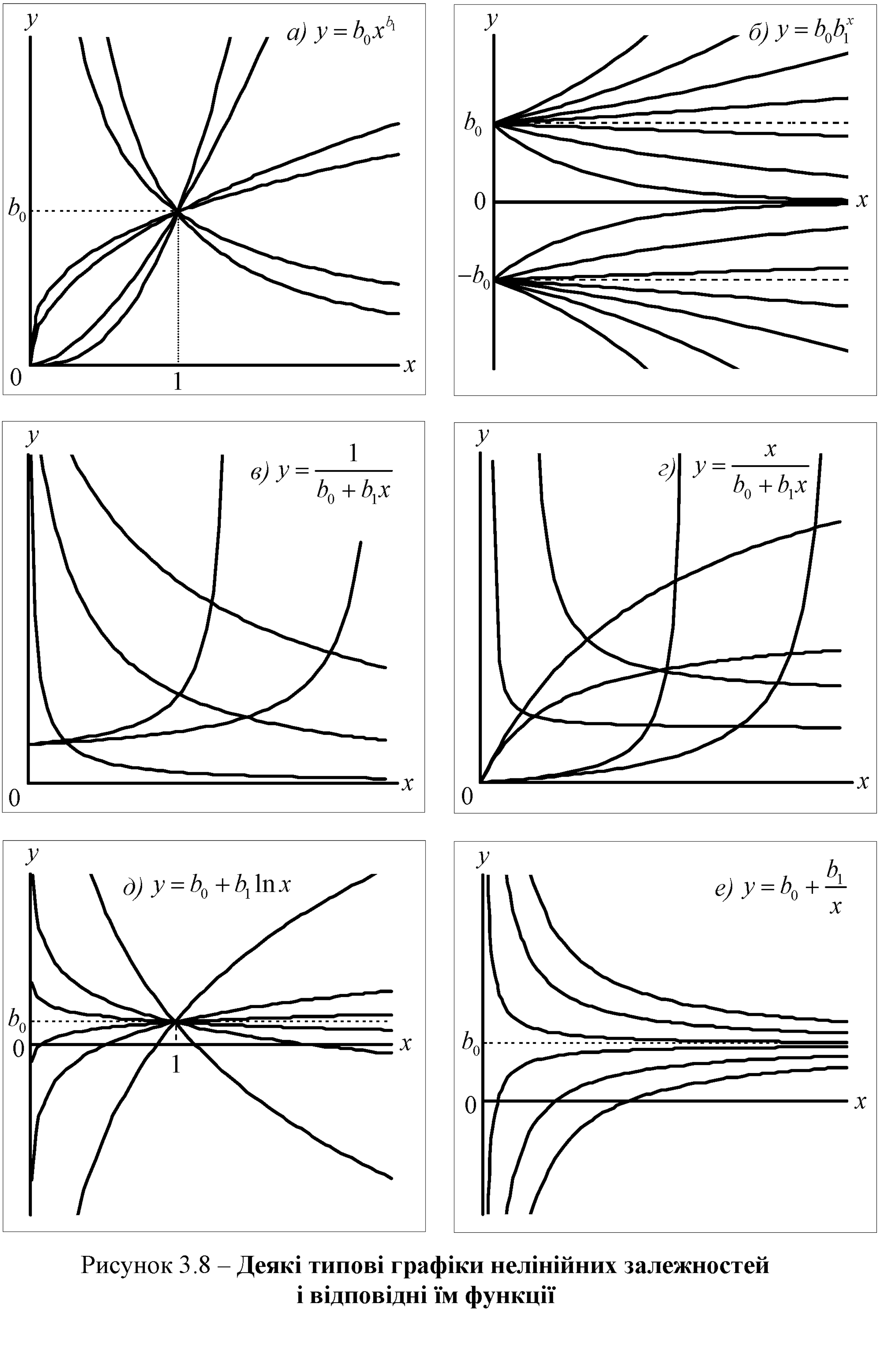



Рисунок 3.8 – **Деякі типові графіки нелінійних залежностей і відповідні їм функції**

Покажемо, як розглянуті нелінійні залежності *а–е* перетворенням координат зводяться до моделі, лінійної за параметрами, а точніше прямої.

*Показникову лінійну залежність* $y = b_0 b_1^x$ логарифмують: $\ln y = \ln b_0 + x \ln b_1$.

Після введення нових змінних:

$$Y = \ln y, A = \ln b_0, B = \ln b_1 \tag{3.104}$$

будемо мати рівняння прямої

$$Y = A + Bx . \tag{3.105}$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів $b_0$ і $b_1$ необхідно:

– експериментальні дані, що наведені в таблиці 3.20, перевести в систему координат $x0Y$ за даними таблиці 3.29.

Таблиця 3.29 – **Лінеаризовані дані експерименту для показникової функції**

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $\ln y_1$ | $\ln y_2$ | $\ln y_3$ | … | $\ln y_n$ |

– переконатися в тому, що дані находяться в показниковій залежності можна, якщо за даними таблиці 3.29 побудувати графік в системі координат $x0Y$, який має бути схожим на пряму, інакше експериментальні дані не пов'язані показниковою залежністю;

– за даними таблиці 3.29 розрахувати невідомі коефіцієнти $A$ і $B$ лінійної моделі (3.105);

– скориставшись формулами (3.104), провести зворотне перетворення в систему координат $x0y$, визначивши шукані коефіцієнти за формулами: $b_0 = \ell^A$, $b_1 = \ell^B$.

*Дробово-раціональну* функцію $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x}$ перетворити в лінійну можна наступним чином. Запишемо зворотну залежність $\dfrac{1}{y} = b_0 + b_1 x$, після чого введемо нову змінну:

$$Y = \frac{1}{y} \tag{3.106}$$

і отримаємо залежність вигляду:

$$Y = b_0 + b_1 x . \tag{3.107}$$

Таким чином, перетворивши дані таблиці 3.20 в систему координат $x0Y$ за формулою (3.106) і розрахувавши невідомі коефіцієнти $b_0$ і $b_1$ отримаємо шукану дробово-раціональну емпіричну формулу.

Для *логарифмічної залежності* $y = b_0 + b_1 \ln x$ введемо нову змінну $X = \ln x$. Тоді отримаємо лінійну залежність $y = b_0 + b_1 X$. Визначивши коефіцієнти за аналогією, наприклад, з дробово-раціональною функцією, отримаємо шукану залежність.

Маючи *степеневу залежність* $y = b_0 x^{b_1}$ ($b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $x > 0$, $y > 0$), логарифмуємо її: $\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x$. Прийнявши до уваги $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = \ln b_0$, отримаємо рівняння прямої:

$$Y = A + b_1 X. \tag{3.108}$$

Таким чином, якщо встановлено, що дані таблиці 3.20 описуються степеневою залежністю, то для визначення невідомих коефіцієнтів $b_0$ і $b_1$ необхідно:

– експериментальні дані, наведені в таблиці 3.20, перевести в систему координат $X0Y$, наведену в таблиці 3.30.

Таблиця 3.30 – **Лінеаризовані дані експерименту для степеневої функції**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $\ln x_1$ | $\ln x_2$ | $\ln x_3$ | … | $\ln x_n$ |
| $Y$ | $\ln y_1$ | $\ln y_2$ | $\ln y_3$ | … | $\ln y_n$ |

– перевірити чи дійсно $x$ і $y$ зв’язані степеневою залежністю можливо, якщо побудувати за даними таблиці 3.30 графік і якщо він приймає вигляд прямої, то зв'язок між змінними $x$ і $y$ степеневий;

– за даними таблиці 3.30 розраховувати невідомі коефіцієнти $A$ і $b_1$ лінійної моделі (3.108);

– зворотне перетворення виконуємо за формулою: $b_0 = \ell^A$, а коефіцієнт $b_1$ визначений в попередньому пункті.

*Гіперболічну залежність* $y = b_0 + \dfrac{b_1}{x}$ перетворюємо в лінійну, введенням нової змінної $X = \dfrac{1}{x}$ і діємо, наприклад, як у випадку дробово-раціональної функції.

Для *дробово-раціональної* функції вигляду $y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$ запишемо спочатку зворотну $\dfrac{x}{y} = b_0 + b_1 x$, потім введемо нову змінну $Y = \dfrac{x}{y}$, після чого отримаємо лінійну залежність $Y = b_0 + b_1 x$. Таким чином, перетворивши дані таблиці 3.20 в систему координат $x0Y$ і визначивши за отриманими даними коефіцієнти лінійної моделі знаходимо невідомі коефіцієнти $b_0$ і $b_1$ шуканої емпіричної формули.

Вище наведений алгоритм лінеаризації формул *а–е* зведено в таблицю 3.31.

Таблиця 3.31 – **Перетворення нелінійних залежностей в лінійні моделі**

| Формула | Заміна | Лінійна модель | Зворотне перетворення |
|---|---|---|---|
| $y = b_0 x^{b_1}$ | $Y = \ln y,\ X = \ln x,\ A = \ln b_0$ | $Y = A + b_1 X$ | $b_0 = \ell^A$ |
| $y = b_0 b_1^x$ | $Y = \ln y, A = \ln b_0, B = \ln b_1$ | $Y = A + Bx$ | $b_0 = \ell^A,\ b_1 = \ell^B$ |
| $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x}$ | $Y = \dfrac{1}{y}$ | $Y = b_0 + b_1 x$ | – |
| $y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$ | $Y = \dfrac{x}{y}$ | $Y = b_0 + b_1 x$ | – |
| $y = b_0 + b_1 \ln x$ | $X = \ln x$ | $y = b_0 + b_1 X$ | – |
| $y = b_0 + \dfrac{b_1}{x}$ | $X = \dfrac{1}{x}$ | $y = b_0 + b_1 X$ | – |

*Приклад* 3.14

Залежність концентрації парів оцтової кислоти ($y$, моль) від її концентрації в рідині ($x$, моль) подана наступними експериментальними даними в таблиці 3.32. Визначити вигляд емпіричної формули і підібрати її невідомі параметри.

Таблиця 3.32 – **План експерименту і результати дослідів**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,10 | 0,195 | 0,29 | 0,385 | 0,48 | 0,575 | 0,67 | 0,765 | 0,86 |
| $y$ | 0,570 | 0,744 | 0,831 | 0,882 | 0,918 | 0,941 | 0,952 | 0,975 | 0,987 |

*Розв'язок*

Для того, щоб визначити якою функцією *а–ж* краще всього описуються дані експерименту, скористаємося *аналітичним*[91] підходом, відповідно до якого необхідно виконати наступні розрахунки:

• За даними таблиці 3.32 знайти:

[91] Експериментальні дані $x_i$ і $y_i$ мають бути більшими за нуль, інакше якщо всі $x_i < 0$ чи $y_i < 0$, то достатньо відповідні дані замінити на $-x_i$ чи $-y_i$. У випадку, якщо тільки деякі значення $x_i$, $y_i < 0$, то завжди можна підібрати такі числа $M > 0$ і $N > 0$ при яких $\lambda_i = M + x_i > 0$, $\nu_i = N + y_i > 0$, і тоді задача зводиться до пошуку емпіричної формули для позитивних значень $\lambda_i$ і $\nu_i$ ($i = 1, 2, ..., n$).

– середнє арифметичне значень $x_1$ і $x_n$ та $y_1$ і $y_n$

$$x_{ар} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{0,10 + 0,86}{2} = 0,48; \qquad y_{ар} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{0,57 + 0,987}{2} = 0,778;$$

– середнє геометричне

$$x_{геом} = \sqrt{x_1 x_n} = \sqrt{0,1 \cdot 0,86} = 0,293; \qquad y_{геом} = \sqrt{y_1 y_n} = \sqrt{0,57 \cdot 0,987} = 0,75;$$

– середнє гармонічне

$$x_{гарм} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 0,86}{0,1 + 0,86} = 0,179; \quad y_{гарм} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 0,57 \cdot 0,987}{0,57 + 0,987} = 0,723.$$

• За даними таблиці 3.32, користуючись, наприклад, інтерполяційною формулою чи за приблизно побудованим графіком шуканої функції, навколо якої групуються дослідні точки $(x_i, y_i)$, знайти значення $y^*_{ар}, y^*_{геом}, y^*_{гарм}$, відповідні знайденим вище значенням $x_{ар}, x_{геом}, x_{гарм}$. Причому, якщо, наприклад, $x_{ар}$ (чи $x_{геом}, x_{гарм}$) співпадає з табличним значенням $x_i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$), то відповідне значення $y^*_{ар}$ (чи $y^*_{геом}, y^*_{гарм}$) буде дорівнювати табличному значенню $y_i$, в протилежному випадку $y^*_{ар}$ (чи $y^*_{геом}, y^*_{гарм}$) можна розрахувати, користуючись формулою лінійної інтерполяції:

$$y^*_{ар} = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\left(x_{ар} - x_i\right), \tag{3.109}$$

де $x_i$, $x_{i+1}$ – значення таблиці 3.32, між якими знаходиться $x_{ар}$, тобто $x_i < x_{ар} < x_{i+1}$; $y_i < y^*_{ар} < y_{i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$.

Оскільки $x_{ар} = 0,48$ є в таблиці 3.32, то $y^*_{ар} = 0,918$.

Оскільки $x_{геом} = 0,293$ немає в таблиці 3.32, то знаходячи в ній межі інтервалу по $x$: $0,29 < x_{геом} < 0,385$ і, відповідно, по $y$: $0,831 < y^*_{геом} < 0,882$ маємо

$$y^*_{геом} = 0,831 + \frac{0,882 - 0,831}{0,385 - 0,29}\left(0,293 - 0,29\right) = 0,833.$$

Оскільки $x_{гарм} = 0,179$ немає в таблиці 3.32, то знаходячи в ній межі інтервалу по $x$: $0,10 < x_{гарм} < 0,195$ і, відповідно, по $y$: $0,570 < y^*_{гарм} < 0,744$ маємо

$$y^*_{гарм} = 0,57 + \frac{0,744 - 0,57}{0,195 - 0,1}\left(0,179 - 0,1\right) = 0,715.$$

• Знайти величини: $\varepsilon_а = \left|y^*_{геом} - y_{геом}\right|$, $\varepsilon_б = \left|y^*_{ар} - y_{геом}\right|$, $\varepsilon_в = \left|y^*_{ар} - y_{гарм}\right|$, $\varepsilon_г = \left|y^*_{гарм} - y_{гарм}\right|$; $\varepsilon_д = \left|y^*_{геом} - y_{ар}\right|$, , $\varepsilon_е = \left|y^*_{гарм} - y_{ар}\right|$, $\varepsilon_ж = \left|y^*_{ар} - y_{ар}\right|$.

| $\varepsilon_а$ | $\varepsilon_б$ | $\varepsilon_в$ | $\varepsilon_г$ | $\varepsilon_д$ | $\varepsilon_е$ | $\varepsilon_ж$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,083 | 0,168 | 0,195 | *0,008* | 0,055 | 0,063 | 0,14 |

і серед них визначити мінімальне значення $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7\} = \varepsilon_г$.

• Вибрати емпіричну формулу серед функцій *а–ж*:

якщо *а)* $\varepsilon = \varepsilon_а$, то $y = b_0 x^{b_1}$; *б)* $\varepsilon = \varepsilon_б$, то $y = b_0 b_1^x$; *в)* $\varepsilon = \varepsilon_в$, то $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x}$; *г)* $\varepsilon = \varepsilon_г$, то $y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$; *д)* $\varepsilon = \varepsilon_д$, то $y = b_0 + b_1 \ln x$; *е)* $\varepsilon = \varepsilon_е$, то $y = b_0 + \dfrac{b_1}{x}$; *ж)* $\varepsilon = \varepsilon_ж$, то $y = b_0 + b_1 x$.

*Примітка.* Необхідно враховувати, що всі функції є монотонними і дослідні дані $(x_i, y_i)$ при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, що відповідають їм, повинні мати постійний знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. В протилежному випадку залежності *а–ж* не використовуються.

Таким чином, емпірична формула, що описує експериментальні дані, наведені в таблиці 3.32, має загальний вигляд $y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$, на що вказує також графічний спосіб[92] вибору емпіричної формули (рисунок 3.9).

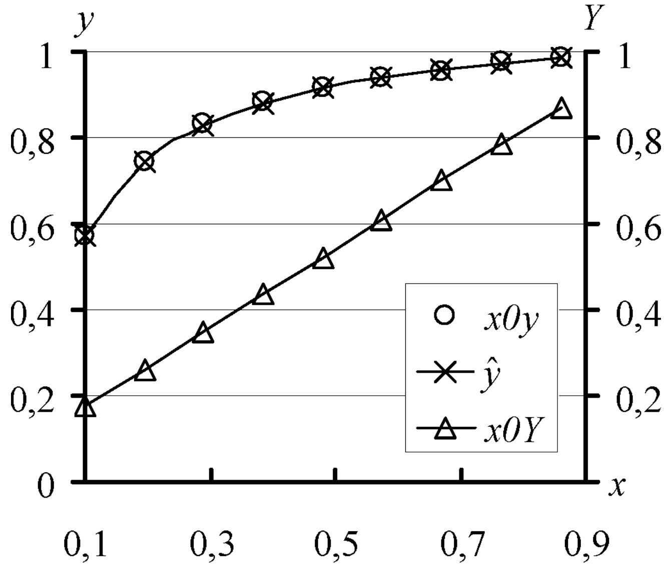



Рисунок 3.9 – **Експериментальні дані в системах координат: дійсній *x*0*y* і перетвореній *x*0*Y***

Аналітичний підхід можна застосовувати, якщо експериментальні дані точно описуються однією із формул *а–ж*. В протилежному випадку розраховуються коефіцієнти $b_0$ і $b_1$ кожної з цих формул і вибирається та з них, для якої залишкова сума $SS_{зал}$ є мінімальною.

Оскільки загальний вигляд емпіричної формули вибраний і

---

[92] За даними таблиці 3.32 наносимо точки $(x_i, y_i)$, $i$ = 1, 2, …, 9 в системі координат $x0y$ і після з'єднання їх плавною кривою, маємо графік функції, який приблизно відображає залежність між величинами $y$ і $x$. Далі порівнюємо отриману криву з кривими наведеними на рисунку 3.8 бачимо, що вона найбільше всього схожа з графічними кривими дробово-раціональної функції.

графічно підтверджений[93], то тепер лінеаризуємо вихідні дані за описаним вище алгоритмом для дробово-раціональної функції *г)* і визначимо невідомі коефіцієнти $b_0$ і $b_1$, що входять у формулу, за способом Чебишева як у прикладі 3.12, с. 102 ($a_0$, $a_1$). З цією метою побудуємо таблицю 3.33.

Вихідна лінійна модель набуде вигляду:

$$\hat{Y} = 0{,}5240747 + 0{,}9184675\left(x - 0{,}48\right)$$

або після спрощення отримуємо[94] аналог формули (3.107):

$$\hat{Y} = 8{,}321038 \cdot 10^{-2} + 0{,}9184676x.$$

Звідки бачимо, що шукані коефіцієнти: $b_0 = 8{,}321038 \cdot 10^{-2}$; $b_1 = 0{,}9184676$.

Таблиця 3.33 – **Лінеаризовані дані експерименту**, **їх суми і прогноз за моделлю**

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $Y_i = x_i / y_i$ | $x_i^2$ | $x_iY_i$ | $\hat{y}_i$ | $y_i - \hat{y}_i$ | $\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \cdot 10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,10 | 0,570 | 0,175439 | 0,01 | 0,017544 | 0,5712 | –0,0012 | 1,44 |
| 2 | 0,195 | 0,744 | 0,262097 | 0,038025 | 0,051109 | 0,7433 | 0,0007 | 0,49 |
| 3 | 0,29 | 0,831 | 0,348977 | 0,0841 | 0,101203 | 0,8296 | 0,0014 | 1,96 |
| 4 | 0,385 | 0,882 | 0,436508 | 0,148225 | 0,168056 | 0,8813 | 0,0007 | 0,49 |
| 5 | 0,48 | 0,918 | 0,522876 | 0,2304 | 0,25098 | 0,9158 | 0,0022 | 4,84 |
| 6 | 0,575 | 0,941 | 0,611052 | 0,330625 | 0,351355 | 0,9405 | 0,0005 | 0,25 |
| 7 | 0,67 | 0,952 | 0,703782 | 0,4489 | 0,471534 | 0,9590 | –0,0070 | 49 |
| 8 | 0,765 | 0,975 | 0,784615 | 0,585225 | 0,600231 | 0,9734 | 0,0016 | 2,56 |
| 9 | 0,86 | 0,987 | 0,871327 | 0,7396 | 0,749341 | 0,9850 | 0,0020 | 4 |
| $\sum$ | *4,32* | | *4,716672* | *2,6151* | *2,761353* | | | *65,03* |

Таким чином, шукана математична модель, що описує залежність концентрації парів оцтової кислоти ($y$, моль) від її концентрації в рідині ($x$, моль) буде мати вигляд:

$$\hat{y} = \frac{x}{8{,}321038 \cdot 10^{-2} + 0{,}9184676 \cdot x}. \qquad (3.110)$$

[93] Для *дробово-раціональної* функції вигляду *г)* в новій системі координат $x0Y$, де $Y = x / y$, експериментальні дані мають лягати на пряму, інакше, вони не зв'язані дробово-раціональною залежністю.

[94] Чи користуючись формулами (3.39) і даними таблиці 3.33 за МНК для моделі (3.35) знаходимо

$$b_0 = \frac{2{,}6151 \cdot 4{,}716672 - 4{,}32 \cdot 2{,}761353}{9 \cdot 2{,}6151 - 4{,}32^2} = 8{,}321038 \cdot 10^{-2}; \; b_1 = \frac{9 \cdot 2{,}761353 - 4{,}32 \cdot 4{,}716672}{9 \cdot 2{,}6151 - 4{,}32^2} = 0{,}9184676.$$

Розрахуємо суми квадратів відхилень дослідних значень $y_i$ від значень $\hat{y}_i$, знайдених за формулою (3.110). Результати розрахунків залишкової суми $SS_{зал}$ наведено в таблиці 3.33. Таким чином, аналізуючи залишки в таблиці 3.33 і графічні залежності експериментальних і прогнозних даних (рисунок 3.9), бачимо, що модель (3.110) добре описує експеримент.

*Завдання для самостійної роботи студентів* з приведення нелінійної моделі до виду лінійної за параметрами наведено в додатку К.

Однак, на практиці не завжди доцільно застосовувати поліноміальну модель (3.64) порядку $l$ чи нелінійні моделі та їм подібні, що наведені в 3.2.2, тому що вони будуть неадекватно описувати експериментальні дані. В зв'язку з цим існує МНК, який дозволяє знаходити коефіцієнти будь-яких моделей лінійних за параметрами виду (3.52), а також з кількістю незалежних змінних > 1 та динамічних моделей.

### 3.2.3 Метод найменших квадратів у матричній формі

Якщо для вивчення залежної[95] змінної $y$ від впливу вектора[96] незалежних змінних $\overline{x} = \|x_1, x_2, \ldots, x_k\|$ розмірністю $k$ було проведено $n$ дослідів, то експериментальні дані можна навести у вигляді таблиці 3.34.

Експериментальні дані, наведені в таблиці 3.34, можна записати у вигляді 2 матриць: матриці плану експерименту $X_{n \times k}$ і вектора-колонки значень залежної змінної $Y_n$, що мають вигляд:

$$\text{При } X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & x_{ij} & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{Vmatrix} \quad \text{маємо} \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} \tag{3.111}$$

---

[95] Вона залежить від інших змінних (факторів), котрі в свою чергу не залежать не від чого. Значення факторам може надавати тільки дослідник, тобто Ви (наприклад, з метою керування об′єктом дослідження). І залежно від того, які значення прийматимуть незалежні змінні, залежна змінна $y$ буде реагувати на ці зміни. Так, наприклад, обсяг продукції попит $y_1$ і пропозиція $y_2$ залежать від ціни реалізації продукції $x$. Чим менша ціна $x$ тим більше попит $y_1$ і менше пропозиція $y_2$, і навпаки, чим більше ціна $x$, тим менше попит $y_1$, і більше пропозиція $y_2$.

[96] У загальному випадку незалежних змінних $X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ може бути кілька, як і залежних $Y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, котрі характеризують об'єкт дослідження, але для кожної залежної змінної $y_i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$) шукається своя функція $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ для отримання аналітичної залежності $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ між виходом $y_i$ і входами $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Надалі будемо вважати що у нас одна залежна змінна $y$ і кілька незалежних – $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Таблиця 3.34 – **Експериментальні дані для дослідження залежності вхід $\overline{x}$ – вихід $y$**

| № | Фактори – незалежні змінні | | | | Залежна змінна $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_j$ | $x_k$ | |
| 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | … | $x_{1k}$ | $y_1$ |
| 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | … | $x_{2k}$ | $y_2$ |
| $i$ | ⋮ | ⋮ | $x_{ij}$ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | … | $x_{nk}$ | $y_n$ |

*Примітка.* $i$ – лічильник дослідів ($i$ = 1, 2, …, $n$), $j$ – лічильник факторів ($j$ = 1, 2, …, $k$), $k$ – кількість факторів, що впливають на залежну змінну $y$.

Припустимо, що аналітичний[97] вид функції для опису залежності вхід $\overline{x}$ – вихід $y$ за експериментальними даними, наведеними в таблиці 3.34, відомий $\hat{y} = \varphi(\overline{x})$ і вона лінійна[98] за параметрами, тобто

$$\hat{y} = \varphi\left(B, \tilde{f}(\overline{x})\right) = B^T \times \tilde{f}(\overline{x}) = \left\| b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_l \right\| \times \left\| \begin{matrix} f_1(\overline{x}) \\ f_2(\overline{x}) \\ \vdots \\ f_l(\overline{x}) \end{matrix} \right\| = \sum_{j=1}^{l} b_j f_j\left(x_1, x_2, \dots, x_k\right) \qquad (3.112)$$

де $\hat{y}$ – значення залежної змінної $y$, розраховане за математичною моделлю (3.112) при заданій комбінації факторів $\overline{x}$;

$B^T = \left\| b_1, b_2, \dots, b_l \right\|$ – вектор шуканих[99] коефіцієнтів моделі;

$\tilde{f}^T(\overline{x}) = \left\| f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \dots, f_l(\overline{x}) \right\|$ – вектор[100] відомих функцій, від входу $\overline{x} = \left\| x_1, x_2, \dots, x_k \right\|$;

$l$ – кількість коефіцієнтів моделі;

$T$ – операція транспонування матриці.

---

[97] Функція задана у вигляді математичної формули.

[98] $\hat{y} = b_1 f_1(x_1, x_2, \dots x_k) + b_2 f_2(x_1, x_2, \dots x_k) + \dots + b_l f_l(x_1, x_2, \dots x_k)$, де $b_1$, $b_2$, …, $b_l$ – невідомі коефіцієнти; $f_1$, $f_2$, …, $f_l$ – відомі функції, від вектора незалежних змінних $\overline{x} = \left\| x_1, x_2, \dots, x_k \right\|$. Наприклад, для моделі $\hat{y} = b_1 + b_2 x_1 + b_3 x_2 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1^2 + b_6 x_2^2$ відомі функції, що стоять після коефіцієнтів $b_j$: $f_1 = 1$, $f_2 = x_1$, $f_3 = x_2$, $f_4 = x_1 x_2$, $f_5 = x_1^2$, $f_6 = x_2^2$.

[99] Які знаходяться за МНК, для встановлення залежності вхід $\overline{x}$ – вихід $y$ для відомої емпіричної (тобто знайденої за експериментальними даними) функції.

[100] Наприклад для функції виноски 87 $\tilde{f}^T(\overline{x}) = \left\| 1,\ x_1,\ x_2,\ x_1 x_2,\ x_1^2,\ x_2^2 \right\|$.

Сутність МНК полягає в підборі вектору коефіцієнтів $B$ моделі (3.112) таким чином, щоб забезпечити мінімум суми квадратів відхилень (залишків, нев'язок) $\varepsilon$ експериментальних даних $y$ від прогнозованих за математичною моделлю (3.112) – $\hat{y}$, тобто:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 \to \min \text{ чи } \varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\left[b_1 f_1\left(\overline{x}_i\right) + b_2 f_2\left(\overline{x}_i\right) + \ldots + b_l f_l\left(\overline{x}_i\right) - y_i\right]^2 \to \min, \quad (3.113)$$

де $\hat{y}_i$, $y_i$ – відповідно значення (при заданій в $i$ експерименті комбінації факторів) вихідної змінної: прогнозоване за моделлю (3.112) і експериментальне, отримане в результаті реалізації $i$ досліду в $k$-вимірному просторі факторів;

$n$ – кількість дослідів;

$\overline{x}_i = \left\|x_1, x_2, \ldots, x_k\right\|_i$ – значення факторів в $i$-му досліді ($i = 1, 2, \ldots, n$).

### 3.2.3.1 Визначення коефіцієнтів моделі

Необхідною умовою мінімуму функції (3.113) є[101] одночасне виконання наступних умов:

$$\underbrace{\frac{\partial\varepsilon}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial b_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial b_l} = 0} \quad (3.114)$$

Взявши відповідні похідні (3.114) від функції (3.113) і записавши їх в явному[102] вигляді, отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів моделі (3.112) *аналітичним*[103] способом:

$$\begin{cases}
b_1\sum_{i=1}^{n} f_1^2\left(\overline{x}_i\right) + b_2\sum_{i=1}^{n} f_1\left(\overline{x}_i\right) f_2\left(\overline{x}_i\right) + \ldots + b_l\sum_{i=1}^{n} f_1\left(\overline{x}_i\right) f_l\left(\overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_1\left(\overline{x}_i\right) y_i \\
b_1\sum_{i=1}^{n} f_2\left(\overline{x}_i\right) f_1\left(\overline{x}_i\right) + b_2\sum_{i=1}^{n} f_2^2\left(\overline{x}_i\right) + \ldots + b_l\sum_{i=1}^{n} f_2\left(\overline{x}_i\right) f_l\left(\overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_2\left(\overline{x}_i\right) y_i \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
b_1\sum_{i=1}^{n} f_l\left(\overline{x}_i\right) f_1\left(\overline{x}_i\right) + b_2\sum_{i=1}^{n} f_l\left(\overline{x}_i\right) f_2\left(\overline{x}_i\right) + \ldots + b_l\sum_{i=1}^{n} f_l^2\left(\overline{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_l\left(\overline{x}_i\right) y_i
\end{cases} \quad (3.115)$$

Система рівнянь (3.115) містить стільки ж рівнянь, скільки невідомих коефіцієнтів $b_1$, $b_2$, …, $b_l$ входить до математичної моделі (3.112), і називається в

---

[101] Система рівнянь (3.114) отримана з умови екстремуму функції кількох змінних (у даному випадку змінні – це коефіцієнти моделі).

[102] Щодо знаку =, то невідомі зліва, а відомі справа.

[103] З точки зору виведення самої системи нормальних рівнянь.

математичній статистиці *системою нормальних рівнянь* (СНР). Як видно з умови МНК (3.113) функція $\varepsilon \geq 0$ при будь-яких коефіцієнтах $b_1$, $b_2$, …, $b_l$, отже, у неї обов'язково має існувати хоча б один мінімум. Тому якщо система нормальних рівнянь (3.115) має єдиний розв'язок, то він і є мінімумом[104] для функції $\varepsilon$.

В *матричній*[105] *формі* система нормальних рівнянь (3.115) для визначення невідомих коефіцієнтів $b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, l$) набуває вигляду:

$$\left(F^T F\right) B = F^T Y , \tag{3.116}$$

де

$$F = \begin{Vmatrix} f_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}) & f_2(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}) & \cdots & f_l(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k}) \\ f_1(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k}) & f_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k}) & \cdots & f_l(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2k}) \\ \vdots & \vdots & f_j(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) & \vdots \\ f_1(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}) & f_2(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}) & \cdots & f_l(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk}) \end{Vmatrix}; \tag{3.117}$$

$F$ – матриця експериментальних даних $X$, узагальнена[106] видом моделі $\tilde{f}^T(\bar{x})$ розміру $n \times l$, тобто матриця, рядки якої $\left\| f_1(\bar{x}_i), f_2(\bar{x}_i), \ldots, f_l(\bar{x}_i) \right\|_i$, де індекс дослідів $i = 1, 2, \ldots, n$;

$Y$ – колонка значень залежної змінної, які спостерігалися в дослідах.

Розв'язок системи (3.116) (вона ж 3.115) у матричному виді визначається за допомогою методу оберненої матриці:

$$B = \left(F^T F\right)^{-1} F^T Y = D F^T Y , \tag{3.118}$$

де $F^T F = I$ – *інформаційною* матрицею Фішера;

$D = \left(F^T F\right)^{-1}$ – *дисперсійна* (коваріаційна) матриця з елементами $d_{ij}$, що залежить тільки від плану експерименту $X$ і вектора відомих функцій $\tilde{f}(\bar{x})$, тобто $D$ не залежить від результатів експерименту а, отже, може бути досліджена до його реалізації[107];

---

[104] Оскільки функція $\varepsilon$ завжди більше 0, тому що сума квадратів залишків $\varepsilon = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \geq 0$.

[105] Універсальний машинний підхід для визначення коефіцієнтів будь-яких математичних моделей, *лінійних за параметрами*, без знаходження аналітичних похідних, зведення подібних тощо.

[106] Побудована у відповідності з видом моделі $\tilde{f}^T(\bar{x})$.

[107] Для отримання найкращої у деякому смислі моделі коефіцієнти мають бути: не залежними один від одного в моделі, і просто обчислюватися (властивість *ортогональності*); максимально точно визначатися, тобто дисперсія коефіцієнтів $s^2\{b_j\} = d_{jj} s^2_{експ}$ має бути мінімальною (властивість *D-оптимальності*); що в свою чергу

–1 – операція знаходження матриці, оберненої до інформаційної.

Після визначення коефіцієнтів моделі за формулою (3.118) і підставки їх у функцію (3.112) одержимо аналітичну залежність між входами $\bar{x}$ і виходом $y$.

### 3.2.3.2 Статистична обробка моделі, лінійної за параметрами

Статистична обробка моделі (3.112) передбачає перевірку значущості її складових $f_j(\bar{x})$, виключення їх в разі незначущості з наступним перерахунком значень коефіцієнтів[108], що залишились, і перевірку адекватності моделі.

*Перевірка значущості коефіцієнтів* за $t$-критерієм. Деякі із складових[109] $f_j(\bar{x})$ моделі (3.112) можуть слабко впливати на залежну змінну $y$, тобто статистично[110] незначуще, а отже деякі розраховані коефіцієнти $b_j$ відмінні від 0 тільки за рахунок того, що експериментальні дані для отримання моделі, отримані з якоюсь експериментальною похибкою $s^2_{експ}$, і вид теоретичної моделі, можливо, насправді дещо відрізняється від обраного $\tilde{f}(\bar{x})$. Тому далі експериментатору потрібно встановити: чи дійсно всі складові $f_j(\bar{x})$ моделі статистично значуще впливають на залежну змінну. Для цього слід перевірити статистичну гіпотезу[111] $\beta_j = 0$[112] для всіх коефіцієнтів моделі і якщо вона

---

забезпечує максимальну точність прогнозу вихідної змінної $\hat{y}$ – мінімальна теоретична дисперсія $\xi = \tilde{f}^T(\bar{x}) D \tilde{f}(\bar{x})$ в досліджуваній ділянці (властивість *G-оптимальності*) і однакову в еквідистантних точках від центра плану в будь-якому напрямку руху факторного простору (властивість *рототабельності*).

[108] Крім випадку ортогональної інформаційної матриці $I$ (див. спосіб Чебишева). Всі її елементи $i_{jj}$, що не знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Тоді елементи матриці $D$: $d_{jj} = 1/i_{jj}$.

[109] Відомі функції $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

[110] З якоюсь ймовірністю $p$.

[111] Припущення, яке перевіряється статистичними методами, тобто ймовірностними математичними розрахунками. Ці розрахунки коректні тільки якщо відомо що залежна змінна $y$ розподілена нормально: найбільш ймовірне до теоретичного (дійсного) – середнє значення випадкової величини. Нормальний закон розподілу є теоретичною основою точності вимірювання (отримання) будь яких даних. Отже, якщо дані розподілені нормально, то їх можливо максимально точно виміряти за паралельними дослідами (теорема Чебишева – середнє значення декількох вимірів більш точніше наближається до теоретичного, ніж будь-який з цих вимірів) і це в свою чергу, дозволяє отримати точнішу математичну модель, яка в свою чергу буде робити точніші прогнози.

[112] $\beta_j$ – дійсний (теоретичний, генеральний) коефіцієнт математичної моделі.

приймається, то складова моделі $f_j(\bar{x})$ виключається з моделі, а отже ця складова моделі не впливає на залежну змінну $y$.

Для перевірки значущості коефіцієнтів математичної моделі (3.112) слід знайти відношення $t\{b_j\}$ абсолютного значення коефіцієнту $b_j$ до його похибки знаходження $s\{b_j\}$, і, порівнюючи його з теоретичним критерієм, прийняти рішення про значущість коефіцієнту. В математичній статистиці доведено, що кожне з таких відношень є випадковою величиною, котра має $t$-розподіл Стьюдента. Тому для перевірки гіпотези про значущість коефіцієнта $b_j$ кожне з розрахованих відношень $t\{b_j\}$ порівнюють з теоретичним[113] значенням $t_{табл}[q, f]$, і якщо виконується умова:

$$t\{b_j\} = \frac{|b_j|}{s\{b_j\}} > t_{табл}[q\%, f] \qquad (3.119)$$

то коефіцієнт $b_j$ визнається значущим (нуль-гіпотеза $\beta_j = 0$ відкидається).

*Похибка знаходження коефіцієнту* $s\{b_j\}$ розраховується за формулою:

$$s\{b_j\} = \sqrt{s^2\{b_j\}} = \sqrt{d_{jj} s^2_{експ}} \qquad (3.120)$$

де $s^2\{b_j\}$ – дисперсія[114] знаходження коефіцієнта $b_j$;

$d_{jj}$ – відповідний діагональний елемент дисперсійної матриці $D$;

$s^2_{експ}$ – дисперсія відтворюваності[115] експерименту, яка розраховується за (3.32) в позначеннях $y$[116].

---

[113] Знаходять за таблицею розподілу Стьюдента (додаток В, таблиця В.3) для обраного рівня значущості $q$ – похибка критерію (3.119) (так якщо $q$ = 0,05, то в 5 випадках із 100 при виконанні умови (3.119) в дійсності коефіцієнт $b_j$ не є значущим) і ЧСВ $f$ критерію – кількість експериментальних даних, котрі пішли на підрахунок критерію, що розраховується, *мінус* кількість накладених зв'язків на критерій, тобто скільки допоміжних величин прийшлось розрахувати, щоб підрахувати цей критерій.

[114] Квадрат похибки.

[115] Відомо, що при поставці дослідів $m$ раз в будь якій $i$ точці факторного простору $\bar{x}_i$ значення вихідної змінної $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$ будуть трохи відрізнятися один від одного за рахунок всіляких випадковостей. Підрахуємо середнє значення вихідної змінної $\bar{y}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$. Тоді, чим менша буде сума квадратів відхилень поточного значення $y_{ij}$ від їх середнього $\bar{y}_i$, тобто $\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$, тим буде краща відтворюваність дослідів і відповідно менша похибка (більша точність) експерименту $\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$ за виміром значення незалежної змінної $y_i$.

В розгорнутому виді співвідношення, що зв'язує дисперсію коефіцієнтів $s^2\{b_j\}$ з елементами дисперсійної матриці $D$ має вигляд:

$$\mu\left\{(B-\beta)\cdot(B-\beta)^T\right\}=\begin{Vmatrix} s^2\{b_1\} & \operatorname{cov}(b_1b_2) & \cdots & \operatorname{cov}(b_1b_l) \\ \operatorname{cov}(b_2b_1) & s^2\{b_2\} & \cdots & \operatorname{cov}(b_2b_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \operatorname{cov}(b_lb_1) & \operatorname{cov}(b_lb_2) & \cdots & s^2\{b_l\} \end{Vmatrix}=Ds^2_{експ}=\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \cdots & d_{ll} \end{Vmatrix} s^2_{експ},$$

де $\beta=\mu(B)$ – вектор-колонка дійсних значень коефіцієнтів математичної моделі, $\mu$ – математичне очікування[117] вектора $B$.

Необхідно відмітити, що $s^2\{b_j\}$ пропорційна діагональним елементам $d_{jj}$ коваріаціної матриці $D$, коли остання діагональна, тобто у випадку відсутності кореляції $\operatorname{cov}(b_ib_j)=0$ між будь-якими двома коефіцієнтами[118] в математичній моделі. Тому у випадку, коли дисперсійна матриця недіагональна і, відповідно, всі коефіцієнти моделі взаємно зв'язані, то не можна перевірити значущість окремо кожного коефіцієнта. Тому відношення (3.119) можна розглядати тільки як засіб ранжування коефіцієнтів.

В теорії планування експерименту в загальному випадку використовується процедура послідовного виключення незначущих складових моделі: складова, для якої величина $t\{b_j\}$ виявляється найменшою, виключається, і далі проводиться наново перерахунок всіх коефіцієнтів моделі. Виключення складових проводиться до тих пір, доки зменшується залишкова дисперсія.

*Перевірка адекватності* математичної моделі експериментальним даним. Адекватність, тобто відповідність експериментальним даним, моделей подібних (3.112) *за відсутності паралельних дослідів*[119], зазвичай, перевіряють за $F$-відношенням:

$$F_p=\frac{s^2_{y-\bar{y}}}{s^2_{зал}}>F_{табл}[f_{y-\bar{y}};f_{зал}], \qquad (3.121)$$

---

[116] Точність відтворюваності дослідів всього експерименту за планом $X$, тобто $s^2_{експ}=\frac{1}{n(m-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2$.

[117] В теорії математичної статистики припускається, що $\beta$ знаходяться усередненням параметрів векторів $B$, знайдених для великої кількості моделей подібних досліджень об'єкту, отриманих незалежно, наприклад, в різних лабораторіях.

[118] Сила кореляційного зв'язку між коефіцієнтами $b_i$ і $b_j$ характеризується коефіцієнтом кореляції $r_{ij}=d_{ij}/\sqrt{d_{ii}d_{jj}}$, абсолютне значення якого змінюється в межах [0; 1]. Чим більше $r_{ij}$, тим сильніше взаємозв'язок між $b_i$ і $b_j$ в моделі.

[119] Кілька замірів залежної змінної $y$, при одній й тій же комбінації факторів $\bar{x}$.

де $F_p$ і $F_{табл}$ – розрахункове і табличне (теоретичне) значення критерію Фішера (додаток В, таблиця В.6) відповідно;

$s^2_{y-\bar{y}}$ і $s^2_{зал}$ – дисперсії навколо середнього[120] і залишкова[121], а також відповідні їм степені вільності $f_{y-\bar{y}}$ і $f_{зал}$.

Диспнрсії визначаються за формулами:

$$s^2_{y-\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1},^{122}; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;\ s^2_{зал} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{n-1};\ f_{y-\bar{y}} = n-1;\ f_{зал} = n-1, \tag{3.122}$$

де $\bar{y}$ – середнє значення залежної змінної в експерименті;

$l$ – кількість коефіцієнтів у моделі.

Перевірка адекватності математичної моделі у випадку постановки *паралельних дослідів* проводиться, наприклад, за умовою (3.123). При цьому паралельні досліди потрібні для:

– точнішого визначення значення залежної змінної $y$, у зв'язку з тим, що на неї впливають всілякі випадковості;

– розрахунку, так званої, похибки всього експерименту $s^2_{експ}$.

Внаслідок порівняння розрахованої похибки експерименту з похибкою прогнозу за моделлю (3.112), за яку відповідає дисперсія залишків $s^2_{зал}$ (3.122) по певному теоретичному статистичному критерію, наприклад $F$, можна зробити висновок про адекватність. Це можна прокоментувати так: якщо похибка прогнозу за моделлю $s^2_{зал}$ в якійсь допустимій статистичній межі порівнянна чи точніше є більшою (так як в похибку прогнозу за моделлю вже закладено похибку експерименту, оскільки модель побудована за даними

---

[120] Розсіювання (розкид) даних $y_i$ навколо їх середнього значення $\bar{y}$ віднесене до їх ЧСВ $f_{y-\bar{y}} = n - 1$, де $n$ – кількість експериментальних даних (КЕД); 1 – кількість накладених зв'язків (КНЗ): для розрахунку цієї дисперсії, потрібно розрахувати *одну* допоміжну величину, а саме середнє значення залежної змінної $\bar{y}$.

[121] Похибка модельного прогнозу – критерій МНК (3.113) віднесена до свого числа ступенів вільності $f_{зал}$. Оскільки ця похибка залежить від кількості та якості експериментальних даних $n$ і виду моделі, яка складається з $l$ складових, то ЧСВ $f_{зал}$ визначається як КЕД $n$ мінус КНЗ, тобто скільки потрібно розрахувати допоміжних величин, щоб визначити дисперсію $s^2_{зал}$. Оскільки для цього, власне кажучи, (окрім самих даних $n_i$) потрібна тільки сама модель, для одержання якої необхідно розрахувати $l$ коефіцієнтів, то КНЗ дорівнює $l$. Тому ЧСВ залишкової дисперсії $f_{зал} = n - l$.

[122] В MS Excel замість $s^2_{y-\bar{y}}$ використовується $s^2_{\hat{y}-\bar{\hat{y}}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2 \Big/ (l-1)$ де $\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i$.

експерименту) за похибку експерименту $s^2_{експ}$, то модель можна вважати адекватною експерименту за умови:

$$F_p = \frac{s^2_{зал}}{s^2_{експ}} \le F_{табл}[q\%, f_{зал}, f_{експ}]. \tag{3.123}$$

*Похибка прогнозу* за моделлю (3.112) у будь-якій контрольній точці[123] $\bar{x}$ розраховується за формулою:

$$s\{\hat{y}\} = \sqrt{\xi \cdot s^2_{експ}}\,, \tag{3.124}$$

де $\xi$ – *теоретична*[124] похибка прогнозу вихідної змінної залежно від розташування контрольної точки $\bar{x}$ в факторному просторі, що визначається за залежністю:

$$\xi = \tilde{f}^T(\bar{x}) D \tilde{f}(\bar{x}), \tag{3.125}$$

де $\tilde{f}^T(\bar{x})$ – значення вектора відомих функцій в контрольній точці $\bar{x}$; $D$ – дисперсійна матриця плану експерименту $X$;

$T$ – операція транспонування вектора.

### 3.2.3.3 Використання MS Excel для МНК

*MS Excel* зручно використовувати для розрахунків коефіцієнтів моделей лінійних за параметрами та проводити їх статистичну обробку. Для того, щоб ознайомитися як проводити розрахунки за вищенаведеними матричними формулами з використанням MS Excel дивіться додаток Л. Також в MS Excel вбудовано компонент «Регрессия», який дозволяє автоматично отримувати параметри моделі та деякі основні показники статистичної обробки, як то:

– коефіцієнт детермінації «R-квадрат», який приймає значення від 0 до 1[125], при цьому чим більше його значення наближається до 1, тим вищою є адекватність моделі;

---

[123] Значення незалежної змінної $\bar{x}$, яке є цікавим для дослідника. Тобто контрольна точка, це, наприклад, режим процесу чи склад композиції, який відсутній в плані експерименту $X$, їх може бути скільки завгодно. За цими точками також перевіряється адекватність моделі, особливо, у випадку насиченого плану експерименту, оскільки $\varepsilon = SS_{зал} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 0$ (3.113), тобто для всіх точок плану експериментальне і прогнозне за моделлю (3.112) значення співпадають: $y_i = \hat{y}_i$ ($i$ = 1, 2, …, $n$), див. приклад 3.11. У цьому випадку адекватність моделі перевіряється в $i$-контрольній точці за формулою $t_p^{(i)} = |\bar{y}_i - \hat{y}_i|\sqrt{m_i} / s_{експ}\sqrt{1+\xi} < t_{табл}[q; f_{експ}]$.

[124] Похибка прогнозу в контрольній точці $\bar{x}$ за рахунок МНК, яка викликана видом моделі $\tilde{f}^T(\bar{x})$ та планом експерименту $X$.

– «Стандартная ошибка» відповідає $\sqrt{\varepsilon}$, яка розраховується за (3.113);

– позначення «df, SS, MS» – кількість степенів вільності, сума квадратів відхилень і дисперсія відповідно: регресійна «Регрессия» $s^2_{\hat{y}-\bar{y}}$, залишкова «Остаток» $s^2_{зал}$, навколо середнього «Итого» $s^2_{y-\bar{y}}$;

– позначення «F» – розрахунковий критерій Фішера (3.121), де в чисельнику замість $s^2_{y-\bar{y}}$ є $s^2_{\hat{y}-\bar{y}}$. У цьому випадку значення $F$-критерію є завищене, отже, якщо модель адекватна за (3.121), то вона тим більше буде адекватною за критерієм $F$;

– в колонках «Коэффициенты», «Стандартная ошибка», «t-статистика», «Нижние 95% и Верхние 95%» виводиться відповідно коефіцієнти моделі (3.118), похибка знаходження коефіцієнту $s\{b_j\}$ (3.120)[126], розрахунковий критерій Стьюдента $t\{b_j\}$ (3.119), зони надійності коефіцієнтів (3.139).

Для того, щоб скористатись компонентом «Регрессия» необхідно вхідні дані $X$ звести до матриці $F$ (3.117), а також мати на увазі, що вільний член $b_0$ розраховується автоматично. Розрахунки в MS Excel (приклад 3.16) наведено в додатку Л.

*Приклад* 3.15

На основі експериментальних даних зміни в'язкості розчину олігомеру $Y$ від зміни його концентрації $X$ (таблиця 3.35) знайти оцінки параметрів моделі, якщо припустити, що стохастична залежність між фактором $X$ і показником $Y$ має вигляд: $Y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 X}$. Визначити значущість коефіцієнтів прийнятої моделі за $t$-критерієм Стьюдента з надійністю $p$ = 0,95 та її адекватність статистичним даним за критерієм Фішера.

Таблиця 3.35 – **План експерименту *X* і результати дослідів *Y***

| X, рази | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 | 7,5 | 8,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y, сПз | 16 | 18 | 12 | 20 | 23 | 15 | 27 | 22 | 35 | 25 | 42 | 38 | 55 | 76 | ? |

Якщо прийнята математична модель адекватна експериментальним даним, то з довірчою імовірністю $p$ = 0,95 знайти:

– довірчу зону базисних даних;

– точкову оцінку прогнозу та його зону надійності;

[125] Показник «Множественный R», який є коренем квадратним з «R-квадрат» і тому швидше прямує до 1.
[126] В якій замість $s^2_{експ}$ використовують $s^2_{зал}$.

– побудувати графічні залежності в'язкості від концентрації, отримані експериментально і розраховані за моделлю (прогнозні) та її довірчу зону.

*Розв'язок*

• Приведення дробово-раціональної моделі, до виду лінійного за параметрами. Оскільки стахостична залежність між залежною $Y$ і незалежною $X$ змінними дробово-раціональна (явний представник моделі нелінійної за невідомими параметрами $b_0$, $b_1$), то останню необхідно привести[127] до виду (3.112), для того щоб застосувати МНК. Якщо ввести позначення[128]:

$$y = \frac{1}{Y},\ x = X, \tag{3.126}$$

то модель прийме вигляд лінійної:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \tag{3.127}$$

• Оцінка параметрів моделі. Розглянемо два способи знаходження коефіцієнтів: аналітичний[129] – через СНР у виді (3.115) і матричний – через систему нормальних рівнянь в матричному виді (3.116).

*Аналітичний спосіб* складання системи нормальних рівнянь.

Запишемо критерій МНК (3.113) для заданої емпіричної формули (3.127)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right)^2 \to \min \tag{3.128}$$

Запишемо необхідні умови мінімізації функції (3.128) за рахунок коефіцієнтів $b_j$ у виді (3.114), для чого візьмемо часткові похідні від функції $\varepsilon$ по кожному з невідомих параметрів $b_j$ ($j = 0, 1$):

[127] Далеко не всі моделі зводяться до такого виду, в цьому випадку розрахунок невідомих параметрів $B$ моделі суттєво ускладнюється. Їх знаходять нелінійними методами оптимізації за невідомими параметрами $B$, використовуючи як критерій оптимальності все той же критерій $\varepsilon$ МНК (3.113).

[128] Функція $\frac{1}{Y} = b_0 + b_1 X$, обернена до нашої, лінійна за невідомими параметрами $b_0$, $b_1$. Отже, якщо розрахувати $b_0$, $b_1$ цієї функції для вихідних даних таблиці 3.35, ми автоматично знайдемо параметри і вихідної функції $Y = \frac{1}{b_0 + b_1 X}$. Іншими словами вихідні дані таблиці 3.35 в координатній площині $X\,0\frac{1}{Y}$ (вона ж $x0y$) являють собою пряму лінію (якщо ж вони не будуть походити на пряму, то дробово-раціональну модель застосовувати не можна).

[129] З точки зору виведення самої системи нормальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right)\cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(b_0 + b_1 x_i - y_i\right)\cdot x_i = 0 \end{cases} \qquad (3.129)$$

Враховуючи, що *const* = 2 перед сумами в кожному з рівнянь не перетворить його в нуль, а також наступні властивості сум: $\sum\limits_{i=1}^{n} const \cdot x_i = const\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ ; $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i + y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ ; $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i + y_i\right)\cdot z_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i z_i$, де $x_i$, $y_i$, $z_i$ – змінні, і, що роль постійних виконують коефіцієнти $b_j$ ($j$ = 0, 1), систему (3.129) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{cases} b_0\sum\limits_{i=1}^{n} 1 + b_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ b_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \qquad (3.130)$$

Для складання системи нормальних рівнянь у виді (3.115) залишилось тільки за експериментальними даними, наведеними в таблиці 3.35, розрахувати відповідні суми системи (3.130). Результати розрахунків наведено в таблиці 3.36.

Таблиця 3.36 – **Допоміжні розрахунки для складання СНР аналітичним способом**

| $i$ | $X$ | $Y$ | $x_i$ | $y_i = \dfrac{1}{Y_i}$ | $x_i^2$ | $y_i x_i$ | Продовження таблиці | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| 1 | 1 | 16 | 1 | 0,0625 | 1 | 0,0625 | 8 | 4,5 | 22 | 4,5 | 0,0455 | 20,25 | 0,20455 |
| 2 | 1,5 | 18 | 1,5 | 0,0556 | 2,25 | 0,08333 | 9 | 5 | 35 | 5 | 0,0286 | 25 | 0,14286 |
| 3 | 2 | 12 | 2 | 0,0833 | 4 | 0,16667 | 10 | 5,5 | 25 | 5,5 | 0,04 | 30,25 | 0,22 |
| 4 | 2,5 | 20 | 2,5 | 0,05 | 6,25 | 0,125 | 11 | 6 | 42 | 6 | 0,0238 | 36 | 0,14286 |
| 5 | 3 | 23 | 3 | 0,0435 | 9 | 0,13043 | 12 | 6,5 | 38 | 6,5 | 0,0263 | 42,25 | 0,17105 |
| 6 | 3,5 | 15 | 3,5 | 0,0667 | 12,25 | 0,23333 | 13 | 7 | 55 | 7 | 0,0182 | 49 | 0,12727 |
| 7 | 4 | 27 | 4 | 0,037 | 16 | 0,14815 | 14 | 7,5 | 76 | 7,5 | 0,0132 | 56,25 | 0,09868 |
| $\sum$ | | | | | | | | | | 59,5 | 0,5941 | 309,75 | 2,05669 |

Використовуючи дані таблиці 3.36 і загальний вид системи рівнянь (3.130), запишемо СНР для знаходження невідомих коефіцієнтів $b_j$ ($j$ = 0, 1) емпіричної формули (3.127) для даних наведених в таблиці 3.35:

$$\begin{cases} 14b_0 + 59{,}5b_1 = 0{,}5941 \\ 59{,}5b_0 + 309{,}75b_1 = 2{,}05669 \end{cases} \qquad (3.131)$$

Отриману систему лінійних рівнянь (3.131) можна розв′язати будь яким[130] аналітичним або чисельним методом[131]. В результаті розв′язку системи нормальних рівнянь (3.131) будуть знайдені коефіцієнти шуканої емпіричної формули (3.127).

*Матричний спосіб* складання системи нормальних рівнянь.

На основі апроксимуючої функції (3.127) вектор відомих функцій матиме вигляд: $\tilde{f}^T(x) = \| 1, x \|$. Складемо за даними плану експерименту *X*, з урахуванням вектора $\tilde{f}^T(x)$ узагальнену матрицю *F* (таблиця 3.37).

Таблиця 3.37 – **Узагальнена матриця *F***

| *X* | *F* | | *Y* |
|---|---|---|---|
| | $f_1 = 1$ | $f_2 = x$ | |
| 1 | 1 | 1 | 0,0625 |
| 1,5 | 1 | 1,5 | 0,0556 |
| 2 | 1 | 2 | 0,0833 |
| 2,5 | 1 | 2,5 | 0,05 |
| 3 | 1 | 3 | 0,0435 |
| 3,5 | 1 | 3,5 | 0,0667 |
| 4 | 1 | 4 | 0,037 |
| 4,5 | 1 | 4,5 | 0,0455 |
| 5 | 1 | 5 | 0,0286 |
| 5,5 | 1 | 5,5 | 0,04 |
| 6 | 1 | 6 | 0,0238 |
| 6,5 | 1 | 6,5 | 0,0263 |
| 7 | 1 | 7 | 0,0182 |
| 7,5 | 1 | 7,5 | 0,0132 |
| | $b_0$ | $b_1$ | |

*Примітка.* $f_j$ – відомі функції ($j$ = 1, 2)

Запишемо матрицю $F^T$, транспоновану до матриці *F*:

$$F^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 & 3 & 3{,}5 & 4 & 4{,}5 & 5 & 5{,}5 & 6 & 6{,}5 & 7 & 7{,}5 \end{Vmatrix}$$

---

[130] Методом Ньютона, Гауса, ітераційним, визначників тощо.
[131] З яких ми надамо перевагу методу оберненої матриці, розглянутого нижче.

Розрахуємо інформаційну матрицю Фішера $I$:

$$I = F^T F = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 & 3 & 3{,}5 & 4 & 4{,}5 & 5 & 5{,}5 & 6 & 6{,}5 & 7 & 7{,}5 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2{,}5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3{,}5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4{,}5 \\ 1 & 5 \\ 1 & 5{,}5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 6{,}5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 7{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 14 & 59{,}5 \\ 59{,}5 & 309{,}75 \end{Vmatrix} \qquad (3.132)$$

Далі перемножуючи матрицю $F^T$ на вектор-колонку спостережень[132] $Y$ знаходимо вектор вільних членів системи нормальних рівнянь в матричному виді (3.116) $F^T Y$, який залежить від плану $X$, виду функції $\tilde{f}^T(x)$ і спостережень за вихідною змінною $Y$:

$$F^T Y = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 & 3 & 3{,}5 & 4 & 4{,}5 & 5 & 5{,}5 & 6 & 6{,}5 & 7 & 7{,}5 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0{,}0625 \\ 0{,}0556 \\ 0{,}0833 \\ 0{,}05 \\ 0{,}0435 \\ 0{,}0667 \\ 0{,}037 \\ 0{,}0455 \\ 0{,}0286 \\ 0{,}04 \\ 0{,}0238 \\ 0{,}0263 \\ 0{,}0182 \\ 0{,}0132 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5941 \\ 2{,}05669 \end{Vmatrix} \qquad (3.133)$$

[132] Розрахований за (3.126).

Перемножуючи інформаційну матрицю $I$ (3.132) на колонку невідомих коефіцієнтів $B$ і прирівнюючи добуток матриць до $F^TY$ (3.133) отримуємо систему нормальних рівнянь, записану в матричному виді, аналогічну (3.131):

$$IB = F^TY \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} 14 & 59{,}5 \\ 59{,}5 & 309{,}75 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}5941 \\ 2{,}05669 \end{Vmatrix} \qquad (3.134)$$

Розв′язувати систему (3.134) будемо матричним способом за формулою (3.118), для чого знайдемо дисперсійну матрицю $D$, тобто матрицю, обернену[133] до інформаційної $I$ (3.132):

$$D = I^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}3890109 & -7{,}472526 \cdot 10^{-2} \\ -7{,}472526 \cdot 10^{-2} & 1{,}758241 \cdot 10^{-2} \end{Vmatrix} \qquad (3.135)$$

Перемножуючи дисперсійну матрицю $D$ (3.135) на вектор-колонку вільних членів $F^TY$ (3.133) отримаємо вектор коефіцієнтів $B$:

$$B = DF^TY = \begin{Vmatrix} 0{,}3890109 & -7{,}472526 \cdot 10^{-2} \\ -7{,}472526 \cdot 10^{-2} & 1{,}758241 \cdot 10^{-2} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0{,}5941 \\ 2{,}05669 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}0774102 \\ -8{,}22993 \cdot 10^{-3} \end{Vmatrix}. \qquad (3.136)$$

Підставляючи знайдений вектор коефіцієнтів $B$ (3.136) в (3.127) отримуємо математичну модель залежності змінних (незалежної $x$ та залежної $y$):

$$\hat{y} = 0{,}0774102 - 8{,}22993 \cdot 10^{-3} x \qquad (3.137)$$

Тоді вихідна дробово-раціональна модель набуває вигляду:

$$\hat{Y} = \frac{1}{0{,}0774102 - 8{,}22993 \cdot 10^{-3} X} \qquad (3.138)$$

• *Перевірка значущості коефіцієнтів і адекватності моделі.* Будемо перевіряти значущість[134] коефіцієнтів моделі лінійної за параметрами (3.137), оскільки коефіцієнти моделі (3.138) розраховуються не напряму, тобто через лінійну модель за параметрами. Для цього визначимо *зони надійності*.

За відсутності паралельних дослідів роль теоретичного аналогу похибки експерименту $s^2_{експ}$ відіграє незміщена оцінка дисперсії залишків $s^2_{зал}$, в яку окрім неявно закладеної похибки експериментальної ситуації входять також похибки

[133] Шукається за допомогою стандартних функцій в різних математичних пакетах, наприклад, Ms Excel (додаток Е).

[134] До нелінійних за параметрами моделей статистична обробка (пп. 3.2.3.2) не застосовна, тобто ми не зможемо визначитися напряму із значущістю коефіцієнтів саме в моделі (3.138). Однак якщо деякі із складових моделі лінійної за параметрами (3.137) є статистично незначущі, то вони також є незначущими і в моделі (3.138).

вибору виду моделі, плану експерименту, похибок розрахунків та інші. З формули (3.119)[135] випливає:

$$\left|\Delta b_j\right| > t_{табл}[q\%, f_{зал}]\cdot s\left\{b_j\right\} \Rightarrow b_j > \pm t_{табл}[q\%, f_{зал}]\cdot s\left\{b_j\right\}; \quad b_j > \Delta b_j .$$

Отже, якщо значення коефіцієнту $b_j$ потрапляє в інтервал $\Delta b_j = \pm t_{табл}[q\%, f_{зал}]\cdot s\{b_j\}$, то коефіцієнт $b_j$ суттєво не впливає на залежну зміну $y$. В теорії планування експерименту інтервал[136] $\Delta b_j$ покриває собою незначущі параметри моделі. Тоді зона надійності[137] коефіцієнтів знаходиться в інтервалі

$$b_j \mp \Delta b_j. \tag{3.139}$$

*Похибка знаходження коефіцієнтів* з формули (3.120): $s\{b_j\} = s_{зал}\sqrt{d_{jj}}$, де $s_{зал}$ – середнє квадратичне відхилення[138] залишків, а $d_{jj}$ – відповідний діагональний елемент дисперсійної матриці (3.135) плану $X$.

З матриці (3.135) знаходимо $d_{11}$ = 0,3890109, $d_{22}$ = 1,758241·10$^{-2}$; середнє квадратичне відхилення[139] $s_{зал} = \sqrt{s^2_{зал}} = \sqrt{13,292\cdot 10^{-4}/(14-2)} \approx 0,0105$.

За таблицею розподілу Стьюдента[140] знаходимо табличне значення величини $t_{табл}[q\%, f_{зал}]$ при рівні значущості $q$ = 5% і ЧСВ $f_{зал} = n - 2 = 14 - 2 = 12 \Rightarrow t_{табл}[5\%,12] = 2,179$.

*Інтервали* незначущості[141] коефіцієнтів:

$\Delta b_0 = \mp\ 2,179\cdot 0,0105\cdot\sqrt{0,3890109} = \mp 0,0143$ $\Rightarrow b_0$ – значущий;

$\Delta b_1 = \mp\ 2,179\cdot 0,0105\cdot\sqrt{1,758241\cdot 10^{-2}} = \mp 0,00304$ $\Rightarrow b_1$ – значущий.

*Зони надійності* коефіцієнтів:

$b_0 \mp \Delta b_0 = 0,0774102 \mp 0,0143 = [0,0631069;\ 0,0917135];$

$b_1 \mp \Delta b_1 = -8,22993\cdot 10^{-3} \mp 0,00304 = [-11,27078\cdot 10^{-3};\ -5,18908\cdot 10^{-3}].$

*Адекватність*, тобто відповідність моделі (3.138) експериментальним даним, оцінимо за $F$-відношенням (3.121). Результати допоміжних розрахунків наведено в таблиці 3.38.

---

135 На практиці частіше користуються формулою (3.119) напряму без знаходження зон коефіцієнтів.

136 Це є свого роду похибка значень коефіцієнтів (за рахунок всіляких випадковостей), отже не складно з неї сформулювати зону їх надійності.

137 Зона в якій може лежати дійсне значення коефіцієнту (визначається його похибкою).

138 Тобто квадратний корінь з дисперсії залишків $s^2_{зал}$.

139 Детальні розрахунки залишкової дисперсії $s^2_{зал}$ наведені нижче, на прикладі моделі (3.138), таблиця 3.38.

140 Додаток В (таблиця В.3).

141 Тобто якщо значення коефіцієнту $b_j$ потрапляє в цей інтервал, то коефіцієнт не є значущим в моделі.

Таблиця 3.38 – **Оцінка точності моделей (3.137) і (3.138)**

| $i$ | $x_i = X_i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i - \hat{y}_i)^2 \cdot 10^4$ | $Y_i$ | $\hat{Y}_i$ | $(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ | $Y_i - \bar{Y}$ | $(Y_i - \bar{Y})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0,063 | 0,069 | 0,446 | 16 | 14,455 | 2,387 | –14,286 | 204,082 |
| 2 | 1,5 | 0,056 | 0,065 | 0,904 | 18 | 15,369 | 6,921 | –12,286 | 150,939 |
| 3 | 2 | 0,083 | 0,061 | 5,010 | 12 | 16,407 | 19,42 | –18,286 | 334,367 |
| 4 | 2,5 | 0,050 | 0,057 | 0,467 | 20 | 17,595 | 5,786 | –10,286 | 105,796 |
| 5 | 3 | 0,043 | 0,053 | 0,854 | 23 | 18,968 | 16,26 | –7,2857 | 53,0816 |
| 6 | 3,5 | 0,067 | 0,049 | 3,262 | 15 | 20,574 | 31,07 | –15,286 | 233,653 |
| 7 | 4 | 0,037 | 0,044 | 0,556 | 27 | 22,477 | 20,46 | –3,2857 | 10,7959 |
| 8 | 4,5 | 0,045 | 0,040 | 0,258 | 22 | 24,767 | 7,659 | –8,2857 | 68,6531 |
| 9 | 5 | 0,029 | 0,036 | 0,591 | 35 | 27,578 | 55,08 | 4,71429 | 22,2245 |
| 10 | 5,5 | 0,040 | 0,032 | 0,617 | 25 | 31,108 | 37,31 | –5,2857 | 27,9388 |
| 11 | 6 | 0,024 | 0,028 | 0,178 | 42 | 35,675 | 40,0 | 11,7143 | 137,224 |
| 12 | 6,5 | 0,026 | 0,024 | 0,058 | 38 | 41,814 | 14,54 | 7,71429 | 59,5102 |
| 13 | 7 | 0,018 | 0,020 | 0,026 | 55 | 50,503 | 20,22 | 24,7143 | 610,796 |
| 14 | 7,5 | 0,013 | 0,016 | 0,064 | 76 | 63,752 | 150,0 | 45,7143 | 2089,8 |
| $\sum$ | | | | 13,292 | 424 | | 427,128 | | 4108,857 |

З цією метою розраховуємо:

– середнє значення залежної змінної $Y$ за всіма дослідами в експерименті:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{424}{14} = 30{,}286\,;$$

– дисперсії залишкової і навколо середнього:

$$s^2_{зал} = \frac{427{,}128}{14-2} = 35{,}594\,; \qquad s^2_{Y-\bar{Y}} = \frac{4108{,}857}{14-1} = 316{,}066\,; \qquad (3.140)$$

– розрахункове і табличне[142] значення критерію Фішера:

$$F_p = \frac{s^2_{Y-\bar{Y}}}{s^2_{зал}} = \frac{316{,}066}{35{,}594} = 8{,}8798 \;>\; F_{табл}\left[5\%, 13{,}12\right] = 2{,}6675\,.$$

Оскільки $F_p > F_{табл}$, то отримана модель (3.138) адекватно[143] описує залежність між виходом $Y$ та входом $X$.

---

[142] Користуючись таблицею розподілу Фішера, наведеного в додатку В, таблиці В.6.

[143] Слід відзначити, що чим $F_p$ більше, тим краще модель описує залежність між входом $x$ та виходом $y$. Теоретично, при $F_p = +\infty$ модель описує дані функціонально, наприклад, при застосуванні насичених планів $X$ критерій МНК $\to 0$ (3.113).

• *Довірча зона базисних* (експериментальних) даних. Похибка[144] прогнозу моделі (3.138) визначається за формулою (3.124) у вигляді[145]:

$$s\left\{\hat{Y}\right\} = s_{зал}\sqrt{1+\xi}\,, \tag{3.141}$$

де $\xi$ – дисперсійна[146] функція моделі (3.137).

Запишемо дисперсійну функцію $\xi$ моделі (3.137) в загальному вигляді:

$$\xi = \tilde{f}^{T}(x)D\tilde{f}(x) = \left\| 1, x \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0{,}3890109 & -7{,}472526\cdot 10^{-2} \\ -7{,}472526\cdot 10^{-2} & 1{,}758241\cdot 10^{-2} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \right\| \tag{3.142}$$

Розглянемо її фізичну суть, для чого виведемо (3.142) в символьному виді для моделі (3.127). На основі (3.130) інформаційна матриця запишеться у виді (3.143), а знаходячи обернену матрицю до інформаційної за методом визначників – дисперсійна у вигляді (3.144).

$$I = \left\| \begin{matrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{matrix} \right\|; \tag{3.143}$$

$$D = \frac{1}{\det I}\left\| I \right\|^{-1} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}\left\| \begin{matrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{matrix} \right\|. \tag{3.144}$$

---

[144] Хоч моделі (3.137) і (3.138) обернено пропорційні: $y = 1/Y$, але похибка $\xi$ за рахунок МНК вважається однаковою (див. таблицю 3.39, колонки $\xi_i = f(\hat{y}_i)$ і $\xi_i = f(\hat{Y}_i)$).

[145] Для точок плану при побудові довірчої зони базисних (експериментальних) даних користуємось все тією ж формулою (3.124), виходячи з фізичної суті $\xi$ (див. нижче).

[146] На практиці дисперсійна функція – теоретичне МНК-викривлення дисперсії (залишків, експерименту) незалежної змінної за рахунок положення точки в факторному просторі для точок плану *X* приймає значення в межах [0;1], а коли план насичений, то $\xi = 1$ (це означає, що в цьому випадку викривлення не спостерігається, тобто похибки досліду і прогнозу співпадають). Слід відзначити, що $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ всіх точок плану *X* дорівнює *l*, тобто кількості складових моделі (3.112). Для точок плану *X* значення $\xi$ неявно показує ступінь наближення плану до насиченості: чим більше точок в плані (при $l = const$), тим значення $\xi$ в більшій мірі прямує до 0, отже точність прогнозу є вищою (щодо насиченого плану), і навпаки, при $n \to l$ – $\xi \to 1$ викривлення дисперсії зменшується. При інтерполяційних (тобто в зоні «проведення» експерименту) чи екстраполяційних (тобто в зоні «не проведення» експерименту) підрахунках $\xi$ може приймати значення від 0 до $+\infty$. Тому формулу (3.124) для прогнозів використовують по відношенню до одиниці у вигляді формули (3.141), оскільки не може прогноз по моделі (поза точками плану) бути точнішим, а ніж в самих точках плану *X*. Фізично $\xi$ є свого роду неявним критерієм геометричності розташування точок (одна від одної) у факторному просторі.

Аналогічно (3.142), підставляючи знайдений вираз для $D$, і вектор відомих функцій $\tilde{f}^T(x_i)=\|1,x_i\|$ в (3.125) і перемножуючи матриці та зводячи подібні для будь-якої точки $x_i$ отримаємо:

$$\xi_i=\|1,x_i\|\times\frac{1}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}\begin{Vmatrix}\sum x_i^2 & -\sum x_i\\ -\sum x_i & n\end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix}1\\ x_i\end{Vmatrix}=\frac{x_i^2n-2x_i\sum x_i+\sum x_i^2}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}. \qquad (3.145)$$

Приведемо чисельник (3.145) до його фізичної суті, для чого додамо і віднімемо $\pm 2\bar{x}^2=\pm 2\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$:

$$x_i^2n-2x_i\sum x_i+\sum x_i^2=n\left(x_i^2-\frac{2x_i\sum x_i}{n}+\frac{\sum x_i^2}{n}\pm 2\bar{x}^2\right)=n\left[\left(x_i^2-\frac{2x_i\sum x_i}{n}+\bar{x}^2\right)+\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-2\bar{x}^2+\bar{x}^2\right)\right]=$$

$$n\left[\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)+\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-2\bar{x}\frac{\sum x_i}{n}+\frac{n}{n}\bar{x}^2\right)\right]=n\left[\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)+\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2-2\bar{x}\sum x_i+\sum \bar{x}^2\right)\right]=$$

$$n\left[\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)+\frac{1}{n}\sum\left(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2\right)\right]=n\left[\left(x_i-\bar{x}\right)^2+\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}\right].$$

З врахуванням того, що знаменник (3.145), це також сума квадратів відхилень $n\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ вираз (3.145) для будь-якого $x_i$ набуває вигляду:

$$\xi_i=\frac{n\left[\left(x_i-\bar{x}\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right]}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\frac{\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}+\frac{1}{n}. \qquad (3.146)$$

Фізична суть $\xi_i$ для точок плану – доля квадрату відстані $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ точки $x_i$ від центру плану $\bar{x}$ в загальній сумі відстаней $\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ всіх точок плану від його центру $\bar{x}$. Тобто знаючи $\xi_i$ будь-якої точки, центр плану $\bar{x}$ і загальну суму відстаней всього плану $\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ можна розрахувати значення (розташування) цієї точки $x_i$[147] в факторному просторі $\hat{x}_i=\bar{x}\mp\sqrt{\left(\xi_i-\frac{1}{n}\right)\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$ (таблиця 3.39).

[147] Дані $x_i$ мають бути впорядкованими.

Таблиця 3.39 – **Фізична суть $\xi_i$ для моделі (3.127), на прикладі плану експерименту (таблиця 3.35) , а також в порівнянні до $y_i$, $\hat{y}_i$ та $\hat{Y}_i$**

| $i$ | $x_i$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $\xi_i=f(x_i)$ | $\xi_i-\frac{1}{n}$ | $\hat{x}_i$ | $y_i$ | $\xi_i=f(y_i)$ | $\hat{y}_i$ | $\xi_i=f(\hat{y}_i)$ | $\hat{Y}_i$ | $\xi_i=f(\hat{Y}_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10,562 | *0,2571* | 0,1857 | 1 | 0,063 | 0,1492 | 0,069 | *0,2571* | 14,455 | 0,1433 |
| 2 | 1,5 | 7,5625 | *0,2044* | 0,1330 | 1,5 | 0,056 | 0,1047 | 0,065 | *0,2044* | 15,369 | 0,1343 |
| 3 | 2 | 5,0625 | *0,1604* | 0,0890 | 2 | 0,083 | 0,3943 | 0,061 | *0,1604* | 16,407 | 0,1249 |
| 4 | 2,5 | 3,0625 | *0,1253* | 0,0539 | 2,5 | 0,050 | 0,0825 | 0,057 | *0,1253* | 17,595 | 0,1150 |
| 5 | 3 | 1,5625 | *0,0989* | 0,0275 | 3 | 0,043 | 0,0716 | 0,053 | *0,0989* | 18,968 | 0,1049 |
| 6 | *3,5* | *0,5625* | *0,0813* | 0,0099 | 3,5 | 0,067 | 0,1848 | 0,049 | *0,0813* | 20,574 | 0,0947 |
| 7 | 4 | 0,0625 | *0,0725* | 0,0011 | 4 | 0,037 | 0,0775 | 0,044 | *0,0725* | 22,477 | 0,0850 |
| 8 | 4,5 | 0,0625 | *0,0725* | 0,0011 | 4,5 | 0,045 | 0,0732 | 0,040 | *0,0725* | 24,768 | 0,0768 |
| 9 | 5 | 0,5625 | *0,0813* | 0,0099 | 5 | 0,029 | 0,1085 | 0,036 | *0,0813* | 27,578 | 0,0718 |
| 10 | 5,5 | 1,5625 | *0,0989* | 0,0275 | 5,5 | 0,040 | 0,0726 | 0,032 | *0,0989* | 31,109 | 0,0736 |
| 11 | 6 | 3,0625 | *0,1253* | 0,0539 | 6 | 0,024 | 0,1384 | 0,028 | *0,1253* | 35,675 | 0,0891 |
| 12 | 6,5 | 5,0625 | *0,1604* | 0,0890 | 6,5 | 0,026 | 0,1216 | 0,024 | *0,1604* | 41,814 | 0,1333 |
| 13 | 7 | 7,5625 | *0,2044* | 0,1330 | 7 | 0,018 | 0,1849 | 0,020 | *0,2044* | 50,503 | 0,2420 |
| 14 | 7,5 | 10,562 | *0,2571* | 0,1857 | 7,5 | 0,013 | 0,2368 | 0,016 | *0,2571* | 63,752 | 0,5113 |
| $\sum$ | 59,5 | 56,875 | 2 | | | 0,594 | 2 | 0,5941 | 2 | 401,043 | 2 |
| $\bar{x}$=4,25 | | | | | | $\bar{y}=0{,}0424$ | | $\bar{\hat{y}}=0{,}0424$ | | $\bar{\hat{Y}}=28{,}646$ | |

Використовуючи формулу (3.146) і врахувуючи, що $\bar{x}=59{,}5/14=4{,}25$ прокоментуємо значення $\xi_i$ на прикладі $x_i$ = 3,5. Квадрат відстані $(3{,}5-4{,}25)^2$ в сумі $\sum_{i=1}^{n}(x_i-4{,}25)^2$ складає $\frac{0{,}5625}{56{,}875}=0{,}0099$, що є нижче від $\xi_i$ = 0,0813 на дельту $\frac{1}{n}=\frac{1}{14}$. Отже $\xi_i$ розрахована за формулою (3.146) чи (3.142) більша за відношення $\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, однак його завжди можна розрахувати[148] з $\xi_i$.

[148] Для точності нас цікавить саме результат відношення 0,0099, однак в $\xi_i$ закладений «запас», визначений за різницею 0,0813–0,0099. До речі, вже при $l$ = 3 саме відношення (3.146) має інший вигляд, але завжди від центру, однак є можливість розрахувати за ним положення точки в факторному просторі, тільки потрібно більше даних: так, щоб в 2-факторному просторі ($x_1$, $x_2$) розрахувати значення, наприклад $x_1$, то необхідно знати якому $x_2$ воно має відповідати.

Розташування залежної змінної $\hat{y}$ відносно $\overline{\hat{y}}$ геометрично пропорційне (у відстанях) розташуванню точок факторного простору (колонки таблиці $\xi_i = f(x_i)$ та $\xi_i = f(\hat{y}_i)$ однакові), отже можливо досить точно з похибкою моделі передбачити[149] значення $\hat{y}_i$ в будь-якій точці факторного простору $x_i$. От чому функцію $\xi = \tilde{f}^T(x)D\tilde{f}(x)$, в котру взагалі не входять залежні вихідні дані $y_i$, називають саме теоретичною похибкою[150] прогнозу залежної змінної $\hat{y}$. Однак, це стосується тільки лінійної моделі (3.127), а для нелінійних моделей геометрична пропорційність порушується, тому замість формули (3.124) користуються формулою (3.141).

*Зони надійності прогнозів*[151] будь-якої моделі (3.112) в точці $x_i$ визначаються за формулою:

$$\Delta\hat{y}(x_i) = \hat{y}(x_i) \mp const_i = \hat{y}(x_i) \mp t_{табл}[q\%, f_{зал}] \cdot s\left\{\hat{y}\big|_{x_i}\right\} \qquad (3.147)$$

де $\Delta\hat{y}(x_i)$ – інтервал надійності прогнозу в точці $x_i$;

$\hat{y}(x_i)$, $s\left\{\hat{y}\big|_{x_i}\right\}$ – відповідно прогноз і похибка прогнозу за моделлю (3.112) в точці $x_i$.

*Довірча зона базисних* (експериментальних, вихідних) *даних* буде визначатися (3.147) для всіх точок плану $X$ (таблиця 3.35).

Критерій Стьюдента, як зазначалося вище, $t_{табл}[5\%, 12] = 2{,}179$; середнє квадратичне відхилення залишків моделі (3.138) розраховане в (3.140): $s_{зал} = \sqrt{s^2_{зал}} = \sqrt{35{,}594} = 5{,}9661$. Результати розрахунків довірчої зони наведено в таблиці 3.40.

Наведемо послідовність розрахунків на прикладі $x$ = 3,5, враховуючи що дані колонок: $x$, $Y$, $\hat{Y}$ беремо з таблиці 3.38:

$$- \ \xi_i = \tilde{f}^T(x_i)D\tilde{f}(x_i) = \left\| 1,\ 3{,}5 \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0{,}3890109 & -7{,}472526 \cdot 10^{-2} \\ -7{,}472526 \cdot 10^{-2} & 1{,}758241 \cdot 10^{-2} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1 \\ 3{,}5 \end{matrix} \right\| = 0{,}0813;$$

$$-s\left\{\hat{Y}\Big|_{x_i=3,5}\right\} = s_{зал}\sqrt{\xi_i} = 5{,}9661\sqrt{0{,}0813} = 1{,}701^{152};$$

---

[149] Знаючи похибку експерименту $s^2_{експ}$ приблизно передбачити де буде розташована експериментальна незалежна змінна $y$ для потрібної контрольної точки $x_i$. Тому на практиці користуються замість (3.124) для похибки прогнозу вихідної змінної (3.141), яка збільшує розкид $y$ від $\overline{y}$ до межі. І якщо виконується умова адекватності (виноска 123) моделі в контрольній точці, то модель при заданому рівні значущості дійсно адекватна.

[150] Навколо її середньої.

[151] Аналогічно зонам надійності коефіцієнтів моделі.

– $const_i = 2{,}179 \cdot 1{,}701 = 3{,}707$;

– довірча зона: від $\hat{Y}_i^{(-)} = 20{,}574 - 3{,}707 = 16{,}867$ до $\hat{Y}_i^{(+)} = 20{,}574 + 3{,}707 = 24{,}281$.

Таблиця 3.40 – **Довірча зона базисних даних**

| $i$ | $Y_i$ | $x_i$ | $\xi_i$ | $s\{\hat{Y}_i\}$ | $const_i$ | $\hat{Y}_i$ | $\hat{Y}_i^{(-)}$ | $\hat{Y}_i^{(+)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 1 | 0,2571 | 3,025 | 6,592 | 14,455 | 7,863 | 21,047 |
| 2 | 18 | 1,5 | 0,2044 | 2,697 | 5,877 | 15,369 | 9,492 | 21,247 |
| 3 | 12 | 2 | 0,1604 | 2,390 | 5,207 | 16,407 | 11,200 | 21,614 |
| 4 | 20 | 2,5 | 0,1253 | 2,112 | 4,601 | 17,595 | 12,993 | 22,196 |
| 5 | 23 | 3 | 0,0989 | 1,876 | 4,088 | 18,968 | 14,880 | 23,056 |
| *6* | *15* | *3,5* | *0,0813* | *1,701* | *3,707* | *20,574* | *16,867* | *24,281* |
| 7 | 27 | 4 | 0,0725 | 1,607 | 3,501 | 22,477 | 18,976 | 25,978 |
| 8 | 22 | 4,5 | 0,0725 | 1,607 | 3,501 | 24,768 | 21,266 | 28,269 |
| 9 | 35 | 5 | 0,0813 | 1,701 | 3,707 | 27,578 | 23,871 | 31,285 |
| 10 | 25 | 5,5 | 0,0989 | 1,876 | 4,088 | 31,109 | 27,020 | 35,197 |
| 11 | 42 | 6 | 0,1253 | 2,112 | 4,601 | 35,675 | 31,074 | 40,277 |
| 12 | 38 | 6,5 | 0,1604 | 2,390 | 5,207 | 41,814 | 36,606 | 47,021 |
| 13 | 55 | 7 | 0,2044 | 2,697 | 5,877 | 50,503 | 44,626 | 56,381 |
| 14 | 76 | 7,5 | 0,2571 | 3,025 | 6,592 | 63,752 | 57,160 | 70,344 |

• *Точкова оцінка прогнозу* та його зона надійності. Для того, щоб прогнозувати залежну змінну $Y$ при $X = 8{,}5$ скористаємося (3.138):

$$\hat{Y} = \frac{1}{0{,}0774102 - 8{,}22993 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}5} = 134{,}1 \qquad (3.148)$$

Похибка прогнозу за моделлю (3.138) за рахунок положення точки в факторному простору і прогнозних властивостей моделі:

$$s\left\{\hat{Y}\Big|_{x=8,5}\right\} = s_{зал}\sqrt{1+\xi} = 5{,}9661\sqrt{1 + \left\|1, 8{,}5\right\| \times \left\|\begin{matrix} 0{,}3890109 & -7{,}472526 \cdot 10^{-2} \\ -7{,}472526 \cdot 10^{-2} & 1?758241 \cdot 1-^{-2} \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} 1 \\ 8{,}5 \end{matrix}\right\|} = 7{,}0314.$$

Розрахуємо *зону надійності*[153] *прогнозу* (3.148) чи його інтервальну оцінку за формулою (3.147), враховуючи, що критерій Стьюдента, знайдений вище, $t_{табл}[5\%, 12] = 2{,}179$:

---

[152] Можна було б і тут під коренем замість $\xi$ використовувати $1+\xi$, але так надійніше, оскільки це довірча зона саме експериментальних даних (вихідної змінної плану) – чим вужча, тим дані більш точніше лягають на криву (3.137), (3.138) і вони краще описуються обраною моделлю. Для будь-якої іншої контрольної точки ця зона розширюється за рахунок $1+\xi$ – чим більше інтервал, тим ймовірніше, що отриманий прогноз буде лежати в його межах.

[153] Інтервальна оцінка.

$$\Delta\hat{Y}(8{,}5) = 134{,}1 \mp 2{,}179 \cdot 7{,}0314 = 134{,}1 \mp 15{,}3214 = [118{,}8;\ 149{,}4] \qquad (3.149)$$

Таким чином, при $x$ = 8,5 прогноз $\hat{Y} = 134{,}1$ із зоною надійності $[118{,}8;\ 149{,}4]$.

Для візуального сприйняття інформації, отриманої в результаті експерименту $Y$ і прогнозу за моделлю $\hat{Y}$ та її довірчу зону $[\hat{Y}^{(-)}; \hat{Y}^{(+)}]$ за даними таблиці 3.40 побудуємо графічні залежності в'язкості від концентрації шляхом нанесення їх на координатну площину $X0Y$ (рисунок 3.10).

Отриманий графік, як і $F$-відношення (8,8798), також показує, що знайдена математична модель (3.138) добре описує залежність показника зміни $Y$ від незалежної змінної $X$. Але слід звернути увагу на те, що довірча зона не покриває всі вихідні дані $Y$, що можна пояснити не оптимальністю вибору плану $X$, або виду[154] моделі $\tilde{f}^T(\bar{x})$.

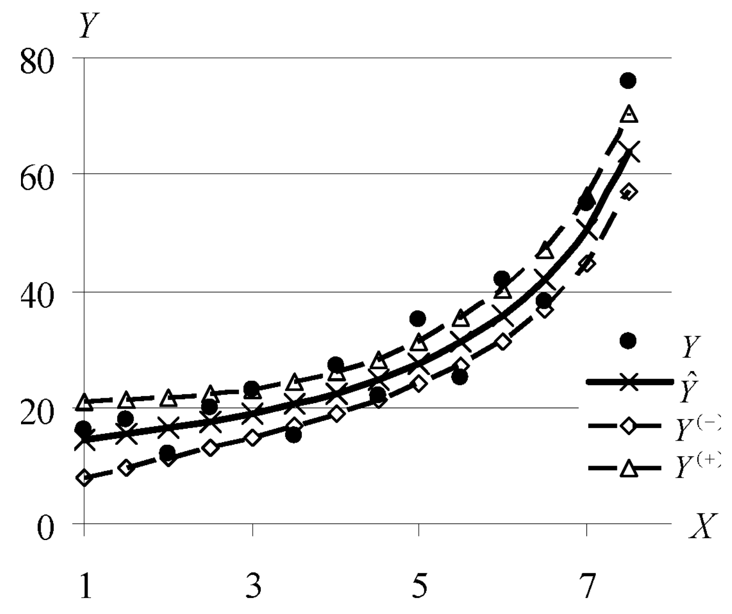



Рисунок 3.10 – **Залежна змінна, отримана: $Y$ – експериментально, $\hat{Y}$ – за прогнозом моделлю (3.138) та її довірча зона $[\hat{Y}^{(-)}; \hat{Y}^{(+)}]$**

*Приклад* 3.16

На основі статистичних даних показника $y$ і факторів $x_1$ та $x_2$, наведених у таблиці 3.41, знайти оцінки параметрів моделі, якщо припустити, що стохастична залежність між факторами і показником має вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + b_2 x_2^2. \qquad (3.150)$$

Таблиця 3.41 – **План експерименту $X$ і результати дослідів $Y$**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 14,5 | 13 | 15,5 | 16 | 14,5 | 17 | 17,5 | 15,5 | 18,5 | 19 | 20 |
| $x_2$ | 13 | 15 | 10,7 | 9 | 14 | 15,3 | 15 | 17 | 19 | 21 | 25 |
| y | 47,5 | 58,5 | 68,5 | 48,5 | 83,5 | 108 | 122 | 110 | 125 | 144 | ? |

Використовуючи критерій Фішера, з надійністю $p$ = 0,95 оцінити адекватність прийнятої математичної моделі статистичним даним. Якщо модель адекватна, то знайти: оцінку прогнозу та його зону надійності.

[154] Можливо слід підвищити порядок моделі (3.138) до 2.

*Розв'язок*

• *Оцінка коефіцієнтів моделі та перевірка її адекватності.*

На основі виду апроксимуючої функції (3.150) вектор відомих функцій запишеться так: $\tilde{f}^T(\bar{x}) = \left\| 1,\ 1/x_1,\ x_2^2 \right\|$. За даними плану експерименту $X$ з врахуванням вектора $\tilde{f}^T(\bar{x})$ складемо узагальнену матрицю $F$ (таблиця 3.42).

Таблиця 3.42 – **Узагальнена вектором відомих функцій $\tilde{f}^T(\bar{x})$ матриця плану експерименту $X$**

| $i$ | План $X$ | | Узагальнена матриця $F$ | | | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $f_1 = 1$ | $f_2 = 1/x_1$ | $f_3 = x_2^2$ | |
| 1 | 14,5 | 13 | 1 | $6{,}896552\cdot10^{-2}$ | 169 | 47,5 |
| 2 | 13 | 15 | 1 | $7{,}692308\cdot10^{-2}$ | 225 | 58,5 |
| 3 | 15,5 | 10,7 | 1 | $6{,}451613\cdot10^{-2}$ | 114,49 | 68,5 |
| 4 | 16 | 9 | 1 | 0,0625 | 81 | 48,5 |
| 5 | 14,5 | 14 | 1 | $6{,}896552\cdot10^{-2}$ | 196 | 83,5 |
| 6 | 17 | 15,3 | 1 | $5{,}882353\cdot10^{-2}$ | 234,09 | 108 |
| 7 | 17,5 | 15 | 1 | $5{,}714286\cdot10^{-2}$ | 225 | 122 |
| 8 | 15,5 | 17 | 1 | $6{,}451613\cdot10^{-2}$ | 289 | 110 |
| 9 | 18,5 | 19 | 1 | $5{,}405406\cdot10^{-2}$ | 361 | 125 |
| 10 | 19 | 21 | 1 | $5{,}263158\cdot10^{-2}$ | 441 | 144 |
| | | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | |

Отже, використовуючи дані[155] таблиці 3.42 і зробивши відповідні матричні перетворення[156] (3.116) отримуємо систему нормальних рівнянь (3.151) і дисперсійну матрицю (3.152):

$$\begin{Vmatrix} 10 & 0{,}6290384 & 2335{,}58 \\ 0{,}6290384 & 0{,}040078 & 142{,}9254 \\ 2335{,}58 & 142{,}9254 & 651017{,}1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 915{,}49475 \\ 55{,}74161 \\ 242476{,}58 \end{Vmatrix}; \qquad (3.151)$$

$$D = \begin{Vmatrix} 14{,}98899 & -200{,}3396 & -9{,}791394\cdot10^{-3} \\ -200{,}3396 & 2792{,}64 & 0{,}1056347 \\ -9{,}791397\cdot10^{-3} & 0{,}1056348 & 1{,}34723\cdot10^{-5} \end{Vmatrix}. \qquad (3.152)$$

Розв'язуючи систему (3.151) через матрицю (3.152) знаходимо: $b_0$ = 180,9059; $b_1 = -2129{,}684$; $b_2 = 0{,}190997$.

---

[155] Матрицю $F$ та вектор спостережень $Y$.

[156] Аналог розрахунків див. в прикладі 3.15.

Підставляючи знайдені коефіцієнти в модель (3.150) знаходимо аналітичну залежність між незалежними $\bar{x}$ та залежною $y$ змінними:

$$\hat{y} = 180,9059 - \frac{2129,684}{x_1} + 0,190997 x_2^2 \tag{3.153}$$

Оцінимо відповідність моделі (3.153) експериментальним даним таблиці 3.41 за $F$-відношенням (3.121). Результати допоміжних розрахунків наведено в таблиці 3.43.

Таблиця 3.43 – **Оцінка точності моделі (3.153)**

| $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $y_i - \hat{y}_i$ | $(y_i - \hat{y}_i)^2$ | $y_i - \bar{y}$ | $(y_i - \bar{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 47,5 | 66,310 | 18,810 | 353,816 | –44,050 | 1940,403 |
| 2 | 58,5 | 60,058 | 1,558 | 2,427 | –33,050 | 1092,303 |
| 3 | 68,5 | 65,374 | –3,126 | 9,772 | –23,050 | 531,303 |
| 4 | 48,5 | 63,271 | 14,771 | 218,182 | –43,050 | 1853,303 |
| 5 | 83,5 | 71,467 | –12,033 | 144,793 | –8,050 | 64,803 |
| 6 | 108,0 | 100,341 | –7,659 | 58,660 | 16,450 | 270,602 |
| 7 | 122,0 | 102,184 | –19,816 | 392,674 | 30,450 | 927,202 |
| 8 | 110,0 | 98,705 | –11,295 | 127,577 | 18,450 | 340,402 |
| 9 | 125,0 | 134,738 | 9,738 | 94,829 | 33,450 | 1118,902 |
| 10 | 144,0 | 153,047 | 9,047 | 81,848 | 52,450 | 2751,002 |
| $\sum$ | 915,5 | | | 1484,579 | | 10890,226 |

З цією метою розраховуємо:

– середнє значення залежної змінної $Y$ за всіма дослідами в експерименті:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{915,5}{10} = 91,55;$$

– дисперсії залишкової і навколо середнього:

$$s_{зал}^2 = \frac{SS_{зал}}{n-l} = \frac{1484,579}{10-3} = 212,0827; \quad s_{y-\bar{y}}^2 = \frac{SS_{y-\bar{y}}}{n-1} = \frac{10890,226}{10-1} = 1210,025; \tag{3.154}$$

– розрахункове і табличне[157] значення критерію Фішера:

$$F_p = \frac{s_{y-\bar{y}}^2}{s_{зал}^2} = \frac{1210,025}{212,0827} = 5,71 > F_{табл}[5\%,\ 9,\ 7] = 3,68. \tag{3.155}$$

Оскільки $F_p > F_{табл}$, то отримана модель (3.153) адекватно[158] описує залежність між виходом $y$ та входами $x_1$ та $x_2$.

---

[157] Користуючись таблицею розподілу Фішера, наведеного в додатку В (таблиця В.6).

[158] Щоб модель задовольняла експериментальним даним за формулою (3.121) $F_p$ має перевищувати $F_{табл}$ у 3–4 рази.

Розрахунки коефіцієнтів моделі (3.150) матрично та за допомогою компоненту «Регрессия» (3.2.3.3), а також її статистичної інформації наведено в додатку Л.

• *Точкова оцінка прогнозу та його надійний інтервал*

Для того, щоб прогнозувати залежну змінну $y$ при $x_1 = 20$ та $x_2 = 25$ скористаємося (3.153):

$$\hat{y}\Big|_{(20;\ 25)} = 180{,}9059 - \frac{2129{,}684}{20} + 0{,}190997 \cdot 25^2 = 193{,}795 \qquad (3.156)$$

Похибка прогнозу за моделлю (3.153) за рахунок положення точки в факторному простору і прогнозних властивостей моделі розраховується за (3.141):

$$s\left\{\hat{y}\Big|_{(20;25)}\right\} = s_{зал}\sqrt{1+\xi} =$$

$$= 212{,}0827^{1/2}\sqrt{1+\left\|1 \quad \frac{1}{20} \quad 25^2\right\| \times \left\|\begin{matrix} 14{,}98899 & -200{,}3396 & -9{,}791394\cdot10^{-3} \\ -200{,}3396 & 2792{,}64 & 0{,}1056347 \\ -9{,}791397\cdot10^{-3} & 0{,}1056348 & 1{,}34723\cdot10^{-5} \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 25 \end{matrix}\right.}$$

$$= 14{,}563\sqrt{1+1{,}562171} = 23{,}311.$$

Розрахуємо *зону надійності прогнозу* (3.156) за формулою (3.147), враховуючи, що критерій Стьюдента[159] $t_{табл}\left[5\%, 7\right] = 2{,}36$:

$$\Delta\,\hat{y}_{(20;\,25)} = 193{,}795 \pm 2{,}36 \cdot 23{,}311 = 193{,}795 \pm 55{,}014 = \left(138{,}781;\, 248{,}809\right) \quad (3.157)$$

Таким чином, прогноз $\hat{y}_{(20;\,25)} = 193{,}8$ з надійністю $\left[138{,}8;\, 248{,}8\right]$.

Хоча модель (3.153) статистично адекватна експериментальним даним таблиці 3.41 за (3.155), однак прогноз ±50 одиниць (3.157) це досить суттєво. Отже, як спеціалісту подібна модель для *прогнозних* екстраполяційних розрахунків не підійде. Необхідно змінити сам вид моделі (3.150), хоча б тому, що по-перше, самі коефіцієнти моделі (3.153) *на порядки*[160] відрізняються один від одного; по-друге, вплив змінних $x_1$ та $x_2$ за експериментальними даними *одного порядку*, в моделі обернено пропорційний[161], тобто відомі функції $f_2 = \dfrac{1}{x_1}$; $f_3 = x_2^2$; по-третє, навіть модель простого лінійного[162] виду $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1$

[159] Додаток В (таблиця В.3).

[160] $b_0 = 180{,}9059$; $b_1 = -2129{,}684$; $b_2 = 0{,}190997$.

[161] Причому степенево.

[162] $\hat{y} = 9{,}140839\,x_1 + 5{,}478533\,x_2 - 137{,}2481$.

$+ b_2x_2$ для експериментальних даних таблиці 3.41 має $F$-відношення[163] 6,48, що свідчить про її кращі прогнозні властивості й легшу фізичну інтерпретацію незалежних змінних.

*Приклад* 3.17

За даними прикладів 3.7 і 3.8 отримати математичну модель у виді залежності:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x + b_2x^2 \tag{3.158}$$

і оцінити її адекватність за $F$-відношенням (3.123). При цьому незалежна змінна $x$ є температура, °С, а залежна $y$ – концентрація хімічного матеріалу, г/л.

*Розв'язок*

На основі апроксимуючої функції (3.158) вектор відомих функцій запишеться так: $\tilde{f}^T(\bar{x}) = \left\| 1,\ x,\ x^2 \right\|$. За даними плану експерименту $X$ (таблиця 3.14) з врахуванням вектора $\tilde{f}^T(\bar{x})$ складемо узагальнену матрицю $F$ (таблиця 3.44).

За даними[164] таблиці 3.44 після відповідних матричних перетворень[165] (3.116) отримуємо систему нормальних рівнянь (3.159) і дисперсійну матрицю (3.160):

$$\begin{Vmatrix} 20 & 1000 & 51000 \\ 1000 & 51000 & 2650000 \\ 51000 & 2650000 & 140085000 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 48{,}3 \\ 2156 \\ 97575 \end{Vmatrix}; \tag{3.159}$$

$$D = \begin{Vmatrix} 174{,}05 & -7{,}05 & 0{,}07 \\ -7{,}05 & 0{,}286714286 & -0{,}002857143 \\ 0{,}07 & -0{,}002857143 & 2{,}85714 \cdot 10^{-5} \end{Vmatrix}. \tag{3.160}$$

Розв′язуючи систему (3.159) через матрицю (3.160) знаходимо: $b_0$ = 37,065; $b_1$ = –1,144714286; $b_2$ = 0,008857143.

Підставляючи знайдені коефіцієнти в модель (3.158) знаходимо аналітичну залежність між незалежною $x$ та залежною $y$ змінними:

$$\hat{y} = 37{,}065 - 1{,}144714286x + 0{,}008857143x^2 \tag{3.161}$$

---

[163] Порівняно з (3.155).
[164] Матрицю $F$ та вектор спостережень $Y$.
[165] Аналог розрахунків див. в прикладі 3.15.

Таблиця 3.44 – **Узагальнена вектором відомих функцій $\tilde{f}^T(\bar{x})$ матриця плану експерименту $X$**

| $i$ | $X$ | Узагальнена матриця $F$ | | | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $f_1 = 1$ | $f_2 = x$ | $f_3 = x^2$ | |
| 1 | 40 | 1 | 40 | 1600 | 5,1 |
| 2 | 40 | 1 | 40 | 1600 | 5,5 |
| 3 | 40 | 1 | 40 | 1600 | 5,2 |
| 4 | 40 | 1 | 40 | 1600 | 5,4 |
| 5 | 45 | 1 | 45 | 2025 | 3,9 |
| 6 | 45 | 1 | 45 | 2025 | 4 |
| 7 | 45 | 1 | 45 | 2025 | 3,7 |
| 8 | 45 | 1 | 45 | 2025 | 3,9 |
| 9 | 50 | 1 | 50 | 2500 | 1,5 |
| 10 | 50 | 1 | 50 | 2500 | 1,7 |
| 11 | 50 | 1 | 50 | 2500 | 1,7 |
| 12 | 50 | 1 | 50 | 2500 | 1,9 |
| 13 | 55 | 1 | 55 | 3025 | 0,7 |
| 14 | 55 | 1 | 55 | 3025 | 0,9 |
| 15 | 55 | 1 | 55 | 3025 | 0,9 |
| 16 | 55 | 1 | 55 | 3025 | 1 |
| 17 | 60 | 1 | 60 | 3600 | 0,3 |
| 18 | 60 | 1 | 60 | 3600 | 0,5 |
| 19 | 60 | 1 | 60 | 3600 | 0,2 |
| 20 | 60 | 1 | 60 | 3600 | 0,3 |
| | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | |

Оцінимо відповідність моделі (3.161) експериментальним даним таблиці 3.14 за $F$-відношенням (3.123). Результати допоміжних розрахунків наведено в таблиці 3.45.

З цією метою розраховуємо:

– дисперсію залишкову:

$$s^2_{зал} = \frac{SS_{зал}}{n-l} = \frac{1,318786}{20-3} = 0,07757563; \tag{3.162}$$

– враховуючи, що величини $s^2_{експ}$, $f_{експ}$ відомі з прикладу 3.8 визначимо розрахункове і табличне[166] значення критерію Фішера:

---

[166] Знаходимо за таблицею розподілу Фішера, наведеного в таблиці В.6 додатка В при $f_1 = f_{зал} = 20 - 3 = 17$ (чисельник) і $f_2 = f_{експ} = 15$ (знаменник) або з використанням функції MS Excel: =FРАСПОБР(вероятность;степени_свободы1;…), що відповідає значенню =FРАСПОБР(0,05;17;15) = 2,36826736.

$$F_{\mathrm{p}} = \frac{s^2_{зал}}{s^2_{експ}} = \frac{0{,}07757563}{0{,}0215} = 3{,}6082 \qquad > \qquad F_{табл}\left[5\%,\ 17,\ 15\right] = 2{,}37\,. \qquad (3.163)$$

Таблиця 3.45 – **Оцінка точності моделі (3.161)**

| $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i - \hat{y}_i)^2$ | $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i - \hat{y}_i)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,1 | 5,447857 | 0,121005 | 11 | 1,7 | 1,972143 | 0,074062 |
| 2 | 5,5 | 5,447857 | 0,002719 | 12 | 1,9 | 1,972143 | 0,005205 |
| 3 | 5,2 | 5,447857 | 0,061433 | 13 | 0,7 | 0,898571 | 0,039431 |
| 4 | 5,4 | 5,447857 | 0,00229 | 14 | 0,9 | 0,898571 | 2,04E-06 |
| 5 | 3,9 | 3,488571 | 0,169273 | 15 | 0,9 | 0,898571 | 2,04E-06 |
| 6 | 4 | 3,488571 | 0,261559 | 16 | 1 | 0,898571 | 0,010288 |
| 7 | 3,7 | 3,488571 | 0,044702 | 17 | 0,3 | 0,267857 | 0,001033 |
| 8 | 3,9 | 3,488571 | 0,169273 | 18 | 0,5 | 0,267857 | 0,05389 |
| 9 | 1,5 | 1,972143 | 0,222919 | 19 | 0,2 | 0,267857 | 0,004605 |
| 10 | 1,7 | 1,972143 | 0,074062 | 20 | 0,3 | 0,267857 | 0,001033 |
| $\sum$ | | | | | | | 1,318786 |

Оскільки $F_p > F_{табл}$, то отримана модель (3.161) неадекватно описує залежність між вихідною $y$ та вхідною $x$ змінними. Це можна пояснити неправильним вибором виду моделі. Для досягнення адекватності необхідно підвищити степінь моделі (3.158).

*Примітка.* Коефіцієнти моделі можна отримати також за наступним способом. Приймаючи до уваги, що експериментальні дані незалежної змінної є однорідними за $G$-критерієм (приклад 3.7), то їх дійсні значення $\overline{y}_i$ є середніми арифметичними (див. таблицю 3.15, колонка $\overline{x}_i$), тому можна отримати наступну таблицю 3.46.

Таблиця 3.46 – **Узагальнена матриця *F***

| $i$ | $X$ | $F$ | | | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $f_1 = 1$ | $f_2 = x$ | $f_3 = x^2$ | |
| 1 | 40 | 1 | 40 | 1600 | 5,3 |
| 2 | 45 | 1 | 45 | 2025 | 3,875 |
| 3 | 50 | 1 | 50 | 2500 | 1,7 |
| 4 | 55 | 1 | 55 | 3025 | 0,875 |
| 5 | 60 | 1 | 60 | 3600 | 0,325 |
| | | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | |

Після матричних розрахунків аналогічних (3.159), (3.160) отримаємо модель (3.161). Оцінимо відповідність моделі (3.161) експериментальним даним таблиці 3.46 за $F$-відношенням (3.123). Результати допоміжних розрахунків наведено в таблиці 3.47.

Таблиця 3.47 – **Розрахунок $SS_{зал}$ моделі (3.161)**

| $i$ | $\overline{y}_i$ | $\hat{y}_i$ | $(\overline{y}_i - \hat{y}_i)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5,3 | 5,447857 | 0,021862 |
| 2 | 3,875 | 3,488571 | 0,149327 |
| 3 | 1,7 | 1,972143 | 0,074062 |
| 4 | 0,875 | 0,898571 | 0,000556 |
| 5 | 0,325 | 0,267857 | 0,003265 |
| $\sum$ | | | 0,249071 |

Залишкова дисперсія: $s^2_{зал} = \dfrac{SS_{зал}}{n-l} = \dfrac{0{,}249071}{5-3} = 0{,}124535714$.

Розрахункове і табличне значення критерію Фішера:

$$F_p = \frac{s^2_{зал}}{s^2_{експ}} = \frac{0{,}124535714}{0{,}0215} = 5{,}7924 > F_{табл}[5\%, 2, 15] = 3{,}68.$$

Отже, за обома способами модель (3.161) є неадекватною, незважаючи на різні значення $s^2_{зал}, F_р, F_{табл}$. За даними таблиці 3.46 можна отримати модель максимум 4 порядку (план насичений), хоча експериментальні дані таблиці 3.44 дозволяють отримати модель більше ніж 4 порядку. Для МНК ці способи є рівноцінними.

Таким чином, у прикладі 3.15 показано як розраховуються коефіцієнти будь-якої моделі лінійної за параметрами матрично за МНК, перевіряється значущість коефіцієнтів, адекватність моделі у випадку відсутності паралельних дослідів, а також розраховується похибка прогнозу у будь-якій контрольній точці, вибраній дослідником. У цьому прикладі не ставились паралельні досліди для встановлення більш точних значень залежної змінної, тому роль теоретичного аналогу похибки експерименту виконувала залишкова дисперсія. На практиці такий підхід доцільно робити тільки з економічних міркувань, тому що у математичній статистиці всі висновки робляться відносно похибки експерименту. Також у цьому прикладі використано статистичну обробку відносно моделі нелінійної за параметрами. Зазвичай для нелінійних моделей можна тільки розраховувати її коефіцієнти і перевіряти адекватність. Усі інші задачі (оцінка значущості коефіцієнтів, розрахунок похибки прогнозу) не виконуються, тому що МНК у матричній формі застосовується тільки до лінійних за параметрами моделей і кожний випадок необхідно розглядати окремо[167].

[167] Немає універсального підходу, не можна бути впевненим у висновках.

У прикладі 3.16 показано розрахунок коефіцієнтів моделі у випадку кількох незалежних змінних ($x_1$, $x_2$). Для цього необхідно тільки правильно побудувати матрицю $F$ відповідно до виду моделі. Всі інші матричні операції виконуються аналогічно. Значущість коефіцієнтів не перевірялась, оскільки як і у прикладі 3.15 паралельні досліди не ставились, тому можна тільки ранжувати вплив кожного коефіцієнта. Відкидати чи не відкидати складові моделі вирішує дослідник[168]. Наприклад, коли складна гіперповерхня $y$ у факторному просторі $\overline{x}$, то взагалі будують модель за насиченим планом[169], оскільки у цьому випадку гарантовано у всіх точках плану значення залежної змінної експериментальне $y_i$ і прогнозне $\hat{y}_i$ за моделлю співпадають[170]; при цьому адекватність моделі перевіряють у контрольних точках, які цікавлять дослідника. У прикладі 3.17[171] показано як розраховувати коефіцієнти моделі та перевіряти її адекватність у випадку постановки паралельних дослідів.

*Завдання для самостійної роботи* студентів наведено в додатку Л.

### 3.2.4 Динамічні моделі

При зміні  вхідного параметра $x$ вихідна змінна $y$ приймає постійне (стаціонарне, сталe) значення не одразу, а через якийсь визначений проміжок часу. Процес переходу системи з одного сталого стану в інший називають перехідним чи динамічним. Для математичного опису динаміки процесу використовують диференціальні рівняння (ДР). ДР дозволяють виразити співвідношення між змінами фізичних величин, і тому мають велике значення в теорії керування, хімії, фізиці тощо.

У даному розділі розглядається, яким чином за експериментальними даними (таблиця 3.20) визначати коефіцієнти будь-яких диференціальних рівнянь лінійних за параметрами до другого порядку включно на прикладі однорідного і неоднорідного лінійного диференціального рівняння 2 порядку із сталими коефіцієнтами. Також наведено метод знаходження коефіцієнтів нелінійних моделей за допомогою складеного для них спеціально диференціального рівняння, використовуючи яке визначаються деякі потрібні коефіцієнти нелінійної моделі.

---

[168] Наприклад, якщо відкидання складової призводить до неадекватності моделі.
[169] При цьому складові моделі не відкидають, наприклад, для задач «склад-властивість» (3.263).
[170] Див. приклад 3.11.
[171] Значущість коефіцієнтів не перевірялась за (3.119), тому що модель і так не адекватна.

### 3.2.4.1 Отримання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами за експериментальними даними

Найбільш простим в отриманні, розв'язку та використанні є *неоднорідне* диференціальне рівняння (НДР) *з постійними коефіцієнтами* (ПК) вигляду:

$$a_0 \frac{d^r y}{dx^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} + \ldots + a_{r-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{r-1} \frac{dy}{dx} + a_r y = f(x), \qquad (3.164)$$

що зв'язує незалежну змінну $x$, шукану функцію $y = y(x)$ та її похідні $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^r y}{dx^r}$,

де $r$ – порядок диференціального рівняння;

$f(x)$ – відома функція чи у загальному випадку функція з невідомими коефіцієнтами.

Якщо права частина виразу (3.164) рівна нулю, тобто $f(x) = 0$, то в цьому випадку диференціальне рівняння називається *однорідним* (ОДР). Для простоти запису ліву частину виразу (3.164) зазвичай записують в більш компактному вигляді:

$$a_0 y^{(r)} + a_1 y^{(r-1)} + \ldots + a_{r-2} y'' + a_{r-1} y' + a_r y = 0 \qquad (3.165)$$

Розв'язок (інтегрування) диференціального рівняння (3.165) полягає в пошуку функцій (розв'язків, інтегралів) $y(x)$, які задовольняють цьому рівнянню для всіх значень $x$ у певному скінченному чи нескінченному інтервалі $(a,b)$. Замітимо, що розв'язки можуть бути перевірені підстановкою у рівняння (3.165).

*Загальний розв'язок* звичайного ДР порядку $r$ має вигляд

$$y = y(x; C_1, C_2, \ldots, C_r), \qquad (3.166)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_r$ – довільні сталі (постійні інтегрування).

Кожний частковий вибір цих постійних дає *окремий розв'язок* (частинний). В задачі Коші (початковій задачі) необхідно знайти частинний розв'язок, тобто відшукати такі постійні:

$$C_1, C_2, \ldots, C_r, \qquad (3.167)$$

які можуть задовольнити $r$ *початковим умовам*[172] (п.у.)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(r-1)}(x_0) = y_0^{(r-1)} \qquad (3.168)$$

[172] Стан системи у початковій точці $x_0$, з якої вона починає свій рух.

за якими визначаються постійні (3.167).

Для поліпшення сприйняття подальшого матеріалу припустимо що: по-перше, як незалежна змінна *x* виступає[173] час *t*; по-друге, розглянемо отримання однорідного ДР (3.165), яке достатньо просто узагальнюється на неоднорідне ДР (3.164).

Отримання лінійних диференціальних рівнянь з ПК за експериментальними даними має три етапи:

1 Отримання за експериментальними даними, з використанням МНК, *різницевого аналога* (РА) диференціального рівняння порядку *r* вигляду

$$y_t = \tilde{a}_1 y_{t-1} + \tilde{a}_2 y_{t-2} + \ldots + \tilde{a}_r y_{t-r}, \qquad (3.169)$$

де $y_t$ – поточне значення вихідної змінної на момент часу *t*;

$y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-r}$ – значення вихідної змінної за 1, 2, …, *r* кроків до поточного моменту *t*;

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_r$ – невідомі коефіцієнти.

2 Визначення *постійних* коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_r$ неперервного аналога (НА) ДР (3.165) на основі різницевого аналога (3.169) з врахуванням часу дискретизації $\Delta t$.

3 Розв'язок отриманого неперервного ДР і визначення початкових умов (3.168).

Отже, етапи 1 і 2 зводяться до визначення *постійних* коефіцієнтів ДР (3.165), чи, інакше кажучи, до знаходження його аналітичного виду, а етап 3 – власне до розв'язку ДР. Розглянемо ці етапи більш детально на прикладі отримання однорідного ДР другого[174] порядку:

$$A\,y'' + B\,y' + C\,y = 0, \qquad (3.170)$$

де *A*, *B*, *C* – невідомі коефіцієнти,
чи в стандартному[175] вигляді:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \qquad (3.171)$$

де $p = B/A$; $q = C/A$.

---

[173] Для пояснення етапів 1 і 2 (див. далі), тобто у рівнянні (3.164) зліва і справа замість *x* пишемо *t*. Взагалі матеріал цього підрозділу присвячений випадку коли всюди *x* (фактор впливає) або всюди *t* (час впливає не прямо) на вихідну змінну $y$.

[174] ДР 1-го і 2-го порядку досить часто застосовуються на практиці, оскільки є надійна теоретична основа знаходження шуканої функції (3.166). Залежно від коренів характеристичного рівняння (ХР) є три різних розв'язки.

[175] Стандартне ДР, уведене, по-перше, з метою стандартизації, наприклад два лінійно-залежних ДР (3.170) з коефіцієнтами *A*, *B*, *C* і $A' = kA, B' = kB, C' = kC$, будуть мати один и той-же стандартний вигляд (3.171), а отже це одне і теж ДР, по-друге, з метою спрощення розрахунків під час знаходження загального розв'язку, а в-третіх, згідно теореми Вієта при такому запису ДР мають місце співвідношення: $s_1 + s_2 = -p$; $s_1 s_2 = q$, де $s_1$ і $s_2$ – корені ХР.

На практиці з фізичних причин неможливо безперервно слідкувати за вихідною величиною і факторами, що впливають на неї, тому зняття динамічних характеристик з об'єкта виконується через певний проміжок часу $\Delta t$ (чи в загальному випадку $\Delta x$), який називається інтервалом дискретизації. Нехай за вихідною змінною $y$ було виконано $n$ спостережень у рівновіддалені[176] моменти часу $t_1$, $t_2$, …, $t_n$. Результати спостережень подані в таблиці 3.48.

Таблиця 3.48 – **Експериментальні дані для отримання однорідного ДР з ПК**

| $t$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ | $t_6$ | … | $t_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | … | $y_n$ |

1 *Отримання різницевого аналога* ДР

Різницевий аналог ДР (3.170) буде мати неявний вигляд:

$$-a\,y_{t-2} - b\,y_{t-1} + c\,y_t = 0 \qquad (3.172)$$

чи в явному вигляді:

$$y_t = a\,y_{t-2} + b\,y_{t-1}, \qquad (3.173)$$

де $c = 1$;

$a$, $b$ – параметри, що підлягають визначенню.

Для визначення $a$ і $b$ за (3.118), побудова матриці $F$, узагальненої видом моделі (3.173), за експериментальними даними, поданими в таблиці 3.48, виконується наступним чином (таблиця 3.49):

Таблиця 3.49 – **Узагальнена матриця *F* і вектор *Y***

| $t$ | $Y$ | $F$ | | $X$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $f_1 = y_{t-1}$ | $f_2 = y_{t-2}$ | |
| 3 | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | $t_2$ |
| 4 | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $t_3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $y_n$ | $y_{n-1}$ | $y_{n-2}$ | $t_{n-1}$ |
| | | $b$ | $a$ | |

*Примітка.* На практиці модель (3.173) чи у загальному випадку (3.169), можна доповнити складовими з факторів, що впливають на вихідну змінну, через вектор відомих

[176] При $\Delta t \neq const$ дані втрачають динамічну цінність. Інтервал дискретизації $\Delta t$ (чи в загальному випадку $\Delta x$) вибирають обернено пропорційним кореням ХР (3.187) $s_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), тобто $min\ 1/s_i$.

функцій $\tilde{f}(\bar{x})$. Внаслідок застосування МНК отримується динамічна модель[177], що має, зазвичай, хорошу прогнозну здатністю в ділянці експерименту. Даними для здійснення прогнозу[178] за отриманою динамічною моделлю є: рівні значень факторів і *аналог* початкових умов (3.168) – отримані на основі експерименту *r* значень вихідної змінної $y_1, y_2, \ldots, y_r$ [8].

2 *Отримання неперервного аналога* ДР з ПК

Похідні $y', y'', \ldots, y^{(r)}$ на практиці можна виразити через так звані *розділені різниці* відповідно порядків 1, 2, …, *r* [2].

При цьому $y'$ – швидкість зміни функції, визначається за (3.174). На практиці аналог $y'$ для *i*-тої поточної точки визначається неявним[179] виразом (3.175)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_{x+\Delta x} - y_x}{\Delta x}; \tag{3.174}$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \tag{3.175}$$

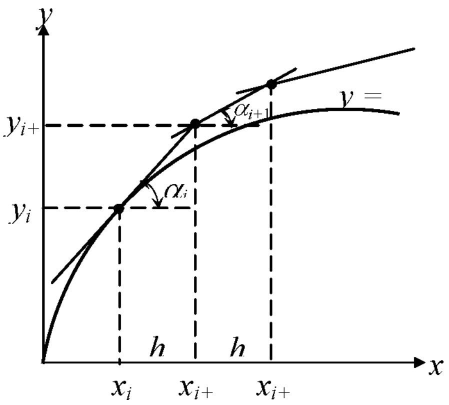



Рисунок 3.11 – **Геометрична інтерпретація похідної**

де $\Delta x = x_{i+1} - x_i = h$ – приріст аргументу.

Геометрична суть похідної – тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в точці $x_i$ до вісі абсцис. Геометрична інтерпретація похідної подана на рисунку 3.11. Таким чином, необхідно мати на увазі наступне: якщо відома швидкість зміни функції в точці *i*, то завжди можна із заданою на перед точністю, визначити значення функції в точці «майбутнього» *i*+1[180] на основі формули[181]

---

[177] Для підвищення прогнозуючої здатності подібні моделі будують в *приростах*, щодо початку відліку *t* = 0, тобто виконують заміну змінних $x$ і $y$ відповідно новими змінними $\Delta x_{i,j} = x_{i,j} - x_{0,j}$ і $\Delta y_i = y_i - y_0$ (*i* = 1, 2, …, *n*; *j* = 1, 2, …, *k*). Під час розрахунків, прогнозований вихід $y$, буде відрізнятись від діючого на величину $y_0$.

[178] Для моделі вхід *t* (чи *x*-вихід) *y* РА ДР відрізняється від його НА (приклад 3.18) тим, що для розрахунку за моделлю $\hat{y}_i$ при $t = t_i$ (чи $x = x_i$) в НА досить підставити значення $t_i$ (чи $x_i$), а в РА – циклічно з врахуванням $\Delta t$ (чи $\Delta x$) перерахувати $\hat{y}_i$ в точках $t_3, t_4, \ldots t_i$ (чи $x_3, x_4, \ldots x_i$).

[179] Для знаходження $y_{i+1}$, при відомому $y_i$, необхідно знати $y_i'$, а для знаходження $y_i'$ – $y_{i+1}$.

[180] $y_{i+1} \approx y_i + hf'(x_i)$; з рисунку 3.11 видно, що чим менше *h*, тим точніше ломана (прогнозна) крива буде наближатись до вихідної функції $y = f(x)$, якщо рухатись за дотичними відстанями *h*.

[181] На геометричній суті похідної базуються всі чисельні методи інтегрування ДР 1-го порядку, решта ДР – на заміні похідних їх розділеними різницями.

$$tg\alpha_i = f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Аналог $y''$ (зміна швидкості функції, чи інакше, прискорення функції) на практиці визначається виразом:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{h} = \frac{1}{h}\left[\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right] = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} \qquad (3.176)$$

або, в загальному випадку, аналог похідної $y^{(r)}$ визначається виразом:

$$y_i^{(r)} = \frac{y_{i+1}^{(r-1)} - y_i^{(r-1)}}{h}. \qquad (3.177)$$

Точніші формули отримуються при заміні $y'$ (3.175) і $y''$ (3.176) відповідно *центральними* різницевими відношеннями:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \qquad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \qquad (3.178)$$

Тоді на основі (3.178) аналог неперервних похідних в явному виді для поточної[182] ($i$–1)-точки запишеться відношеннями:

$$y' = \frac{y_i - y_{i-2}}{2h}; \qquad (3.179)$$

$$y'' = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}. \qquad (3.180)$$

Враховуючи, що $h$ є інтервалом дискретизації $\Delta t$, а індекс $i$ є $t$, підставимо вирази (3.179) і (3.180) в (3.170) і прирівняємо до виразу (3.172) :

$$A\frac{y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}}{\Delta t^2} + B\frac{y_t - y_{t-2}}{2\Delta t} + C\,y_{t-1} = -a\,y_{t-2} - b\,y_{t-1} + c\,y_t. \qquad (3.181)$$

Знаходячи, частинні похідні[183] від функції (3.181) за змінними $y_{t-i}$, $(i = 0,1,2)$, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A$, $B$, $C$ ДР з ПК в неперервному вигляді (3.170):

$$\begin{cases} \dfrac{A}{\Delta t^2} + \dfrac{B}{2\Delta t} = c \\ -\dfrac{2A}{\Delta t^2} + C = -b \\ \dfrac{A}{\Delta t^2} - \dfrac{B}{2\Delta t} = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(c-a)\Delta t^2 \\ C = \dfrac{2A}{\Delta t^2} - b \\ B = 2\Delta t\left(c - \dfrac{A}{\Delta t^2}\right) \end{cases} \qquad (3.182)$$

---

[182] Для точки ($i$–1) можливо явно визначити похідні $y'$, $y''$ за відомими значеннями функції в точках $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}$. Факт поточної ($i$–1)-точки важливий також при отриманні неоднорідних ДР.

[183] Вважаємо їх незалежними змінними, наприклад, $x_i$.

Розв'язком системи рівнянь (3.182), знаходимо постійні коефіцієнти $A$, $B$, $C$ однорідного ДР (3.170), яке потім записуємо в стандартному виді (3.171). При отриманні неоднорідного ДР з ПК 2 порядку вигляду[184]:

$$y'' + py' + qy = \tilde{N}^T\ \tilde{f}(x), \tag{3.183}$$

де $\tilde{N}$ – вектор невідомих коефіцієнтів неоднорідної[185] (правої) частини;

$\tilde{f}(x)$ – вектор[186] відомих функцій від незалежної змінної $x$.

При цьому користуємося (3.182)[187], раніше визначаючи за МНК коефіцієнти $a$, $b$, $c$, а також $N$ неоднорідного різницевого аналога ДР[188] виду вхід $x$-вихід[189] $y$ *загального* вигляду[190]:

$$y_i = ay_{i-2} + by_{i-1} + N^T \tilde{f}(x_{i-1}), \tag{3.184}$$

де $N$ – вектор коефіцієнтів неоднорідної частини РА.

3. *Розв'язок лінійних однорідних* ДР з ПК і вибір початкових умов

Рівняння першого порядку

$a_0 \dfrac{dy}{dx} + a_1 y = 0 \quad (a_0 \neq 0)$ має розв'язок[191]: $\quad y = C\ell^{-\frac{a_1}{a_0}x}$ [192], (3.185)

---

[184] Не слід змішувати ДР (3.164), на прикладі ДР 2 порядку, з рівнянням $a_0 \dfrac{d^2y}{dt^2} + a_1 \dfrac{dy}{dt} + a_2 y = \tilde{N}^T\ \tilde{f}(\bar{x})$, в якому вихідна змінна $y$ залежить від поточних значень факторів $\bar{x}$ і не прямо від часу $t$. В природі взагалі час $t$ вливає не прямо на $y$, тобто завжди через якісь випадкові (насправді, закономірні) фактори, які дослідник не хоче, а часто і не може враховувати. Подібні рівняння зазвичай розв'язують для поточної комбінації факторів $N^T\ \tilde{f}(\bar{x}_i) = const_i$, тобто якоїсь частки від, так званої, *одиничної сходинки*, а інакше у загальному вигляді вони дуже рідко розв'язувані в квадратурах (аналітично) або ж використовувати для прогнозів РА цих рівнянь, що дуже не зручно. Тому ми розглядаємо розв'язок рівнянь вхід-вихід вигляду $A\dfrac{d^2y}{dt^2} + B\dfrac{dy}{dt} + Cy = \tilde{N}^T\ \tilde{f}(t)$ (в позначеннях $t$: час впливає) чи, що одне і теж для нас, $A\dfrac{d^2y}{dx^2} + B\dfrac{dy}{dx} + Cy = \tilde{N}^T\ \tilde{f}(x)$ (в позначеннях $x$: фактор впливає).

[185] За аналогією з $B$, див. МНК (3.112).

[186] Де $\tilde{f}^T(x)$ може бути: *const*, $\|1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^m\|$, $\|\sin x \quad \cos x\|$, $\|\ell^{kx}\|$ і т.д.

[187] Точніше використовувати альтернативний *прямий спосіб з*находження коефіцієнтів неперервного аналога ДР за МНК (див. далі). Підхід (3.182) в неоднорідних ДР залежний від правої частини

[188] Для неперервного ДР (3.183) чи в загальному випадку (3.164).

[189] Чи в позначеннях $t$: $y_t = a\ y_{t-2} + b\ y_{t-1} + N^T\ \tilde{f}(t_{t-1})$.

[190] Для запису отриманого неперервного аналога НДР в стандартному вигляді коефіцієнти неоднорідної частини знаходять як $\tilde{N} \approx N/A$.

де постійна $C$ визначається з початкових умов: $C = y(0)$, тобто $C$ – значення функції $y$ в початковий момент $x_0 = 0$[193] ($C$ – визначається за даними експерименту).

Для розв'язку [5] лінійного однорідного ДР другого порядку (3.170), яке у розгорнутому вигляді перепишемо:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0 \quad (A \neq 0) \tag{3.186}$$

складемо характеристичне рівняння

$$As^2 + Bs + C = 0 \tag{3.187}$$

Вид загального розв'язку (3.166) ДР (3.186) залежить від коренів ХР[194] (3.187). Залежно від дискримінанта $d = B^2 - 4AC$ характеристичне рівняння (3.187) може мати:

- дійсні корні, якщо $d \geq 0$

– однакові $s = s_1 = s_2 = -\dfrac{B}{2A}$, якщо $d = 0$, то розв'язок (3.186) має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 x)\ell^{sx}; \tag{3.188}$$

– різні $s_{1,2} = \dfrac{-B \pm \sqrt{d}}{2A}$, якщо $d \neq 0$, то розв'язок[195] (3.186) має вигляд:

$$y = C_1\ell^{s_1 x} + C_2\ell^{s_2 x} \tag{3.189}$$

---

[191] Експонента $\ell^x$, де $\ell = 2{,}718281828...$ – єдина функція, у якої швидкості різних порядків однакові, тобто якщо $y = \ell^x$, то $y = y' = y'' = ... = \ell^x$, тому через неї часто подають розв'язок різних ДР.

[192] $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a_1}{a_0}y$, розділяючи змінні знаходимо, $\int\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{a_1}{a_0}\int dx$; $\ln y = -\dfrac{a_1}{a_0}x + c$; $y = \ell^{-\frac{a_1}{a_0}x + c} = \ell^c \cdot \ell^{-\frac{a_1}{a_0}x} = C\ell^{-\frac{a_1}{a_0}x}$.

[193] Якщо $x_0 \neq 0$, то з (3.185) $C = y_0 \Big/ \ell^{-\frac{a_1}{a_0}x_0}$.

[194] Ейлер запропонував шукати розв'язок (3.186) у вигляді $y = \ell^{sx}$ (1), де $s$ – постійна (дійсна чи комплексна). Тоді перша і друга похідні від (1): $y' = s\ell^{sx}$; $y'' = s^2\ell^{sx}$. Підставляючи знайдені $y$, $y'$, $y''$ в (3.186) отримаємо $y = \ell^{sx}(As^2 + Bs + C) = 0$. Оскільки $\ell^{sx} \neq 0$, то рівність нулю можна отримати за рахунок $As^2 + Bs + C = 0$ (2). Тому якщо $s$ є коренем рівняння (2), то функція (1) буде розв'язком (3.186).

[195] Теорема про структуру загального розв'язку однорідного рівняння (не обов'язково з ПК) – якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два лінійно-незалежні, тобто $y_1(x)/y_2(x) \neq const$, на проміжку $a \leq x \leq b$ розв'язки (3.186), то функція $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де $C_1$, $C_2$ – *довільні* сталі, є його розв'язком. В нашому випадку $y_1(x) = \ell^{s_1 x}, y_2(x) = \ell^{s_2 x}$; ХР (3.187) 2-го порядку, а значить має 2 кореня (розв'язки) $s_1$, $s_2$.

- комплексні[196] корні $s_{1,2}=\sigma\pm j\omega=-\dfrac{B}{2A}\pm j\dfrac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$, якщо $d<0$, то загальний[197] розв'язок (3.186) відшукується у вигляді:

$$y=\ell^{\sigma x}\left(C_1\cos\omega\, x+C_2\sin\omega\, x\right), \tag{3.190}$$

де величини

$$\sigma=-\frac{B}{2A};\qquad \omega=\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$$

називаються відповідно постійною затухання і власною круговою частотою.

Постійні $C_1$, $C_2$ в *теорії* ДР визначаються за завчасно відомими початковими[198] (3.168) чи крайовими[199] умовами [11]. Для визначення постійних $C_1$ і $C_2$ необхідно знайти у аналітичному виді $dy/dx$ від (3.188), (3.189) чи (3.190) і скласти систему рівнянь з $y$ і $dy/dx$, прирівнюючи їх заданим початковим умовам (3.168) при $x = x_0$, яка для ДР (3.186) буде мати вигляд:

$$\underbrace{y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y_0'}. \tag{3.191}$$

Вище розглянуто приклад розв'язку однорідних ДР (3.170) аналог (3.165), які, в загальному, є окремим випадком неоднорідних ДР (3.183) аналог (3.164). Розв'язок $y(x)$ неоднорідного ДР (3.164) знаходиться у виді суми розв'язків однорідної[200] (3.166), яке позначимо $y_{чо}$, і неоднорідної[201] $y_{чн}$ (частинний[202] неоднорідний розв'язок) його складових, тобто

---

[196] Тоді частинні розв'язки $y_{1,2}=\ell^{(\sigma\pm j\omega)x}$ отримуються з використанням: 1 – формули Ейлера $\ell^{j\omega}=\cos\omega+j\sin\omega$; 2 – з комплексними числами $\ell^{(\sigma\pm j\omega)x}=\ell^{\sigma x}\cdot\ell^{\pm j\omega x}=\ell^{\sigma x}\left(\cos\omega x\pm j\sin\omega x\right)$, якщо функція $y(x)=u(x)+jv(x)$ є розв'язком ДР (3.170), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ і $v(x)$; 3 – наведеної вище теореми про структуру загального розв'язку.

[197] Загальний розв'язок (3.166) лінійного однорідного ДР *r-порядку* (3.165) знаходиться у вигляді алгебраїчної суми розв'язків *аналогічних* (3.188)–(3.190) залежно від коренів характеристичного рівняння $a_0s^r+a_1s^{r-1}+\ldots+a_r=0$

[198] Відомі значення функції $y_0$ і значення похідної $y_0'$ в якийсь початковий момент $x = x_0$; складаючи систему (3.191) із загального розв'язку $y$ (одна з функцій (3.188)–(3.190)) і відповідної їй похідної $dy/dx$, при $x = x_0$, визначаємо постійні $C_1$ і $C_2$.

[199] Відомі значення функцій $y_0$ і $y_n$ при $x = x_0$ і $x = x_n$; складаючи систему $\underbrace{y(x_0)=y_0, y(x_n)=y_n}$ визначаємо постійні $C_1$ і $C_2$.

[200] Для ДР 2-порядку (3.170) – це функція (3.188)–(3.190).

$$y(x) = y_{чо} + y_{чн} \tag{3.192}$$

і залежить від виду правої частини $\tilde{f}(x)$ і порядку ДР (детальніше в прикладі 3.19). Однорідна складова розв'язку фізично відповідає за процес переходу системи з одного сталого стану в інший (динаміка процесу) і гранично прямує до нуля, а неоднорідна (змушена) – за статику[203] (сталий стан) процесу.

*Визначення постійних інтегрування* $C_1$ *і* $C_2$. В загальному випадку *в теорії*[204], вибір початкових[205] умов (3.168) ДР (3.165) виконується шляхом пошуку мінімуму функції (3.193) за змінними $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(r-1)}$, при відомій з дослідних даних $y_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \to \min, \tag{3.193}$$

де $n$ – кількість дослідів; $y_i$ – дослідне значення вихідної змінної; $\hat{y}_i$ – значення вихідної змінної, передбаченої розв'язком ДР (3.166).

На *практиці* постійні інтегрування $C_1$ і $C_2$ знаходять за МНК, оскільки функції (1.188)–(3.190) лінійні за невідомими параметрами $C_1$ і $C_2$. Так, якщо вище визначені $s$ в (3.188), $s_1$ і $s_2$ в (3.189), $\sigma$ і $\omega$ в (3.190), то будь-яку з функцій (3.188)–(3.190) можна записати у виді лінійному за параметрами $C_1$ і $C_2$:

---

201 Оскільки має невідомі коефіцієнти, то вигляд підбирається за певними правилами, тобто, щоб знаходячи $y_{чн}, y_{чн}', y_{чн}''$ і підставляючи їх, наприклад, для ДР 2-порядку в (3.183), визначаючи невідомі коефіцієнти, отримати $\tilde{N}^T \tilde{f}(x)$, де $\tilde{N}, \tilde{f}(x)$ – вже відомі на даний момент відповідно: вектор коефіцієнтів і функцій, тобто права частина (3.183) має розгорнутий вигляд $f(x) = n_1 f_1(x) + n_2 f_2(x) + \ldots$ – лінійна за параметрами (з позиції зручності в користуванні).

202 Оскільки їх може бути багато.

203 В статиці отримується не задана Вами функція, а подібна заданій, наприклад, задаючи пряму, отримаєте пряму, але яка не проходить, як задана; однак відповідність правій частині спостерігається, коли взяти всі потрібні похідні аналітично і підставити у шукане ДР.

204 Алгоритм знаходження п.у.: 1) визначити загальний вигляд розв'язку (3.166) ДР (3.165), так для ДР 1 і 2 порядків це вирази (3.185), (3.188)-(3.190); 2) задаючи п.у. $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(r-1)}$ за будь-яким чисельним методом пошуку оптимуму функції (див. підрозділ 3.3) і $y_0$ визначаємо постійні інтегрування $C_1, C_2, \ldots, C_r$ з системи рівнянь: $\underbrace{y\Big|_{x_0} = y_0,\ \ \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0} = y_0',\ \ \ldots,\ \ \frac{d^{(r-1)}y}{dx^{(r-1)}}\Big|_{x_0} = y_0^{(r-1)}}$, де $y = y(x)$ – загальний розв'язок (3.166) ДР (3.165); 3) визначаючи постійні $C_1, C_2, \ldots, C_r$ і підставляючи їх в (3.166), обчислюємо значення функції (3.193); 4) пункти 2 і 3 повторюємо до виконання умов закінчення пошуку оптимуму для вибраного методу мінімізації функції (3.193)

205 А значить не прямо $C_1$ і $C_2$.

$$y = C_1\ell^{sx} + C_2 x\ell^{sx}; \quad y = C_1\ell^{s_1x} + C_2\ell^{s_2x}; \quad y = C_1\ell^{\sigma x}\cos\omega\, x + C_2\ell^{\sigma x}\sin\omega\, x. \quad (3.194)$$

Використовуючи (3.194) за вихідними експериментальними даними наступним (другим)[206] застосуванням МНК (3.118) визначаються[207] $C_1$, $C_2$.

*Прямий спосіб знаходження коефіцієнтів неперервного аналога ДР за МНК.* Коефіцієнти неперервного аналога однорідного ДР (3.170) чи неоднорідного ДР (3.183) можна визначити безпосередньо[208] за МНК, використовуючи (3.179), (3.180) чи аналог (3.179) для поточної ($i$–1) точки у вигляді формули:

$$y' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\,^{209}. \quad (3.195)$$

Визначаючи за експериментальними даними таблиці 3.48 коефіцієнти будь-якої з моделей за МНК:

$$y_{i-1} = A\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} + B\frac{y_i - y_{i-2}}{2h} + \tilde{N}^T\ \tilde{f}\left(x_{i-1}\right), \quad (3.196)$$

$$y_{i-1} = A\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} + B\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \tilde{N}^T\ \tilde{f}\left(x_{i-1}\right) \quad (3.197)$$

автоматично отримуються[210] коефіцієнти неперервного аналога ДР (3.170) чи (3.183).

Зазвичай (3.196) дає краще наближення при отриманні як однорідних ДР (3.170), так і неоднорідних ДР (3.183), однак модель (3.197), що отримана за

---

[206] 1-й раз використовували для отримання (3.172) і складання системи рівнянь (3.182) та їх розв'язку.

[207] Підставляючи в аналітичну функцію $y$ (3.194) чи (3.192) і похідну $y'$ (необхідно продиференціювати) знаходені постійні $C_1$, $C_2$ при $x = 0$ отримуємо початкові умови $y_0, y'_0$, якщо необхідно привести отримане ДР до задачі Коші. На практиці для ОДР з ПК (3.171) метою є (3.194) чи для НДР з ПК (3.183) – (3.192).

[208] Без розрахунку різницевого аналога ДР (3.172) і розв'язку системи (3.182).

[209] Її також можна застосувати для отримання неперервного аналога ДР через його різницевий аналог (3.172) за аналогією системи (3.182), однак останню необхідно вивести самостійно.

[210] Слід зауважити, що однорідне ДР (3.170) від неоднорідного (3.183) в позначеннях (3.196), (3.197) відрізняється вектором коефіцієнтів неоднорідної частини $\tilde{N}$, який у випадку однорідного тотожно рівний 0; важливий факт ($i$–1)-точки; інтервал дискретизації $h = x_{i+1} - x_i$ = = $const$ можна розрахувати тільки за рівновіддаленими даними, інакше (3.196), (3.197) не застосовні; матриця $F$ складається за аналогією таблиці 3.49; оскільки складові $A\,y''$ і $B\,y'$ знаходяться в лівій частині ДР, то знаки знайдених коефіцієнтів $A$, $B$ змінюємо на протилежні: $A = -A$; $B = -B$; $C = 1$; отримане ДР (3.170) чи (3.183) приводимо до стандартного вигляду (3.171), а вектор неоднорідних коефіцієнтів перераховуємо за $\tilde{N} = \tilde{N}/A$ (ділимо всі коефіцієнти на $A$); постійні інтегрування $C_1$, $C_2$ розв'язаного ДР знаходимо повторним застосуванням МНК для однорідного (3.194) чи неоднорідного (3.192).

більш грубими формулами (3.195), (3.180) практичної заміни $y', y''$, інколи[211] більш точно за співвідношення (3.196), апроксимують НДР експериментальні дані. Прямим способом за МНК, можна шукати коефіцієнти будь-яких[212] лінійних (3.164) і нелінійних ДР.

*Вибір аналітичного диференціального рівняння.* Графічний спосіб – типові криві розв’язків ОДР 2 порядку (3.170) подані на рисунку 3.12, а для НДР з деякими часто застосовуваними його правими частинами $f(x)$ наведені на рисунку 3.13. Можна спробувати провести візуальне порівняння динамічної кривої, отриманої експериментально з відомими кривими, поданими на рисунках 3.12, 3.13.

Під час графічного вибору аналітичного ДР необхідно мати на увазі наступне: 1) як однорідні, так і неоднорідні ДР можуть бути такими, що в динаміці є розбіжними[213] (нестійкими), тобто в межі $-\infty$ чи $+\infty$, якщо хоча б один з коренів (3.187) додатний[214] $s_i > 0$, наприклад, криві 4, 6, 7, 11 (рисунок 3.12). Такі криві, наприклад, за рахунок точності знаходження матриці $F$, вибору інтервалу дискретизації $h$, складніше описуються ДР.

---

[211] На жаль тут вибір за дослідником. Універсальних точних формул заміни $y'$, $y''$ для будь-якої теоретичної функції, мабуть, не існує. Автор зупиняється на (3.179), (3.180), які в рідкісних випадках ведуть себе гірше. До речі сказати, є теоретичні криві, які не описуються ні одним з цих способів, наприклад, $y'' + 5y' + y = 3 - 5\cos(0{,}5x) + 3\sin(3x)$ при $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$, змінюючи $x$ від 0 до 25 з $\Delta x = 0{,}07$, але підстроюються за рахунок постійних $C_1$, $C_2$. І у противагу, дуже добре, особливо (3.180), (3.195) апроксимують дані надто складної кривої $y'' + 0{,}5y' + 100\,y = 100 + 100x\exp(-0{,}25x) + 150(\sin(3x)+\cos(3x))$ при $y_0 = 7$, $y'_0 = 14$, змінюючи $x$ від 0 до 15 з $\Delta x = 0{,}03$. Необхідно відмітити, що в прямому способі знаходження коефіцієнтів ДР важливу роль відіграє і точність знаходження дисперсійної матриці $D$.

[212] Адже систему (3.182) можна скласти і розв’язати тільки з лінійного ДР із сталими коефіцієнтами (3.181).

[213] В теорії керування цей факт дуже важливий під час керування процесом за законом регулювання, наприклад, за пропорційно-інтегрально-диференціальним законом (ПІД-закон) [18], який для дискретного часу записується формулою

$$u_i = k_П\left(w - y_i\right) + k_I\int_0^{t_i}\left(w - y_i\right)dt + k_Д\left(w - y_i\right)',$$

де $u_i$ – керування, направлене на зменшення похибки розбіжності $\left(w - y_i\right)$;

$w$ – завдання, тобто рівень на якому необхідно підтримувати значення залежної змінної;

$y_i$ – поточне значення залежної змінної, заміряне в момент часу $t_i$; $k_П, k_I, k_Д$ – настройки ПІД-регулятора.

У випадку розбіжності процесу, неможливо підібрати настройки регулятора за даними входу $x$, щоб тримати вихід $y$ на заданому рівні.

[214] Для комплексних коренів $s_{1,2} = \sigma \pm \omega x$ дійсна частина $\sigma > 0$.

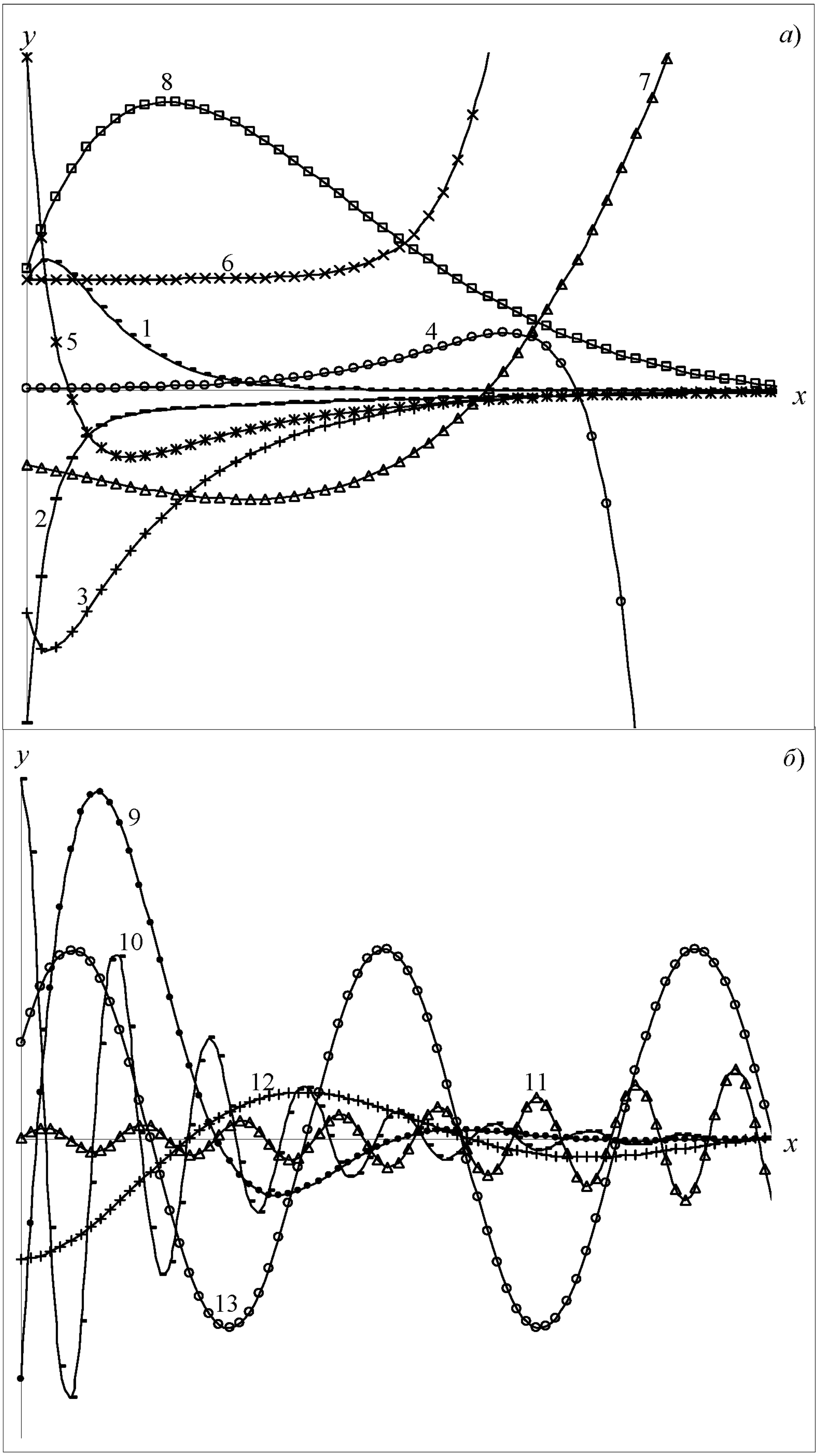



Рисунок 3.12 – **Типові криві однорідного диференціального рівняння 2 порядку з коренями:** а –дійсними $s_1$, $s_2$;
б – комплексними $s_1$, $s_2$

Криві 3, 4, 5, 6 (рисунок 3.13) також є розбіжними[215], але за рахунок неоднорідної складової $\tilde{f}(x)$, тобто в статиці, що нормально; 2) криві наведені на рисунках можуть бути інвертовані[216], перевернуті (відносно своєї вісі), зміщуватись[217] і змінювати форму[218] як відносно вісі $x$ так і $y$; 3) будь-яка ділянка кожної з цих кривих може бути вашими експериментальними даними; 4) через один і той же слід експериментальної функції з певною точністю можуть проходити інтегральні криві різних ДР, за рахунок їх підстроювання $C_1$, $C_2$, оскільки на практиці розглядається кінцевий інтервал $x$; 5) у випадку неоднорідних ДР: *а*) динаміка може бути будь-якою, наведеною на рисунку 3.12;

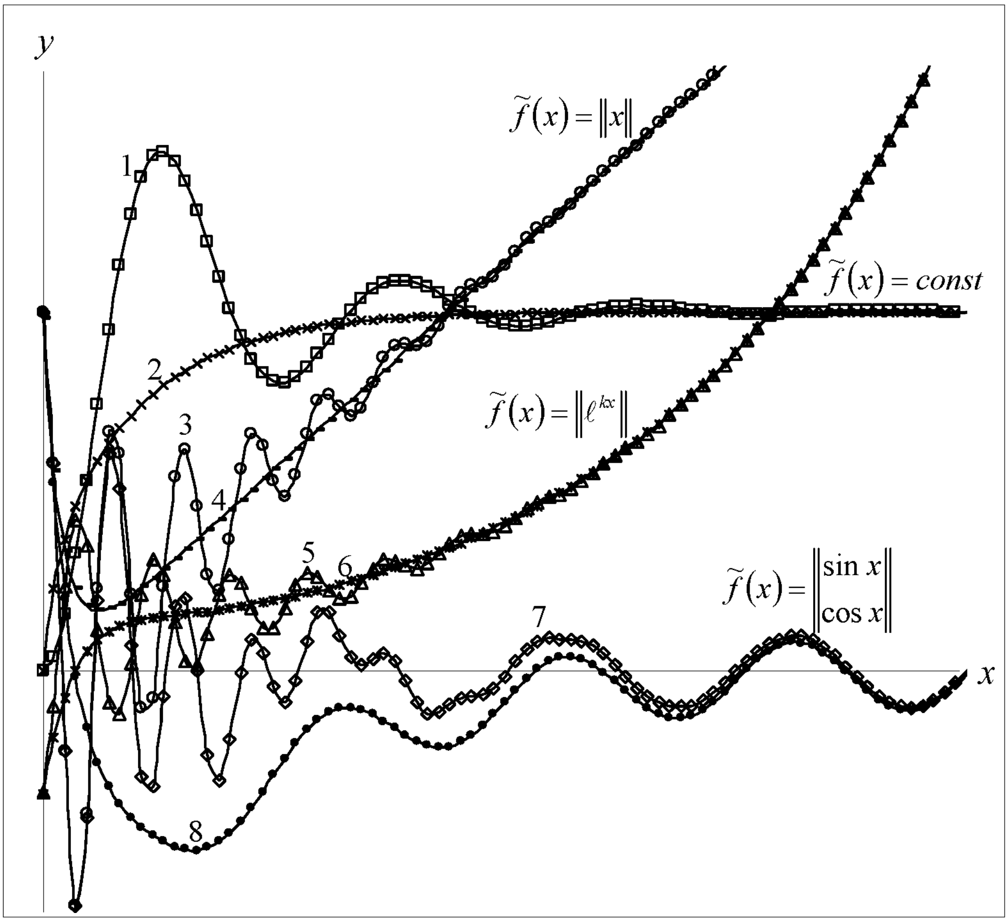



Рисунок 3.13 – **Типові криві неоднорідного диференціального рівняння 2 порядку з деякими правими частинами** $\tilde{f}(x)$

---

[215] Якщо однорідна складова розв'язку ДР $y_{чо}$ розбіжна, то графічної тотожності правої частини в неоднорідному ДР досягти неможливо.

[216] Наприклад, при незмінних $x_i$: $y_i = -y_i$ чи $y_i$ змінюємо місцями з $y_{n-i+1}$ ($i$ =1,2,…, $n$).

[217] У випадку ОДР завжди гранично $y$ = 0, якщо звичайно експеримент не припинений. При незмінних $A$, $B$, $C$ за рахунок постійних $C_1$, $C_2$ відбувається рух кривої паралельно самій собі відносно вісі $y$ (без зміни форми кривої), також можна змінювати положення кривої відносно вісі $x$, але при цьому змінюється її форма.

[218] Тільки за рахунок інших $A$, $B$, $C$, наприклад, стискатись, розтискатись, а у випадку комплексних коренів – зміна частоти коливань.

*б*) можливе комбінування[219], наприклад, підсумовування відповідних складових $\tilde{f}(x)$; *в*) праві частини відмінні[220] від наведених[221] на рисунку 3.13; *г*) права частина $\tilde{f}(x)$ є окремим випадком більш загальної чи альтернативної формули, наприклад, $\tilde{f}^T(x) = \left\| 1 \quad x \quad x^2 \quad \ldots \quad x^m \right\|$, що є більш загальним щодо *const*, $\|x\|$ і альтернативним щодо $\left\| \ell^{kx} \right\|$.

Аналітичним критерієм вибору неперервного ДР є, наприклад, *F*-відношення (3.121), отримане для різницевого аналога (3.173)[222] чи неперервного[223] (3.196) ДР.

Таким чином, за описаним вище алгоритмом можна підбирати диференціальні рівняння до великої кількості різних експериментальних кривих, однак необхідно пам'ятати, що отримати аналітичне ДР не достатньо, його необхідно ще й розв'язати[224] і підібрати п.у. Так, наприклад, якщо використати як аналітичний *нелінійне* однорідне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами частинного виду $Ayy' + Byy'' + Cy'y'' = 0$, то воно досягає розв'язку[225] при $By'^2 + Cyy''' = 0$[226]; тому використання нелінійного однорідного

---

[219] Наприклад, $f(x) = a + bx$, є комбінування складових *const* і $\|x\|$.

[220] Далеко не з будь-якою правою частиною ДР можна розв'язати в квадратурах, наприклад, $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$, або тотожність правій частині спостерігається тільки в кількох визначених точках *x*, що, звичайно, не дозволяє використовувати ДР як модель.

[221] Необхідно чітко уявляти графіки *елементарних функцій* і їх бачити в установленому (стаціонарному) стані вашої кривої.

[222] В загальному випадку для НДР за (3.184).

[223] Зазвичай більш точний показник.

[224] Більший відсоток ДР в довіднику [7] розв'язані за методом заміни розв'язку $y(x)$ іншою функцією $\eta(\xi)$ від незалежної змінної $\xi$, кожна з яких ($\eta, \xi$) підбирається таким чином, щоб первісне ДР спростити чи звести до відомого розв'язку. Якщо ДР не розв'язується аналітично, то є чисельні методи розв'язку.

[225] Нехай як нелінійне ДР з ПК було задано $Ayy' + B\left(y'^2 + yy''\right) + C\left(3y'y'' + yy'''\right) = 0$ (1) (рівняння вище, окремий випадок). Уведемо функцію $\eta(\xi) = yy'$ (2) з незалежною змінною $\xi = x$ (3). Візьмемо першу і другу похідні (незалежно в лівій і правій частинах) за відповідними незалежними змінними в (2): $\eta'\xi' = y'y' + yy'' = y'^2 + yy''$, $\eta''\xi'^2 + \eta'\xi'' = 2y'y'' + y'y'' + yy''' = 3y'y'' + yy'''$ і (3): $\xi' = 1$, $\xi'' = 0$. Підставляючи знайдені похідні в (1) отримаємо однорідне ДР з ПК $A\eta + 1B\eta' + 1^2C\eta'' = 0$ (4), розв'язком якого може бути будь-яка функція (3.188)-(3.190) в позначеннях $\eta(\xi)$ залежно від коренів ХР (4). Припустимо, розв'язком є функція (3.188), $\eta = \left(C_1 + C_2\xi\right)\ell^{s\xi}$, тоді заміняючи $\xi$ на *x*, як було прийнято в (3) і $\eta$ на $yy'$, як в (2), отримаємо $yy' = \left(C_1 + C_2x\right)\ell^{sx}$.

ДР на практиці не має сенсу, оскільки воно має розв'язок тільки при певних значеннях $A$, $B$, $C$ незважаючи на те, що його коефіцієнти математично просто обраховуються з використанням підходу, аналогічного[227] (3.196).

Розглянемо кілька варіантів отримання і розв'язку ДР на синтезованих прикладах.

*Приклад* 3.18.

Описати однорідним ДР другого порядку залежність зміни вихідної величини $y$ від часу $t$ за експериментальними даними, наведеним в таблиці 3.50, і розв'язати його.

З таблиці 3.50 видно, що інтервал дискретизації $\Delta t = 1 - 0 = 1$, і оскільки вихідна змінна гранично прямує до нуля (рисунок 3.14), тому динаміку можна описати стандартним однорідним ДР (3.171).

*Отримання різницевого аналога* (3.173). Визначимо спочатку за експериментальними даними коефіцієнти $a$, $b$ різницевого аналога ДР (3.173) за МНК. Запишемо, узагальнену видом моделі (3.173)[228]

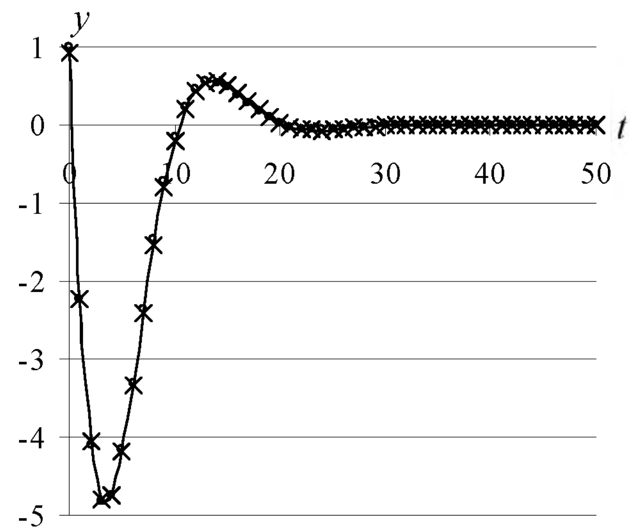



Рисунок 3.14 – **Залежність зміни величини $y$ від часу $t$ :** ексеримент (°), прогноз (×)

---

$y\frac{dy}{dx}=(C_1+C_2x)\ell^{sx}$; $\int y dy=\int (C_1+C_2x)\ell^{sx}dx$; $\frac{y^2}{2}=\frac{C_1}{s}\ell^{sx}+C_2\int x\ell^{sx}dx$ (5). $\int x\ell^{sx}dx=uv-\int vdu=$

$=\begin{vmatrix} u=x & dv=\ell^{sx}dx \\ du=dx & v=\frac{1}{s}\ell^{sx} \end{vmatrix}=\frac{x}{s}\ell^{sx}-\frac{1}{s}\int \ell^{sx}dx=\frac{x}{s}\ell^{sx}-\frac{1}{s^2}\ell^{sx}$ (6). Підставляючи (6) в (5) розв'язок

(1) має вигляд: $y=\sqrt{2\left(\frac{C_1}{s}\ell^{sx}+C_2\left(\frac{x}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\ell^{sx}+C_3\right)}$ (7). Розв'язки подібні (7) можна отримати і для (3.189), (3.190). З (1) видно, що $Ayy'+Byy''+Cy'y''=0$ має розв'язок (7), у тому випадку, коли з (7) удається отримати $By'^2+Cyy'''=0$ (8) за рахунок постійних коефіцієнтів. Рівняння (8) має розв'язок у вигляді (7), тільки за певних значень $A$, $B$, $C$

[226] Наприклад, $yy'''=ay'^2$ (9) при $a=-\frac{B}{C}=1$, є одним з частинних розв'язків $y=c\ell^x$, тобто $B=-C$. Але він нам не підходить, оскільки розв'язок (9) має бути у вигляді (7).

[227] Але це не означає, що при використанні нелінійного ОДР $F$-відношення (3.121) буде прийнятним; інакше це ДР необхідно розв'язувати чисельно.

[228] З позиції ($i$–1)-точки аналог (3.172) має бути у вигляді: $-ay_{t-2}+by_{t-1}-cy_t=0$, при $b$ = 1. Тоді система (3.182) прийме інший вигляд. Однак суттєвого впливу цей підхід, на точність знаходження коефіцієнтів неперервного ДР (3.171) не чинить.

матрицю $F$ (таблиця 3.51), аналогічно таблиці 3.49, за даними таблиці 3.50.

Таблиця 3.50 – **Експериментальні дані**

| $t$ | $y$ | 12 | 0,457251 | 25 | –0,05685 | 38 | 0,002587 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 13 | 0,55223 | 26 | –0,04584 | 39 | 0,001387 |
| 1 | –2,23808 | 14 | 0,550698 | 27 | –0,0334 | 40 | 0,000447 |
| 2 | –4,09052 | 15 | 0,486472 | 28 | –0,02146 | 41 | –0,00022 |
| 3 | –4,82763 | 16 | 0,388779 | 29 | –0,01122 | 42 | –0,00063 |
| 4 | –4,75352 | 17 | 0,2805 | 30 | –0,00326 | 43 | –0,00082 |
| 5 | –4,15948 | 18 | 0,177758 | 31 | 0,002298 | 44 | –0,00085 |
| 6 | –3,29492 | 19 | 0,090418 | 32 | 0,005655 | 45 | –0,00077 |
| 7 | –2,35341 | 20 | 0,02314 | 33 | 0,007194 | 46 | –0,00064 |
| 8 | –1,46987 | 21 | –0,02334 | 34 | 0,00737 | 47 | –0,00047 |
| 9 | –0,72553 | 22 | –0,05095 | 35 | 0,006638 | 48 | –0,00031 |
| 10 | –0,15734 | 23 | –0,06308 | 36 | 0,0054 | 49 | –0,00017 |
| 11 | 0,230865 | 24 | –0,06374 | 37 | 0,003973 | 50 | $-6\cdot10^{-5}$ |

Таблиця 3.51 – **Узагальнена видом моделі (3.173) матриця $F$ і результати розрахунків**

| $t$ | $Y = y$ | $F$ | | Розрахунок $\hat{y}_t^{(PA)}$ за способом | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $f_1 = y_{t-1}$ | $f_2 = y_{t-2}$ | 1 | 2 | 3[229] |
| 2 | –4,09052 | –2,23808 | 1 | –4,090542 | –4,090542 | –4,075500 |
| 3 | –4,82763 | –4,09052 | –2,23808 | –4,82763 | –4,827663 | –4,649528 |
| *4* | *–4,75352* | –4,82763 | –4,09052 | *–4,753535* | *–4,753572* | *–4,521518* |
| 5 | –4,15948 | –4,75352 | –4,82763 | –4,15947 | –4,159528 | –3,991942 |
| 6 | –3,29492 | –4,15948 | –4,75352 | –3,29493 | –3,29497 | –3,278495 |
| 7 | –2,35341 | –3,29492 | –4,15948 | –2,353405 | –2,35345 | –2,528145 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| 50 | $-6\cdot10^{-5}$ | –0,00017 | –0,00031 | $-5{,}928\cdot10^{-5}$ | $-5{,}984\cdot10^{-5}$ | 0,000008 |
| | | $b$ | $a$ | | | |

*Примітка. РА* – передбачена вихідна змінна різницевим аналогом ДР (3.173) чи в нашому випадку (3.200)

[229] При $t = 0$, $y = 0{,}821769$ ; $t = 1$, $y = -2{,}409835$, що не наведено в таблиці 3.51.

Використовуючи дані таблиці 3.51 і виконуючи відповідні матричні перетворення (3.118) отримуємо систему нормальних рівнянь (3.198) і дисперсійну матрицю (3.199) для визначення коефіцієнтів РА ДР (3.173):

$$\begin{Vmatrix} 105,4472 & 96,76084 \\ 96,76084 & 106,4472 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} b \\ a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 98,999044 \\ 79,341219 \end{Vmatrix} \tag{3.198}$$

$$D = \begin{Vmatrix} 5,717157 \cdot 10^{-2} & -5,196915 \cdot 10^{-2} \\ -5,196916 \cdot 10^{-2} & 5,663447 \cdot 10^{-2} \end{Vmatrix} \tag{3.199}$$

Розв'язуючи систему (3.198) через (3.199) за (3.118) знаходимо: $b$ = 1,536629; $a$ = –0,6514431, тоді різницевий аналог (3.173) неперервного ДР (3.170) прийме вигляд:

$$\hat{y}_t^{(PA)} = 1,536629\, y_{t-1} - 0,6514431\, y_{t-2} \tag{3.200}$$

*Примітка.* Як зазначалось вище, на практиці аналітичний вид неперервного ДР зазвичай невідомий, наприклад, коли ДР неоднорідне. Тому, виходячи з чисто інтуїтивних міркувань, висувається кілька варіантів диференціального рівняння. У цьому випадку, про вид неперервного ДР можна судити за його різницевим аналогом: чим більше $F$-відношення (3.121) має РА, тим точніше буде прогноз його неперервного[230] аналога.

Розрахунки за (3.200) можна здійснювати трьома способами: 1) за даними тільки експерименту, тобто з використанням колонок матриці $F$ (застосовується для визначення виду неперервного ДР за $F$-відношенням); 2) перші $r$ експериментальні дані є аналогом п.у. неперервного ДР, а далі розрахунок виконується циклічно із залученням тільки що розрахованих значень за моделлю, до закінчення інтервалу зміни значень незалежної вхідної змінної (використовується для прогнозу за РА ДР); 3) розв'язати різницеве рівняння.

Розглянемо послідовність розрахунку способами 1 і 2 більш детально на прикладі рядку $t$ = 4 (таблиця 3.51), використовуючи диференціальне рівняння в різницевому виді (3.200).

Розрахунок за способом:

1) $\hat{y}_{t=4}^{(PA)} = 1,536629\, y_{t=3} - 0,6514431\, y_{t=2} = 1,536629(-4,82763) - 0,6514431(-4,09052) = -4,753535.$

2) За п.у. приймаємо дані експерименту $y_{t=0} = 1$ і $y_{t=1} = -2,23808$; підставляючи їх у вираз (3.200) знаходимо:

---

[230] Нагадаємо, що з неперервного ДР різницевий аналог отримується заміною відповідних похідних $y^{(i)}$ складовими $y_{t-i}$, де зсув $i$ = 1, 2, …, $r$.

$\hat{y}_{t=2}^{(PA)} = 1,536629\,y_{t=1} - 0,6514431\,y_{t=0} = 1,536629(-2,23808) - 0,6514431 \cdot 1 = -4,090542.$

Для розрахунку $\hat{y}_{t=3}^{(PA)}$ використаємо п.у. $y_{t=1}$ і тільки що розрахований модельний прогноз $\hat{y}_{t=2}^{(PA)}$, тоді отримаємо:

$\hat{y}_{t=3}^{(PA)} = 1,536629\,\hat{y}_{t=2}^{(PA)} - 0,6514431\,y_{t=1} = 1,536629(-4,090542) - 0,6514431(-2,23808) = -4,827663.$

І нарешті, для розрахунку $\hat{y}_{t=4}^{(PA)}$ скористаємося модельними прогнозами $\hat{y}_{t=3}^{(PA)}$ і $\hat{y}_{t=2}^{(PA)}$, тоді отримаємо:

$\hat{y}_{t=4}^{(PA)} = 1,536629\,\hat{y}_{t=3}^{(PA)} - 0,6514431\,\hat{y}_{t=2}^{(PA)} = 1,536629(-4,827663) - 0,6514431(-4,090542) = -4,753572.$

3) Модель (3.200) можна записати у виді рівняння $y_{i+2} - 1,536629\,y_{i+1} + 0,6514431\,y_i = 0$[231], де індекс $i$ – точка в експерименті й розв'язати його, у виді послідовності, відносно $y_i = \psi(i)$.

Складемо подібно (3.187) характеристичне рівняння $1\lambda^2 - 1,536629\lambda + 0,6514431 = 0$, яке має розв'язок $\lambda_{1,2} = 0,7683145 \pm j0,2472569$. У випадку комплексних коренів розв'язок[232] різницевого рівняння відшукується у виді:

$$y = 0,7683145^{\,i}\left(\tilde{C}_1 \cos(0,2472569\,i) + \tilde{C}_2 \sin(0,2472569\,i)\right),$$

де $\tilde{C}_1$ *і* $\tilde{C}_2$ – постійні, які підбираються за МНК[233], аналогічно (3.194).

Розглянемо, яким чином розраховується $F$-відношення за формулою (3.121), для того, щоб на практиці з кількох конкуруючих варіантів неперервного ДР для апроксимації експериментальних даних в подальшому вибирати найбільш придатний за їх різницевими[234] аналогами (без розв'язку ДР). Для цього скористаємось таблицею 3.52.

---

[231] Запис $y_i - 1,536629\,y_{i-1} + 0,6514431\,y_{i-2} = 0$ рівноцінна, але як записано вище – прийнята в теорії.

[232] Для різницевого ДР з ПК порядку $r$ вигляду: $\tilde{a}_0 y_{i+r} + \tilde{a}_1 y_{i+r-1} + \ldots + \tilde{a}_r y_i = 0$ залежно від коренів характеристичного рівняння $\tilde{a}_0\lambda^r + \tilde{a}_1\lambda^{r-1} + \ldots + \tilde{a}_r = 0$ розв'язком може бути [11]: $y_i = \tilde{C}_1\lambda_1^i + \tilde{C}_2\lambda_2^i + \ldots + \tilde{C}_r\lambda_r^i$ (*) – у випадку різних дійсних коренів, інакше якщо: 1) якийсь з корнів $\lambda_j$ має кратність $m$, то відповідний член в розв'язку (*) замінюється на $\left(\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2 + \ldots + i^{m-1}\tilde{C}_m\right)\lambda_j^i$; 2) якщо два кореня комплексно-спряжені $\lambda = \eta\ell^{\pm j\varphi}$, то відповідні дві складові у розв'язку можна замінити на $\eta^i\left(\tilde{C}_1\cos i\varphi + \tilde{C}_2\sin i\varphi\right)$, де всі коефіцієнти $\tilde{C}_j$ мають бути визначені за початковими чи граничними умовами.

[233] $\hat{y}^{(PA)} = 0,7683145^{\,i}\left(0,8217685\cos(0,2472569\,i) - 16,07099\sin(0,2472569\,i)\right)$.

[234] На практиці об'єктивнішим критерієм вибору конкуруючих варіантів ДР є $F$-відношення, складене для моделі (3.196) (приклад 3.19); для нашого випадку $F = 1,076482 \cdot 10^9$.

Таблиця 3.52 – **Допоміжні розрахунки для складання *F*-відношення**

| $i=t$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i-\hat{y}_i)^2\cdot 10^9$ | $(y_i-\overline{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | –4,09052 | –4,090542 | 0,484 | 13,123059 |
| 3 | –4,82763 | –4,82763 | 0 | 19,006865 |
| 4 | –4,75352 | –4,753535 | 0,225 | 18,366164 |
| 5 | –4,15948 | –4,15947 | 0,1 | 13,62744 |
| 6 | –3,29492 | –3,29493 | 0,1 | 7,9917952 |
| 7 | –2,35341 | –2,353405 | 0,025 | 3,5549833 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 50 | $-6\cdot 10^{-5}$ | $-5{,}928\cdot 10^{-5}$ | 0,000519 | 0,2189151 |
| ∑ | –22,92924 | | 1,577577 | 89,708572 |

*Примітка.* Дані $y_i$ і $\hat{y}_i$ взяті відповідно з колонок таблиці 3.51 – $y$ і $\hat{y}_t^{(PA)}$ (1 спосіб); в загальному випадку $i \neq t$

Враховуючи, що $n$ = 49 (кількість рядків[235] матриці $F$), $l$ = 2 (число коефіцієнтів моделі), використаємо формулу (3.121) і дані таблиці 3.52, знаходимо її складові:

$$\overline{y} = \frac{-22{,}92924}{49} = -0{,}467943673;$$

$$s_{зал}^2 = \frac{1{,}577577\cdot 10^{-9}}{49-2} = 3{,}35655\cdot 10^{-11};\ s_{y-\overline{y}}^2 = \frac{89{,}708572}{49-1} = 1{,}8689286.$$

Тоді $F$-відношення прогнозу РА: $F_p = \dfrac{s_{y-\overline{y}}^2}{s_{зал}^2} = \dfrac{1{,}8689286}{3{,}35655\cdot 10^{-11}} = 5{,}5680094\cdot 10^{10}$.

Отже модель (3.200) в нашому випадку дуже точно прогнозує[236] експериментальні дані, а значить і неперервний аналог (3.170) в теорії буде вести себе подібно.

*Отримання аналітичного неперервного* ДР (3.171) за (3.200). Для отримання неперервного ДР (3.170), складемо систему (3.182) і розв’яжемо[237], враховуючи що $\Delta t = 1$ і в (3.200): $a = -0{,}6514431$, $b = 1{,}536629$, $c = 1$.

---

[235] Кількість дослідів $n$ мінус $r$ = 2 – експериментальних значень (аналог п.у. $y_0$ = 1; $y_1$ = = –2,23808), див. таблицю 3.49, оскільки перші $r$-дослідів є допоміжними при складанні матриці $F$; їх не можна прогнозувати за РА ДР (3.173), а тільки за неперервним ДР (3.170).

[236] Для 2 і 3 способу (таблиця 3.51) $F$ відповідно дорівнює $6{,}0268491\cdot 10^9$ і 38,10194.

[237] В розв’язок системи (3.182) справа – підставляємо коефіцієнти, як їх визначили в (3.200) без зміни знаків.

$$\begin{cases} \dfrac{A}{1^2} + \dfrac{B}{2\cdot 1} = 1 \\ -\dfrac{2A}{1^2} + C = -1,536629 \\ \dfrac{A}{1^2} - \dfrac{B}{2\cdot 1} = 0,6514431 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}\left(1-\left(-0,6514431\right)\right)\cdot 1^2 = 0,8257216 \\ C = \dfrac{2\cdot 0,8257216}{1^2} - 1,536629 = 0,1148142 \\ B = 2\cdot 1\cdot\left(1-\dfrac{0,8257216}{1^2}\right) = 0,3485569. \end{cases}$$

Підставляючи, знайдені $A$, $B$, $C$ в (3.170), диференціальне рівняння прийме вид:

$$0,8257216y'' + 0,3485569y' + 0,1148142y = 0 \qquad (3.201)$$

чи в стандартному виді (3.171):

$$y'' + 0,422124y' + 0,1390471y = 0. \qquad (3.202)$$

*Розв'язок диференціального рівняння.* Складемо для (3.202) характеристичне рівняння (3.187):

$$1s^2 + 0,422124s + 0,1390471 = 0. \qquad (3.203)$$

Оскільки дискримінант $d = 0,422124^2 - 4\cdot 1\cdot 0,1390471 = -0,3779997 < 0$, то корені (3.203) комплексні $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$[238], а значить розв'язок (3.202) шукаємо у виді (3.190). Визначаючи складові:

$$\sigma = -\frac{B}{2A} = -\frac{0,422124}{2\cdot 1} = -0,211062, \quad \omega = \frac{\sqrt{4\cdot 1\cdot 0,1390471 - 0,422124^2}}{2\cdot 1} = 0,3074084$$

розв'язком (3.202) є функція

$$y = \ell^{-0,211062\,t}\left(C_1\cos\left(0,3074084\,t\right) + C_2\sin\left(0,3074084\,t\right)\right), \qquad (3.204)$$

де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі.

*Визначення постійних інтегрування* $C_1$ і $C_2$. Оскільки (3.204) описує різні криві, за рахунок надання $C_1$ і $C_2$ будь-яких значень і всі ці інтегральні криві описуються одним диференціальним рівнянням (3.202), то необхідно визначити такі їх значення, щоб після їх підстановки в математичну модель (3.204), вона експериментальні дані таблиці 3.50 описувала б максимально точно. Для цього приведемо (3.204) до виду лінійного за параметрами (3.194)

$$y = C_1\ell^{-0,211062\,t}\cos\left(0,3074084\,t\right) + C_2\ell^{-0,211062\,t}\sin\left(0,3074084\,t\right) \qquad (3.205)$$

і за повторним застосуванням МНК до експериментальних даних таблиці 3.50, визначимо її невідомі.

На основі (3.205) вектор відомих функцій: $\tilde{f}^T(t) = \left\| \ell^{-0,211062\,t}\cos\left(0,3074084\,t\right),\ \ell^{-0,211062\,t}\sin\left(0,3074084\,t\right) \right\|$ і узагальнена матриця $F$ набуває виду, наведеного в таблиці 3.53.

---

[238] $s_{1,2} = -0,211062 \pm j0,3074084$.

Таблиця 3.53 – **Узагальнена видом моделі (3.205) матриця *F***

| $t$ | $F$ | | $Y=y$ |
|---|---|---|---|
| | $f_1=\ell^{-0,211062\,t}\cos(0,3074084\,t)$ | $f_2=\ell^{-0,211062\,t}\sin(0,3074084\,t)$ | |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0,7717648 | 0,245014 | –2,23808 |
| 2 | 0,5355891 | 0,3781863 | –4,09052 |
| 3 | 0,3206879 | 0,4230977 | –4,82763 |
| 4 | 0,1438307 | 0,4051049 | –4,75352 |
| 5 | $1{,}174716\cdot10^{-2}$ | 0,3478862 | –4,15948 |
| 6 | $-7{,}617096\cdot10^{-2}$ | 0,2713646 | –3,29492 |
| 7 | –0,1252742 | 0,1907666 | –2,35341 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 50 | $-2{,}463892\cdot10^{-5}$ | $8{,}647661\cdot10^{-6}$ | $-6\cdot10^{-5}$ |
| | $C_1$ | $C_2$ | |

На основі матриці $F$, складемо систему для визначення $C_1$ і $C_2$ в матричному виді (3.116) та розв'яжемо її за (3.118):

$$\begin{Vmatrix} 2,099371 & 0,5271589 \\ 0,5271589 & 0,804674 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4,4018977 \\ -9,188668 \end{Vmatrix}; \quad D = \begin{Vmatrix} 0,5701196 & -0,3734975 \\ -0,3734974 & 1,487425 \end{Vmatrix},$$

тоді знаходимо: $C_1 = 0{,}9223351$; $C_2 = -12{,}02336$.

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (3.204) визначаємо математичну модель, для опису експериментальних даних таблиці 3.50:

$$\hat{y} = \ell^{-0,211062\,t}\left(0,9223351\cos(0,3074084\,t) - 12,02336\sin(0,3074084\,t)\right). \quad (3.206)$$

Приведемо диференціальне рівняння (3.202) до задачі Коші, для цього знайдемо похідну від (3.206):

$$y' = (-0,211062)\ell^{-0,211062\,t}\left(0,9223351\cos(0,3074084\,t) - 12,02336\sin(0,3074084\,t)\right) +$$

$$+\ell^{-0,211062\,t}\left(0,9223351\cdot(-0,3074084)\sin(0,3074084\,t) - 12,02336\cdot 0,3074084\cos(0,3074084\,t)\right) =$$

$$= \ell^{-0,211062\,t}\left(-3,8907518\cos(0,3074084\,t) + 2,2541409\sin(0,3074084\,t)\right) \quad (3.207)$$

і підставляючи замість $t$ значення 0 в (3.206) і (3.207) відповідно знаходимо[239]:

$$y_0 = 0,9223351, \;\; y_0' = -3,890752. \quad (3.208)$$

Отже диференціальне рівняння (3.202) з початковими умовами (3.208) має розв'язок[240] (3.206).

---

[239] Аналогічно, коли в (3.206) підставити значення $t = 0$ і $t = 50$, то отримаємо граничні умови: $y_0 = 0,9223351$, $y_n = -1,266993\cdot10^{-4}$.

*Перевірка адекватності*. Використовуючи (3.206), складемо таблицю 3.54.

Таблиця 3.54 – **Адекватність ДР (3.202) з п.у. (3.208), розв'язком якого є (3.206), експериментальним даним**

| $t$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | 12 | 0,457251 | 0,43448 | 25 | –0,05685 | –0,05978 | 38 | 0,002587 | 0,00325 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,92234 | 13 | 0,55223 | 0,54450 | 26 | –0,04584 | –0,04980 | 39 | 0,001387 | 0,00195 |
| 1 | –2,23808 | –2,23407 | 14 | 0,550698 | 0,55558 | 27 | –0,0334 | –0,03767 | 40 | 0,000447 | 0,00088 |
| 2 | –4,09052 | –4,05308 | 15 | 0,486472 | 0,50055 | 28 | –0,02146 | –0,02550 | 41 | –0,00022 | 0,00008 |
| 3 | –4,82763 | –4,79127 | 16 | 0,388779 | 0,40835 | 29 | –0,01122 | –0,01466 | 42 | –0,00063 | –0,00045 |
| 4 | –4,75352 | –4,73806 | 17 | 0,2805 | 0,30211 | 30 | –0,00326 | –0,00591 | 43 | –0,00082 | –0,00075 |
| 5 | –4,15948 | –4,17193 | 18 | 0,177758 | 0,19858 | 31 | 0,002298 | 0,00049 | 44 | –0,00085 | –0,00086 |
| 6 | –3,29492 | –3,33297 | 19 | 0,090418 | 0,10844 | 32 | 0,005655 | 0,00463 | 45 | –0,00077 | –0,00084 |
| 7 | –2,35341 | –2,40920 | 20 | 0,02314 | 0,03718 | 33 | 0,007194 | 0,00683 | 46 | –0,00064 | –0,00073 |
| 8 | –1,46987 | –1,53340 | 21 | –0,02334 | –0,01372 | 34 | 0,00737 | 0,00750 | 47 | –0,00047 | –0,00058 |
| 9 | –0,72553 | –0,78725 | 22 | –0,05095 | –0,04554 | 35 | 0,006638 | 0,00710 | 48 | –0,00031 | –0,00041 |
| 10 | –0,15734 | –0,20977 | 23 | –0,06308 | –0,06131 | 36 | 0,0054 | 0,00605 | 49 | –0,00017 | –0,00026 |
| 11 | 0,230865 | 0,19238 | 24 | –0,06374 | –0,06477 | 37 | 0,003973 | 0,00467 | 50 | –0,00006 | –0,00013 |

Враховуючи, що $n$ = 51, $l$ = 4, за формулою (3.121) і даними[241] таблиці 3.54, знаходимо:

$$\bar{y} = \frac{-24{,}16732}{51} = -0{,}47386902;$$

$$s_{зал}^2 = \frac{0{,}0286186}{51-4} = 0{,}00060891; \quad s_{y-\bar{y}}^2 = \frac{94{,}99502256}{51-1} = 1{,}899900451.$$

Тоді $F$-відношення прогнозу неперервного ДР (3.202) з початковими умовами (3.208) і розв'язком (3.206): $F_p = \dfrac{1{,}899900451}{0{,}000608906} = 3120{,}184627$. Отже модель (3.206) задовільно прогнозує експериментальні дані, що видно за даними колонок таблиці 3.54 і рисунка 3.14. Порівнюючи прогноз неперервного аналога ДР (3.202) з його різницевим аналогом (3.200) за $F$-

---

[240] Якщо взяти від (3.205) похідну $y'$ і скласти систему (3.191) $\begin{cases} y\big|_{t=0} = y_0 \\ y'\big|_{t=0} = y_0' \end{cases}$ з (3.205) і $y'$ при $t$ = 0 та прирівняти її ліві частини заданим п.у. (3.208), то отримаємо $\begin{cases} 1C_1 + 0C_2 = 0{,}9223351 \\ -0{,}211062C_1 + 0{,}3074084C_2 = -3{,}890752 \end{cases}$. Розв'язуючи отриману систему, теоретично знаходять постійні інтегрування $C_1$ і $C_2$ початкової задачі Коші (3.168).

[241] Розрахунки колонок: $(y_i - \hat{y}_i)^2$ – сума 0,0286186, $(y_i - \bar{y})^2$– сума 94,995020256 не наводимо, оскільки вони отримуються подібно таблиці 3.52.

відношенням бачимо, що точність неперервного аналога знизилась на кілька порядків[242], однак прогноз при будь-якому значенні $t$ на відрізку від 0 до 50 важливіше, ніж тільки через рівний інтервал дискретизації 1.

*Приклад* 3.19.

Знайти залежність зміни величини $y$ від $x$, наведеної в таблиці 3.55 у виді неоднорідного диференціального рівняння з поліноміальною правою частиною 3 порядку і розв'язати його.

Таблиця 3.55 – **Дані експерименту**

| $x$ | $y$ | 0,5 | 0,8817 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0196 | 0,55 | 0,9123 |
| 0,05 | 0,0258 | 0,6 | 0,9349 |
| 0,1 | 0,0672 | 0,65 | 0,9517 |
| 0,15 | 0,164 | 0,7 | 0,9645 |
| 0,2 | 0,3053 | 0,75 | 0,9743 |
| 0,25 | 0,4582 | 0,8 | 0,982 |
| 0,3 | 0,5941 | 0,85 | 0,9881 |
| 0,35 | 0,7015 | 0,9 | 0,9929 |
| 0,4 | 0,7815 | 0,95 | 0,9968 |
| 0,45 | 0,8396 | 1 | 1 |

*Розв'язок*

Для опису даних таблиці 3.55, використаємо неоднорідне ДР виду[243]:

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Cy=n_0+n_1x+n_2x^2+n_3x^3. \qquad (3.209)$$

*Отримання аналітичного неоднорідного ДР* (3.209). Для знаходження коефіцієнтів скористуємося прямим способом за МНК, тоді модель (3.196) матиме вид:

$$y_{i-1}=A\frac{y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}}{h^2}+B\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}+n_0+n_1x_{i-1}+n_2x_{i-1}^2+n_3x_{i-1}^3 \qquad (3.210)$$

Враховуючи, що інтервал дискретизації $h$ = 0,05, складемо за даними таблиці 3.55 матрицю $F$ і вектор $Y$ (таблиця 3.56) для моделі (3.210):

---

[242] Модель (3.200) не зручна у використанні через циклічність; як вона буде себе вести в умовах, відмінних від експериментальних, при $\Delta t \neq 1$ невідомо, оскільки весь прогноз визначається аналогом п.у. $y_0$ і $y_1$, які необхідно задати при іншому $\Delta t$. Модель (3.200) не представляє такого інтересу, як (3.206).

[243] Поліноми прості у використанні, тому праву частину беремо в поліноміальному вигляді; неможна брати $f(x)$ = $const$ (в нашому випадку $n_0$), оскільки $s$-крива не описується (в початковий момент зміни $x$) стандартним ДР 2 порядку, а наприклад, функцією $y=\dfrac{a\ell^{bx}}{c+d\ell^{ex}}$, при $b = e$, де перехід з одного стану в інший уздовж вісі $x$ змінюється за рахунок параметра $c$.

Таблиця 3.56 – **Узагальнена матриця *F* і вектор *Y***

| $i$ | $x$ | $y$ | $F$ | | | | | | $Y = y_{i-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0,0196 | $f_1 = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}$ | $f_2 = \frac{y_i - y_{i-2}}{2h}$ | $f_3 = 1$ | $f_4 = x_{i-1}$ | $f_5 = x_{i-1}^2$ | $f_6 = x_{i-1}^3$ | |
| 2 | 0,05 | 0,0258 | | | | | | | |
| 3 | 0,1 | 0,0672 | 14,08 | 0,476 | 1 | 0,05 | 0,0025 | 0,000125 | 0,0258 |
| 4 | 0,15 | 0,164 | 22,16 | 1,382 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0672 |
| 5 | 0,2 | 0,3053 | 17,79999 | 2,381 | 1 | 0,15 | 0,0225 | 0,003375 | 0,164 |
| 6 | 0,25 | 0,4582 | 4,640007 | 2,942 | 1 | 0,2 | 0,04 | 0,008 | 0,3053 |
| 7 | 0,3 | 0,5941 | –6,800007 | 2,888 | 1 | 0,25 | 0,0625 | 0,015625 | 0,4582 |
| 8 | 0,35 | 0,7015 | –11,4 | 2,433 | 1 | 0,3 | 0,09 | 0,027 | 0,5941 |
| 9 | 0,4 | 0,7815 | –10,96001 | 1,874 | 1 | 0,35 | 0,1225 | 0,042875 | 0,7015 |
| 10 | 0,45 | 0,8396 | –8,759974 | 1,381 | 1 | 0,4 | 0,16 | 0,064 | 0,7815 |
| 11 | 0,5 | 0,8817 | –6,400036 | 1,002 | 1 | 0,45 | 0,2025 | $9{,}1125 \cdot 10^{-2}$ | 0,8396 |
| 12 | 0,55 | 0,9123 | –4,599976 | 0,7269996 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,8817 |
| 13 | 0,6 | 0,9349 | –3,200006 | 0,5320001 | 1 | 0,55 | 0,3025 | 0,166375 | 0,9123 |
| 14 | 0,65 | 0,9517 | –2,320003 | 0,3939998 | 1 | 0,6 | 0,36 | 0,216 | 0,9349 |
| 15 | 0,7 | 0,9645 | –1,599979 | 0,2960002 | 1 | 0,65 | 0,4225 | 0,274625 | 0,9517 |
| 16 | 0,75 | 0,9743 | –1,200008 | 0,2260005 | 1 | 0,7 | 0,49 | 0,343 | 0,9645 |
| 17 | 0,8 | 0,982 | –0,8400201 | 0,1749998 | 1 | 0,75 | 0,5625 | 0,421875 | 0,9743 |
| 18 | 0,85 | 0,9881 | –0,6399869 | 0,1379997 | 1 | 0,8 | 0,64 | 0,512 | 0,982 |
| 19 | 0,9 | 0,9929 | –0,5199909 | 0,1090002 | 1 | 0,85 | 0,7225 | 0,614125 | 0,9881 |
| 20 | 0,95 | 0,9968 | –0,360012 | $8{,}700013 \cdot 10^{-2}$ | 1 | 0,9 | 0,8099999 | 0,7289999 | 0,9929 |
| 21 | 1 | 1 | –0,2799987 | $7{,}099986 \cdot 10^{-2}$ | 1 | 0,95 | 0,9025 | 0,857375 | 0,9968 |
| | | | $A$ | $B$ | $n_0$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | |

На основі матриць $F$ і $Y$ складемо систему (3.116) для визначення невідомих коефіцієнтів (3.210):

$$\begin{Vmatrix} 1484{,}077 & -0{,}1127973 & -1{,}200004 & -18{,}328 & -10{,}6676 & -5{,}870112 \\ -0{,}1127973 & 38{,}32374 & 19{,}514 & 5{,}9418 & 2{,}35954 & 1{,}162886 \\ -1{,}200004 & 19{,}514 & 19 & 9{,}5 & 6{,}175 & 4{,}5125 \\ -18{,}328 & 5{,}9418 & 9{,}5 & 6{,}175 & 4{,}5125 & 3{,}516662 \\ -10{,}6676 & 2{,}35954 & 6{,}175 & 4{,}5125 & 3{,}516662 & 2{,}854156 \\ -5{,}870112 & 1{,}162886 & 4{,}5125 & 3{,}516662 & 2{,}854156 & 2{,}382122 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} A \\ B \\ n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -38{,}031441 \\ 9{,}9631705 \\ 13{,}5169567 \\ 8{,}31687238 \\ 5{,}78197303 \\ 4{,}33829701 \end{Vmatrix} \quad (3.211)$$

Розв'язуючи (3.211) за (3.118) знаходимо: $A = -5{,}066923 \cdot 10^{-3}$; $B = -6{,}676052 \cdot 10^{-2}$; $n_0 = -4{,}425079 \cdot 10^{-2}$; $n_1 = 3{,}636066$; $n_2 = -4{,}3641$; $n_3 = 1{,}786171$. Отже після переносу $A$, $B$ в ліву сторону щодо (3.210) неоднорідне ДР (3.209) набуває вигляд:

$$5{,}066923 \cdot 10^{-3} y'' + 6{,}676052 \cdot 10^{-2} y' + 1y = -4{,}425079 \cdot 10^{-2} + 3{,}636066\,x - \\ -4{,}3641\,x^2 + 1{,}786171\,x^3 \quad (3.212)$$

чи в стандартному виді:

$$y''+13{,}17575y'+197{,}3584y=-8{,}733267+717{,}6083\,x-861{,}292\,x^2+352{,}5159\,x^3. \quad (3.213)$$

Розглянемо, як розраховується $F$-відношення за формулою (3.121), для того, щоб на практиці з кількох неперервних ДР, що конкурують, в подальшому без їх розв’язку вибирати найбільш підходящий вид за їх моделями (3.196), в нашому випадку (3.210) складемо таблицю 3.57.

Таблиця 3.57 – **Допоміжні розрахунки, для складання *F*-відношення**

| $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i-\hat{y}_i)^2\cdot 10^5$ | $(y_i-\bar{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,0258 | 0,023745 | 0,422203 | 0,470033 |
| 4 | 0,0672 | 0,072955 | 3,311891 | 0,414980 |
| 5 | 0,164 | 0,159847 | 1,724591 | 0,299635 |
| 6 | 0,3053 | 0,302768 | 0,641241 | 0,164909 |
| 7 | 0,4582 | 0,461569 | 1,135039 | 0,064105 |
| 8 | 0,5941 | 0,597361 | 1,063470 | 0,013757 |
| 9 | 0,7015 | 0,700776 | 0,052360 | 0,000098 |
| 10 | 0,7815 | 0,778424 | 0,946041 | 0,004915 |
| 11 | 0,8396 | 0,836548 | 0,931577 | 0,016438 |
| 12 | 0,8817 | 0,880801 | 0,080759 | 0,029006 |
| 13 | 0,9123 | 0,913317 | 0,103412 | 0,040365 |
| 14 | 0,9349 | 0,937577 | 0,716805 | 0,049957 |
| 15 | 0,9517 | 0,954233 | 0,641558 | 0,057749 |
| 16 | 0,9645 | 0,966235 | 0,301158 | 0,064065 |
| 17 | 0,9743 | 0,974106 | 0,003755 | 0,069122 |
| 18 | 0,982 | 0,980127 | 0,350841 | 0,073230 |
| 19 | 0,9881 | 0,985633 | 0,608597 | 0,076569 |
| 20 | 0,9929 | 0,991422 | 0,218453 | 0,079248 |
| 21 | 0,9968 | 0,999508 | 0,733530 | 0,081459 |
| $\sum$ | 13,5164 | | 13,987280 | 2,06964 |

*Примітка.* Дані $y_i$ взяті з колонки таблиці 3.56 – $y_{i-1}$, а $\hat{y}_i$ – розраховані за (3.210), наприклад, в матричному виді: $\hat{Y}=FB$ при $i$ = 7 знаходимо $\hat{y}_7$ = –6,800007·(–5,066923·10$^{-3}$) + 2,888·(–6,676052·10$^{-2}$) + 1·(–4,425079·10$^{-2}$) + 0,25·3,636066 + 0,0625·(–4,3641) + + 0,015625·1,786171 = 0,461569.

Враховуючи, що $n$ = 19 (кількість рядків матриці $F$), $l$ = 6 (число коефіцієнтів моделі), з використанням формули (3.121) і даних таблиці 3.57, знаходимо її складові:

$$\bar{y}=\frac{13{,}5164}{19}=0{,}7113895;$$

$$s^2_{зал}=\frac{13{,}987280\cdot 10^{-5}}{19-6}=1{,}075945\cdot 10^{-5}; \qquad s^2_{y-\bar{y}}=\frac{2{,}06964}{19-1}=0{,}11498$$

Тоді $F$-відношення прогнозу неперервного аналога (3.213) через розділені різниці (3.210):

$$F_p=\frac{0{,}11498}{1{,}075945\cdot 10^{-5}}=10686{,}42. \qquad (3.214)$$

Отже модель (3.210) з великим $F$-відношенням[244] прогнозує експериментальні дані, а значить і неоднорідне ДР з ПК (3.213) в теорії буде вести себе подібно.

*Розв'язок диференціального рівняння* (3.213). Оскільки ДР неоднорідне, то розв'язок будемо шукати у виді (3.192).

Пошук *частинного однорідного розв'язку* $y_{чо}$ ДР:

$$y'' + 13{,}17575y' + 197{,}3584y = 0 \qquad (3.215)$$

знаходимо у виді однієї з функцій (3.188)–(3.190) за аналогією з прикладом 3.18.

Складемо для (3.215) характеристичне рівняння (3.187): $1s^2 + 13{,}17575s + 197{,}3584 = 0$. Оскільки дискримінант $d = 13{,}17575^2 - -4 \cdot 1 \cdot 197{,}3584 = -615{,}8332 < 0$, то корені комплексні, а значить розв'язок (3.215) шукаємо у виді (3.190). Визначаючи складові:

$$\sigma = -\frac{B}{2A} = -\frac{13{,}17575}{2 \cdot 1} = -6{,}587875\,,\ \ \omega = \frac{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 197{,}3584 - 13{,}17575^2}}{2 \cdot 1} = 12{,}40799$$

розв'язком (3.215) є функція

$$y_{чо} = \ell^{-6{,}587875\,x}\left(C_1 \cos\left(12{,}40799\,x\right) + C_2 \sin\left(12{,}40799\,x\right)\right). \qquad (3.216)$$

Пошук *частинного неоднорідного розв'язку* $y_{чн}$ ДР. Частинний неоднорідний розв'язок (3.215) залежить від виду правої частини. В нашому випадку для правої частини виду: $f(x) = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3$, де $n_i$ – відомі коефіцієнти, неоднорідна складова розв'язку[245] (3.183)[246] шукається у виді:

$$y_{чн} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\,, \qquad (3.217)$$

де $a_i$ – коефіцієнти, які необхідно визначити.

Візьмемо першу і другу похідну від (3.217):

$$y'_{чн} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2\,; \qquad y''_{чн} = 2a_2 + 6a_3 x \qquad (3.218)$$

Підставляючи (3.217), (3.218) в (3.209) знаходимо:

$$A\left(2a_2 + 6a_3 x\right) + B\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2\right) + C\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) \equiv n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3. \ (3.219)$$

---

[244] Для порівняння отримані для таблиці 3.55 ДР з поліноміальними частинами 0–2 порядків: $y'' + 8{,}551324y' + 40{,}17584y = 37{,}30017$; $y'' + 3{,}830858y' + 61{,}04138y = 25{,}26867 + 44{,}05358x$; $y'' + 5{,}648945y' + 148{,}2008y = 5{,}519039 + 353{,}9215x - 219{,}4259x^2$ мають відповідно $F$-відношення: 5,931858; 19,15508; 370,6027.

[245] Для будь-якої правої частини $f(x)$ універсального підходу до вибору розв'язку, аналогічного (3.217) не існує. Необхідно зрозуміти принцип подальшої послідовності дій і суті кожної з них.

[246] У нашому випадку (3.209) чи в цифрах (3.213).

Для визначення невідомих коефіцієнтів $a_i$ складемо систему рівнянь, прирівнюючи, відповідні складові в (3.219) при однакових[247] степенях $x$:

$$\begin{cases} A2a_2 + Ba_1 + Ca_0 = n_0 \\ A6a_3 + B2a_2 + Ca_1 = n_1 \\ B3a_3 + Ca_2 = n_2 \\ Ca_3 = n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \left(n_0 - 2Aa_2 - Ba_1\right)/C \\ a_1 = \left(n_1 - 6Aa_3 - 2Ba_2\right)/C \\ a_2 = \left(n_2 - 3Ba_3\right)/C \\ a_3 = n_3/C \end{cases} \quad (3.220)$$

Отже, визначаючи коефіцієнти з (3.220) і підставляючи їх в (3.217), а (3.217) в однорідне ДР (3.170) чи в нашому випадку (3.215) отримаємо праву частину $f(x)$, тому самим складним залишається вибір загального розв'язку $y_{чн}$ для необхідної[248] правої частини $f(x)$. Далі визначаючи похідні $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ і підставляючи їх в задане неоднорідне ДР (3.183) складемо тотожність, аналогічно (3.219), а потім систему (3.220) для визначення невідомих коефіцієнтів розв'язку $y_{чн}$. Необхідно пам'ятати, далеко не з будь-якою правою частиною НДР (3.183) отримують розв'язок в квадратурах. Систему (3.220) можна використати в окремих випадках $f(x) = n_0$, $f(x) = n_0 + n_1 x$ і $f(x) = n_0 + n_1 x + n_2 x^2$ для знаходження частинного неоднорідного розв'язку (3.183) у виді (3.217) або ж вивести аналог (3.220) для $\tilde{f}^T(x) = \begin{Vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^m \end{Vmatrix}$.

За (3.220) визначаємо коефіцієнти (3.217) для знаходження частинного неоднорідного розв'язку (3.213):

$$\begin{cases} a_3 = 352{,}5159/197{,}3584 = 1{,}786171 \\ a_2 = \left(-861{,}292 - 3\cdot 13{,}17575\cdot 1{,}786171\right)/197{,}3584 = -4{,}721838 \\ a_1 = \left(717{,}6083 - 6\cdot 1\cdot 1{,}786171 - 2\cdot 13{,}17575\cdot\left(-4{,}721838\right)\right)/197{,}3584 = 4{,}212229 \\ a_0 = \left(-8{,}733267 - 2\cdot 1\cdot\left(-4{,}721838\right) - 197{,}3584\cdot 4{,}212229\right)/197{,}3584 = -0{,}277611 \end{cases}$$

після підстановки яких в (3.217) маємо:

$$y_{чн} = -0{,}277611 + 4{,}212229\,x - 4{,}721838\,x^2 + 1{,}786171\,x^3. \quad (3.221)$$

Отже підставляючи в (3.192) розв'язки (3.216) і (3.221) знаходимо загальний розв'язок неоднорідно ДР (3.213) у виді:

---

[247] Чи в загальному випадку при однакових складових (зліва и справа) аналога (3.219): $\sin(x)$ с $\sin(x)$; $\ell^{kx}$ с $\ell^{kx}$ і т.п.

[248] Наприклад, для $f(x) = n_1 \ell^{n_2 x}$, розв'язок шукаємо у вигляді: $y_{чн} = a_1 \ell^{n_2 x}$; для $f(x) = n_1 \cos(\alpha x)$ чи $f(x) = n_1 \sin(\alpha x)$ – $y_{чн} = a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \sin(\alpha x)$; для $f(x) = n_1 \cos(\alpha x) + n_2 \sin(\beta x)$ при $n_1, n_2 \neq 0$ – $y_{чн} = a_1 \cos(\alpha x) + a_2 \sin(\beta x)$ і т.д., де $a_i$ – коефіцієнти, які необхідно визначити.

$$y=\ell^{-6,587875\,x}\left(C_1\cos(12,40799\,x)+C_2\sin(12,40799\,x)\right)-0,277611+ \\ +4,212229\,x-4,721838\,x^2+1,786171\,x^3. \tag{3.222}$$

*Визначення постійних інтегрування* $C_1$ і $C_2$. Приведемо (3.222) до лінійного виду за параметрами (3.194):

$$y-\left(-0,277611+4,212229\,x-4,721838\,x^2+1,786171\,x^3\right)= \\ =C_1\ell^{-6,587875\,x}\cos(12,40799\,x)+C_2\ell^{-6,587875\,x}\sin(12,40799\,x) \tag{3.223}$$

і з повторним застосуванням МНК до експериментальних даних таблиці 3.55, визначимо її невідомі.

На основі (3.223) вектор відомих функцій має вид:

$\tilde{f}^T(x)=\left\|\ell^{-6,587875\,x}\cos(12,40799\,x),\ \ell^{-6,587875\,x}\sin(12,40799\,x)\right\|$ і

узагальнена матриця $F$ та вектор $Y$ наведені у таблиці 3.58.

На основі матриць $F$ і $Y$, складемо систему для визначення $C_1$ і $C_2$ у матричному виді (3.116) і розв'яжемо її за (3.118):

$$\begin{Vmatrix} 1,482545 & 0,2625201 \\ 0,2625201 & 0,5898998 \end{Vmatrix}\times\begin{Vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0,3932839 \\ -0,0190644 \end{Vmatrix};$$

$$D=\begin{Vmatrix} 0,7322164 & -0,3258545 \\ -0,3258545 & 1,840216 \end{Vmatrix},$$

тоді знаходимо: $C_1$ = 0,294181; $C_2$ = –0,1632359.

Таблиця 3.58 – **Узагальнена видом моделі (3.223) матриця *F* і вектор спостережень *Y***

| $x$ | $F$ | | $Y$ |
|---|---|---|---|
| | $f_1=\ell^{-6,587875x}\cos(12,40799x)$ | $f_2=\ell^{-6,587875x}\sin(12,40799x)$ | |
| 0 | 1 | 0 | 0,297211 |
| 0,05 | 0,5853043 | 0,4182072 | 0,1043809 |
| 0,1 | 0,1676839 | 0,489557 | –0,0309797 |
| 0,15 | –0,1065901 | 0,3566664 | $-9{,}001032\cdot10^{-2}$ |
| 0,2 | –0,2115481 | 0,1641817 | $-8{,}495069\cdot10^{-2}$ |
| 0,25 | –0,192482 | $7{,}625317\cdot10^{-3}$ | $-5{,}004022\cdot10^{-2}$ |
| 0,3 | –0,1158495 | $-7{,}603422\cdot10^{-2}$ | $-1{,}521879\cdot10^{-2}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 1 | $1{,}359729\cdot10^{-3}$ | $-2{,}17173\cdot10^{-4}$ | $1{,}04928\cdot10^{-3}$ |
| | $C_1$ | $C_2$ | |

*Примітка.* З врахуванням даних таблиці 3.55 вектор

$Y=y-\left(-0,277611+4,212229\,x-4,721838\,x^2+1,786171\,x^3\right)$

На основі (3.222) розв’язок (3.213) має вид:

$$\hat{y} = \ell^{-6,587875\,x}\left(0,294181\cos\left(12,40799\,x\right) - 0,1632359\sin\left(12,40799\,x\right)\right) - \\ -0,277611 + 4,212229\,x - 4,721838\,x^2 + 1,786171\,x^3 \qquad (3.224)$$

Приведемо диференціальне рівняння (3.213) до задачі Коші, з граничними умовами, для чого підставимо в (3.224) $x = 0$ і $x = 1$:

$$y\big|_{x=0} = 0,01657,\ y\big|_{x=1} = 0,9993862 \qquad (3.225)$$

Отже неоднорідне ДР (3.213) з граничними умовами (3.225) має розв’язок (3.224).

*Оцінимо адекватність* моделі (3.224) експериментальним даним таблиці 3.55 за $F$-відношенням (3.121), для чого складемо таблицю 3.59.

Враховуючи, що $n = 21$ (число дослідів), $l = 8$ (число коефіцієнтів моделі) і використовуючи формулу (3.121) та дані таблиці 3.59, знаходимо її складові:

$$\bar{y} = \frac{14,536}{21} = 0,6921905;$$

$$s^2_{зал} = \frac{16,29217\cdot 10^{-5}}{21-8} = 1,25324\cdot 10^{-5}; \quad s^2_{y-\bar{y}} = \frac{2,62377}{21-1} = 0,13119.$$

Тоді $F$-відношення моделі (3.224):

$$F_p = \frac{0,13119}{1,25324\cdot 10^{-5}} = 10467,9065. \qquad (3.226)$$

Таблиця 3.59 – **Допоміжні розрахунки, для складання *F*-відношення**

| $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | $(y_i-\hat{y}_i)^2\cdot 10^5$ | $(y_i-\bar{y})^2$ | 12 | 0,9123 | 0,91242 | 0,00141 | 0,04845 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0196 | 0,01657 | 0,91809 | 0,45238 | 13 | 0,9349 | 0,93505 | 0,00223 | 0,05891 |
| 2 | 0,0258 | 0,02534 | 0,02133 | 0,44408 | 14 | 0,9517 | 0,95283 | 0,12812 | 0,06735 |
| 3 | 0,0672 | 0,06760 | 0,01567 | 0,39061 | 15 | 0,9645 | 0,96665 | 0,46320 | 0,07415 |
| 4 | 0,164 | 0,16443 | 0,01873 | 0,27899 | 16 | 0,9743 | 0,97684 | 0,64577 | 0,07959 |
| 5 | 0,3053 | 0,30122 | 1,66717 | 0,14968 | 17 | 0,982 | 0,98379 | 0,32131 | 0,08399 |
| 6 | 0,4582 | 0,45037 | 6,12932 | 0,05475 | 18 | 0,9881 | 0,98826 | 0,00255 | 0,08756 |
| 7 | 0,5941 | 0,58765 | 4,16077 | 0,00962 | 19 | 0,9929 | 0,99139 | 0,22907 | 0,09043 |
| 8 | 0,7015 | 0,69941 | 0,43853 | 0,00009 | 20 | 0,9968 | 0,99459 | 0,49009 | 0,09279 |
| 9 | 0,7815 | 0,78268 | 0,13830 | 0,00798 | 21 | 1 | 0,99939 | 0,03768 | 0,09475 |
| 10 | 0,8396 | 0,84152 | 0,36749 | 0,02173 | $\sum$ | 14,536 | | 16,29217 | 2,62377 |
| 11 | 0,8817 | 0,88268 | 0,09536 | 0,03591 | | | | | |

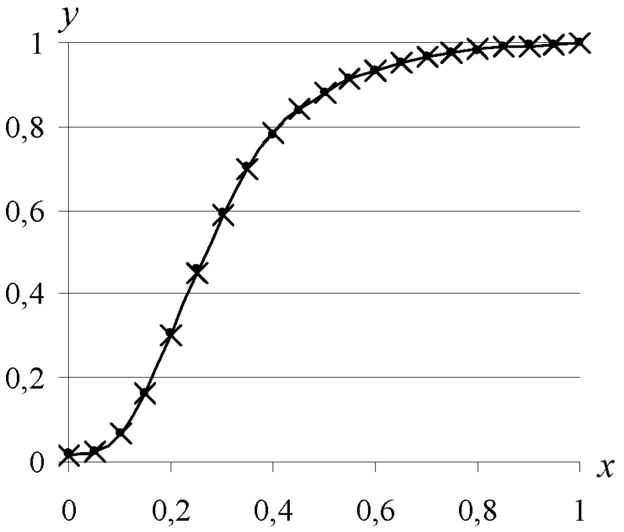



Рисунок 3.15 – **Адекватність моделі (3.224)**: експеримент (•), прогноз (×)

Отже, модель (3.224), яка є розв'язком неоднорідного ДР (3.213) з граничними умовами (3.225) точно[249] прогнозує експериментальні дані, що можна також бачити з таблиці 3.59 і рисунка 3.15. Необхідно відмітити, що подібна точність досягається тільки поліномом 8 порядку (необхідно визначити 9 коефіцієнтів, а в (3.224) їх 8) з $F$-відношенням 12822,6908. А також звичайний поліном 3 порядку: $\hat{y} = -0{,}0986453 + 2{,}663975x - 1{,}500018x^2 - 0{,}1091234x^3$ має $F$-відношення 40,07355, що вказує на те, що динамічна складова в (3.213) відіграє важливу роль.

Але необхідно мати на увазі наступне: оскільки в границі поліноміальна частина 3 порядку, то екстраполювання за моделлю здійснювати не має сенсу, тому що вона розбіжна, інакше необхідно шукати модель в іншому вигляді, наприклад,

$$y = \frac{ax^b}{c + dx^e} \text{ чи } y = \frac{a\ell^{bx}}{c + d\ell^{ex}}.$$

Однак отримання останніх моделей ускладнено, оскільки всі коефіцієнти розташовані відносно залежної змінної нелінійно. І тільки коли, деякі з коефіцієнтів стають відомими, то 1, 2 коефіцієнти залежно від представлення моделі, можна розташувати лінійно щодо залежної змінної. Тому далі розглянемо, яким чином, використовуючи диференціальне рівняння, отримувати коефіцієнти моделей, нелінійних за параметрами.

---

[249] Для порівняння отримані розв'язки ДР виноски 244 з поліноміальними правими частинами порядків: нульового – $\hat{y} = \exp(-4{,}275662\cdot x)(-0{,}8953477\cdot\cos(4{,}679162\cdot x) - 1{,}145555\cdot \cdot\sin(4{,}679162\cdot x)) + 0{,}928423$; першого – $\hat{y} = \exp(-1{,}915429\cdot x)(-0{,}3095\cdot\cos(7{,}574465\cdot x) - -0{,}3140919\cdot \sin(7{,}574465\cdot x)) + (0{,}3686669 + 0{,}7217003\cdot x)$; другого – $\hat{y} = \exp(-2{,}824472\cdot x) \times \times (5{,}957725\cdot 10^{-2}\cdot\cos(11{,}84159\cdot x) - 0{,}1933375\cdot\sin(11{,}84159\cdot x)) + (-3{,}810866\cdot 10^{-2} + 2{,}500993\cdot x - -1{,}480599\cdot x^2)$ мають відповідно $F$-відношення: 181,6801; 55,27481; 326,7964.

### 3.2.4.2 Використання диференціальних рівнянь для отримання коефіцієнтів моделі, нелінійної за параметрами

Моделі, наприклад, виду:

$$y = ax^b; \tag{3.227}$$

$$y = c\sin\left(ax^b\right) \tag{3.228}$$

є нелінійними[250] за невідомими коефіцієнтами, відносно, залежної змінної $y$. На відміну від (3.227), де коефіцієнти можна[251] знайти методом лінеаризації (3.2.2) в (3.228) такий підхід використати неможливо. Однак можна вийти з цього положення, якщо деякі коефіцієнти: $b$ в (3.227); $c$, $b$ в (3.228) визначити за диференціальним рівнянням, складеним для моделей (3.227), (3.228), а решта: $a$ в (3.227) і (3.228) за вже відомих, відповідно, $b$ і $c$, $b$ – довизначити за МНК для моделей (3.227), (3.228). Для розуміння наступного матеріалу, необхідно, вміти брати похідні від функції заданої явно і неявно.

Складемо диференціальне рівняння для моделі (3.227). З цією метою візьмемо першу і другу похідні:

$$y' = abx^{(b-1)}; \tag{3.229}$$

$$y'' = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)}. \tag{3.230}$$

Щоб прирівняти ці похідні, необхідно ліву і праву частини (3.229) і (3.230) помножити відповідно на ($b$ – 1) і $x$, тоді знаходимо:

$$y'\left(b-1\right) = abx^{(b-1)}\left(b-1\right) \qquad \text{і} \qquad y''x = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)}x. \tag{3.231}$$

Оскільки праві частини виразів (3.231) рівні, то і ліві частини також рівні, тому знаходимо:

$$y'\left(b-1\right) = y''x$$

чи в остаточному виді:

$$xy'' - \left(b-1\right)y' = 0. \tag{3.232}$$

Отже ми склали ДР для необхідного нам розв'язку (3.227). Визначаючи за (3.232) прямим методом за МНК коефіцієнт $b$, далі повторним використанням МНК для (3.227) знаходимо і коефіцієнт $a$.

На відміну від складання диференціального рівняння (3.232) для явно заданої функції (3.227) для (3.228) скласти ДР подібним чином неможна, оскільки, використати його на практиці не удається[252]. Тому часто для визначення потрібних коефіцієнтів необхідно складати диференціальне рівняння для функції, заданої неявно, наприклад, для (3.228) у виді:

---

[250] $b$ в (3.227); $a$, $b$ в (3.228).

[251] $\ln y = \ln a + b\ln x$, чи, наприклад, що робити, якщо в дійсності $a < 0$.

[252] Неможна скласти; коефіцієнти змішані між собою; невідомі коефіцієнти в ДР знову знаходяться під функціями *sin*, *cos*.

$$\frac{y}{c} = \sin\left(ax^b\right) \qquad \text{чи} \qquad \arcsin\left(\frac{y}{c}\right) = ax^b \tag{3.233}$$

і отримане диференціальне рівняння буде мати також розв'язок (3.228).

Складемо диференціальне рівняння для (3.233), для чого візьмемо першу похідну:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}}\frac{1}{c}y' = abx^{(b-1)} \tag{3.234}$$

Візьмемо похідну від (3.234) вона ж є другою похідною від (3.233), для чого перепишемо (3.234) у виді:

$$\frac{1}{c}\left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} y' = abx^{(b-1)},$$

тоді знаходимо:

$$-\frac{1}{2c}\left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right)\cdot 2yy'y' + \frac{1}{c}\left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} y'' = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)} \tag{3.235}$$

Спростимо (3.235):

$$\frac{1}{c^3}\frac{yy'^2}{\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)^3}} + \frac{1}{c}\frac{y''}{\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{c^2}\frac{yy'^2}{1-\frac{y^2}{c^2}} + y''\right) = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}}\left(\frac{yy'^2}{c^2-y^2} + y''\right) = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)} \tag{3.236}$$

Перепишемо (3.234) і (3.236) у вигляді:

$$y' = abx^{(b-1)}c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}; \tag{3.237}$$

$$\frac{yy'^2}{c^2-y^2} + y'' = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)}c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}. \tag{3.238}$$

Для того, щоб прирівняти (3.237) і (3.238) необхідно ліву і праву їх частини помножити відповідно на $(b-1)$ і $x$, тоді знаходимо:

$$y'(b-1) = abx^{(b-1)}c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}(b-1); \qquad \left(\frac{yy'^2}{c^2-y^2} + y''\right)x = ab\left(b-1\right)x^{(b-2)}c\sqrt{1-\frac{y^2}{c^2}}x. \tag{3.239}$$

Якщо праві частини виразів (3.239) рівні, то рівні також і їх ліві частини, тоді знаходимо:

$$y'(b-1) = \left(\frac{yy'^2}{c^2-y^2} + y''\right)x \tag{3.240}$$

Перетворимо (3.240):

$$\left(c^2-y^2\right)y'(b-1)-x\left(yy'^2+y''\left(c^2-y^2\right)\right)=0;\quad \left(y'(b-1)-xy''\right)\left(c^2-y^2\right)-xyy'^2=0;$$

$$(b-1)c^2y'-c^2xy''-(b-1)y'y^2+xy^2y''-xyy'^2=0,$$

чи остаточно:

$$(b-1)c^2y'-\underline{c^2xy''}-\underline{(b-1)y'y^2}+xy\left(yy''-y'^2\right)=0. \qquad (3.241)$$

Диференціальне рівняння (3.241) є зв'язком між швидкостями різних порядків функції у виді (3.233) чи (3.228). Отже визначаючи, відносно $xy\left(yy''-y'^2\right)$, прямим способом за МНК параметри (3.241), знаходимо при складових, підкреслених[253], необхідні коефіцієнти $c$ і $b$, а повторним застосуванням МНК до (3.233) і коефіцієнт $a$.

Наведемо диференціальні рівняння і алгоритм наступних дій, для деяких типових нелінійних моделей в таблиці 3.60.

Таблиця 3.60 – **Диференціальні рівняння для типових нелінійних моделей**

| № | Функція | Неявний вид | Диференціальне рівняння |
|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* |
| 1 | $y=a\ell^{bx}+c$[254] | – | $y''-by'=0$ |
| 2 | $y=ax^b+c$ | – | $xy''-(b-1)y'=0$ |
| 3 | $y=\dfrac{a\ell^{bx}}{c+d\ell^{ex}}$ | $\dfrac{a\ell^{bx}}{y}=c+d\ell^{ex}$ | $\left(b^2-be\right)y^2+(e-2b)yy'-\left(yy''-2y'^2\right)=0$ |
| 4 | $y=\dfrac{ax^b}{c+dx^e}$ | $\dfrac{ax^b}{y}=c+dx^e$ | $\left(b(b-1)-b(e-1)\right)y^2+\left((e-1)-2b\right)xyy'-x^2\left(yy''-2y'^2\right)=0$ |
| 5 | $y=a\ell^{bx^c}$ | $\ln\left(\dfrac{y}{a}\right)=bx^c\ln\ell$ | $(c-1)yy'-x\left(yy''-y'^2\right)=0$ |
| 6 | $y=a\ell^{\wedge}\left(b\ell^{cx^d}\right)$ | $\ln\dfrac{\ln y-\ln a}{b}=cx^d$ | $(d-1)yy'+\dfrac{xy'^2}{\ln y-\ln a}-x\left(yy''-y'^2\right)=0$[255] |
| 7 | $y=ax^b+cx^d$[256] | $\dfrac{y}{x^b}=a+cx^{d-b}$ | $x^2y''-(b+d-1)xy'+bdy=0$ |

---

[253] У складовій $(b-1)c^2y'$ коефіцієнти $c$ і $b$ змішані в знайденій константі $const\ y'$.

[254] Функція також є розв'язком ДР з ПК 1-го порядку (3.185): $a_0\dfrac{dy}{dx}+a_1y=const$ при $a_0\neq 0$.

[255] Після перетворень $(d-1)yy'\ln y-(d-1)\ln a yy'+\ln ax\left(yy''-y'^2\right)+x\left(y'^2-\ln y\left(yy''-y'^2\right)\right)=0$.

[256] Аналогічно для функції (3.189) можна отримати ДР (3.171). Для розв'язку $y=C_1\ell^{\alpha x}+C_2\ell^{\beta x}$ маємо $\dfrac{y}{\ell^{\alpha x}}=C_1+C_2\ell^{(\beta-\alpha)x}$; 1-ша похідна: $\dfrac{y'\ell^{\alpha x}-y\alpha\ell^{\alpha x}}{\left(\ell^{\alpha x}\right)^2}=C_2(\beta-\alpha)\ell^{(\beta-\alpha)x}\Rightarrow y'-\alpha y=C_2(\beta-\alpha)\ell^{\beta x}$ (1);

2-га похідна: $y''-\alpha y'=C_2(\beta-\alpha)\beta\ell^{\beta x}$(2). Щоб прирівняти (1) і (2) необхідно вираз (1) помножити на $\beta$, тоді маємо $y'\beta-\alpha\beta y=y''-\alpha y'\Rightarrow y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=0$.

Продовження таблиці 3.60

| № | Коефіцієнти знайдені за ДР | 2-й МНК | Примітка |
|---|---|---|---|
| *5* | *6* | *7* | *8* |
| 1 | $b$ | $y = a\ell^{bx} + c$ | – |
| 2 | $b$ | $y = ax^{b} + c$ | – |
| 3 | $b$, $e$ | $\frac{1}{y} = \frac{c}{a}\frac{1}{\ell^{bx}} + \frac{d}{a}\ell^{(e-b)x}$ | Коефіцієнти $a$, $c$, $d$ знаходяться оптимізацією нелінійної цільової функції з використанням (3.193) за провідним[257] коефіцієнтом $a$ з відомими відношеннями $c/a$; $d/a$ |
| 4 | $b$, $e$ | $\frac{1}{y} = \frac{c}{a}\frac{1}{x^{b}} + \frac{d}{a}x^{(e-b)}$ | те саме |
| *5* | *6* | *7* | *8* |
| 5 | $c$ | $\ln y = \ln a + bx^{c} \ln \ell$ | – |
| 6 | $a$, $d$ | $\ln\left(-\ln\frac{y}{a}\right) = \ln(-b) + cx^{d}$ | При $a = d = 1$, $b = c = -1$ функція (6) є частинною функцією бажаності (3.257);<br>^ – зведення в степінь |
| 7 | $b$, $d$ | $y = ax^{b} + cx^{d}$ | При розв’язку диференціального рівняння можна також визначити вільний член |

*Приклад* 3.20

Використовуючи диференціальне рівняння, описати нелінійною математичною моделлю $\hat{y} = \frac{a\ell^{bx}}{c + d\ell^{ex}}$ залежність зміни величини $y$ від $x$, наведених в таблиці 3.61.

Таблиця 3.61 – **Дані експерименту**

| $x$ | $y$ | 5 | 1,102 | 10,5 | 4,037 | 16 | 0,515 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,056 | 5,5 | 1,463 | 11 | 3,486 | 16,5 | 0,422 |
| 0,5 | 0,076 | 6 | 1,922 | 11,5 | 2,952 | 17 | 0,345 |
| 1 | 0,103 | 6,5 | 2,484 | 12 | 2,468 | 17,5 | 0,283 |
| 1,5 | 0,139 | 7 | 3,134 | 12,5 | 2,047 | 18 | 0,231 |
| 2 | 0,187 | 7,5 | 3,818 | 13 | 1,689 | 18,5 | 0,189 |
| 2,5 | 0,252 | 8 | 4,442 | 13,5 | 1,390 | 19 | 0,155 |
| 3 | 0,340 | 8,5 | 4,882 | 14 | 1,141 | 19,5 | 0,127 |
| 3,5 | 0,458 | 9 | 5,046 | 14,5 | 0,936 | 20 | 0,104 |
| 4 | 0,615 | 9,5 | 4,913 | 15 | 0,767 | | |
| 4,5 | 0,825 | 10 | 4,543 | 15,5 | 0,628 | | |

[257] Звели задачу знаходження мінімуму (3.193) за однією змінною, в даному випадку, $a$; вона веде нелінійну функцію з невідомими $a$, $c$, $d$ за критерієм (3.193) до мінімуму.

*Розв'язок*

*Знаходження коефіцієнтів $b$ і $e$* за диференціальним рівнянням. Використовуючи дані таблиці 3.60 (функція 3) і прямий спосіб за МНК у виді аналогічному (3.196), визначимо коефіцієнти диференціального рівняння

$$\left(b^2-be\right)y^2+\left(e-2b\right)yy'-\left(yy''-2y'^2\right)=0 \tag{3.242}$$

за експериментальними даними таблиці 3.61, для чого перепишемо його для поточної ($i$–1) точки у виді[258]:

$$y_{i-1}\frac{y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}}{h^2}-2\left(\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}\right)^2=const_1 y_{i-1}^2+const_2 y_{i-1}\frac{y_i-y_{i-2}}{2h} \tag{3.243}$$

де $const_1$, $const_2$ – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

На основі (3.243) вектор відомих функцій: $\tilde{f}^T(x)=\left\| y_{i-1}^2,\ y_{i-1}\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}\right\|$.

Враховуючи, що інтервал дискретизації $h$ = 0,5, за даними таблиці 3.61 складемо матрицю $F$ і вектор $Y$ (таблиця 3.62) для моделі (3.243).

Таблиця 3.62 – **Узагальнена матриця *F* і вектор *Y***

| $i$ | $x$ | $y$ | $F$: $f_1=y_{i-1}^2$ | $F$: $f_2=y_{i-1}\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}$ | $Y=y_{i-1}\frac{y_i-2y_{i-1}+y_{i-2}}{h^2}-2\left(\frac{y_i-y_{i-2}}{2h}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
| 1 | 0 | 0,056 | | | |
| 2 | 0,5 | 0,076 | | | |
| 3 | 1 | 0,103 | 0,005776 | 0,003572 | $-2{,}289998\cdot10^{-3}$ |
| 4 | 1,5 | 0,139 | 0,010609 | 0,006489 | $-4{,}230002\cdot10^{-3}$ |
| 5 | 2 | 0,187 | 0,019321 | 0,011676 | $-7{,}439997\cdot10^{-3}$ |
| 6 | 2,5 | 0,252 | 0,034969 | 0,021131 | $-1{,}282201\cdot10^{-2}$ |
| 7 | 3 | 0,340 | 0,063504 | 0,038556 | –0,023634 |
| 8 | 3,5 | 0,458 | 0,1156 | 0,07004 | –0,044072 |
| 9 | 4 | 0,615 | 0,209764 | 0,12595 | –0,079802 |
| 10 | 4,5 | 0,825 | 0,378225 | 0,225705 | –0,138998 |
| 11 | 5 | 1,102 | 0,680625 | 0,401775 | –0,2532378 |
| 12 | 5,5 | 1,463 | 1,214404 | 0,7030761 | –0,4438159 |
| 13 | 6 | 1,922 | 2,140369 | 1,19966 | –0,7713045 |
| 14 | 6,5 | 2,484 | 3,694084 | 1,962362 | –1,293018 |
| 15 | 7 | 3,134 | 6,170256 | 3,010608 | –2,063519 |
| 16 | 7,5 | 3,818 | 9,821957 | 4,180757 | –3,13289 |

258 (3.242) використано щодо складової $yy''-2y'^2$.

Продовження таблиці 3.62

| *1* | 2 | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 8 | 4,442 | 14,57712 | 4,993944 | –4,33805 |
| 18 | 8,5 | 4,882 | 19,73136 | 4,726287 | –5,5335 |
| 19 | 9 | 5,046 | 23,83392 | 2,948728 | –6,119361 |
| 20 | 9,5 | 4,913 | 25,46212 | 0,1564267 | –5,996569 |
| 21 | 10 | 4,543 | 24,13757 | –2,471238 | –5,163542 |
| 22 | 10,5 | 4,037 | 20,63885 | –3,979668 | –4,006147 |
| 23 | 11 | 3,486 | 16,29737 | –4,26711 | –2,96116 |
| 24 | 11,5 | 2,952 | 12,1522 | –3,782311 | –2,117407 |
| 25 | 12 | 2,468 | 8,714303 | –3,005136 | –1,482246 |
| 26 | 12,5 | 2,047 | 6,091023 | –2,23354 | –1,016114 |
| 27 | 13 | 1,689 | 4,190209 | –1,594613 | –0,6978362 |
| 28 | 13,5 | 1,390 | 2,852721 | –1,109673 | –0,4646946 |
| 29 | 14 | 1,141 | 1,9321 | –0,7617199 | –0,3226075 |
| 30 | 14,5 | 0,936 | 1,301881 | –0,518014 | –0,2114164 |
| 31 | 15 | 0,767 | 0,876096 | –0,350064 | –0,144968 |
| 32 | 15,5 | 0,628 | 0,588289 | –0,236236 | $-9{,}768805\cdot10^{-2}$ |
| 33 | 16 | 0,515 | 0,394384 | –0,158256 | $-6{,}169613\cdot10^{-2}$ |
| 34 | 16,5 | 0,422 | 0,265225 | –0,10609 | $-4{,}367194\cdot10^{-2}$ |
| 35 | 17 | 0,345 | 0,178084 | $-7{,}173999\cdot10^{-2}$ | $-3{,}079199\cdot10^{-2}$ |
| 36 | 17,5 | 0,283 | 0,119025 | –0,047955 | $-1{,}794202\cdot10^{-2}$ |
| 37 | 18 | 0,231 | 0,080089 | –0,032262 | $-1{,}467197\cdot10^{-2}$ |
| 38 | 18,5 | 0,189 | 0,053361 | –0,021714 | $-8{,}432007\cdot10^{-3}$ |
| 39 | 19 | 0,155 | 0,035721 | –0,014364 | $-5{,}503989\cdot10^{-3}$ |
| 40 | 19,5 | 0,127 | 0,024025 | $-9{,}609999\cdot10^{-3}$ | $-3{,}967999\cdot10^{-3}$ |
| 41 | 20 | 0,104 | 0,016129 | –0,006477 | $-2{,}662002\cdot10^{-3}$ |
| | | | $const_1$ | $const_2$ | |

На основі матриць $F$ і $Y$ складемо систему в матричному виді (3.116) для визначення невідомих коефіцієнтів (3.243) і розв’яжемо її за (3.118):

$$\begin{Vmatrix} 3540,533 & 1,386606 \\ 1,386606 & 161,8839 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} const_1 \\ const_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -827,4641726 \\ -31,8844083 \end{Vmatrix};$$

$$D = \begin{Vmatrix} 2,824443\cdot10^{-4} & -2,419258\cdot10^{-6} \\ -2,419258\cdot10^{-6} & 6,177287\cdot10^{-3} \end{Vmatrix},$$

тоді знаходимо: $const_1$ = –0,2336354; $const_2$ = –0,1949573 і диференціальне рівняння (3.242) набуває вигляду[259]:

$$-0,2336354y^2-0,1949573\,yy'-\left(yy''-2y'^2\right)=0. \qquad (3.244)$$

Порівнюючи (3.242) і (3.244) складемо систему для визначення коефіцієнтів $b$ і $e$ вихідної нелінійної моделі в загальному виді:

$$\begin{cases} b^2-be=const_1 \\ e-2b=const_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=const_2+2b \\ -b^2-bconst_2-const_1=0 \end{cases} \qquad (3.245)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у (3.245), знаходимо:

$$\begin{cases} b^2-be=-0,2336354 \\ e-2b=-0,1949573 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^2+0,1949573b+0,2336354=0 \\ e=-0,1949573+2b \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b_{1,2}=-0,3956111;\,0,5905684 \\ e_{1,2}=-0,9861795;\,0,9861794. \end{cases} \qquad (3.246)$$

Оскільки є два альтернативних розв’язки, візьмемо будь-яку пару з них, наприклад, другу, тоді коефіцієнти: $b$ = 0,5905684; $e$ = 0,9861794 і шукана нелінійна модель набуде виду[260]:

$$\hat{y}=\frac{a\ell^{0,5905684x}}{c+d\ell^{0,9861794x}}. \qquad (3.247)$$

*Знаходження відношення коефіцієнтів c/a, d/a* за моделлю (3.247). Для цього використаємо модель 3 (таблиця 3.60) і друге застосування МНК до експериментальних даних (таблиця 3.61). В нашому випадку модель[261] набуває виду:

$$\frac{1}{y}=\frac{c}{a}\ell^{-0,5905684x}+\frac{d}{a}\ell^{(0,9861794-0,5905684)x}. \qquad (3.248)$$

На основі (3.248) вектор відомих функцій: $\tilde{f}^T(x)=\left\|\ell^{-0,5905684x},\ \ell^{0,395611x}\right\|$ і узагальнена матриця $F$ та вектор $Y$ наведені в таблиці 3.63.

На основі матриць $F$ і $Y$, складемо систему для визначення відношень $c/a$ і $d/a$ в матричному виді (3.116) і розв’яжемо її за (3.118):

---

[259] $F$-відношення (3.121) моделі (3.243) зі знайденими коефіцієнтами $const_1$ = –0,2336354; $const_2$ = –0,1949573 експериментальним даним (таблиця 3.62) для $n$ = 39 і $l$ = 2 складає 9260,615 (розраховується аналогічно (3.214), але відносно складової $yy''-2y'^2$), що свідчить про високу прогнозну здатність цього ДР і правильний вибір одного з варіантів моделі.

[260] Функція (3.247) є розв’язком диференціального рівняння (3.244).

[261] Необхідно виразити $1/y$ з (3.247).

$$\begin{Vmatrix} 2{,}242214 & 10{,}5689 \\ 10{,}5689 & 2{,}281791\cdot 10^{7} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} c/a \\ d/a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 39{,}67447779 \\ 80213{,}58067 \end{Vmatrix};$$

$$D = \begin{Vmatrix} 0{,}4459887 & -2{,}068142\cdot 10^{-7} \\ -2{,}065751\cdot 10^{-7} & 4{,}382532\cdot 10^{-8} \end{Vmatrix},$$

тоді знаходимо відношення коефіцієнтів:

$$c/a = 17{,}6778; \quad d/a = 3{,}50719\cdot 10^{-3} \qquad (3.249)$$

і модель (3.248) набуває виду[262]:

$$\frac{1}{y} = 17{,}6778\ell^{-0{,}5905684x} + 3{,}50719\cdot 10^{-3}\,\ell^{(0{,}9861794-0{,}5905684)x}\,{}^{263}.$$

Можна користуватися знайденою моделлю для прогнозу, але приведемо її до виду (3.247).

Таблиця 3.63 – **Узагальнена видом моделі (3.248) матриця *F* і вектор спостережень *Y***

| $x$ | $y$ | $F$ | | $Y = 1/y$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $f_1 = \ell^{-0{,}5905684x}$ | $f_2 = \ell^{0{,}395611x}$ | |
| 0 | 0,056 | 1 | 1 | 17,85714 |
| 0,5 | 0,076 | 0,74432 | 1,218725 | 13,1579 |
| 1 | 0,103 | 0,5540123 | 1,485291 | 9,708738 |
| 1,5 | 0,139 | 0,4123624 | 1,810162 | 7,194245 |
| 2 | 0,187 | 0,3069296 | 2,206091 | 5,347593 |
| 2,5 | 0,252 | 0,2284538 | 2,688618 | 3,968254 |
| 3 | 0,340 | 0,1700428 | 3,276687 | 2,941176 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 20 | 0,104 | $7{,}419722\cdot 10^{-6}$ | 2730,445 | 9,615384 |
| | | $c/a$ | $d/a$ | |

262 З $F$-відношенням (3.121) рівним 6502,674. Оскільки це проміжна модель, то припустимо що на даний момент невідомі тільки $l = 2$ коефіцієнта і $n = 41$ кількість дослідів

263 Для функції $z = 1/y$ дані таблиці 3.61 з використанням прямого методу за МНК (3.196) описуються ОДР з постійними коефіцієнтами 2-го порядку виляду $z'' + 0{,}2121162z' - 0{,}2460243z = 0$ з $F$-відношенням 433,8514 і граничними умовами $z|_{x=0} = 17{,}927507$; $z|_{x=20} = 9{,}632624$ має розв′язок $z = 3{,}157101\cdot 10^{-3}\,\ell^{0{,}4011624x} + 17{,}92435\ell^{-0{,}6132786x}$ з $F$-відношенням 10981,71 при $n = 41$; $l = 4$; чи остаточно $y = \dfrac{1}{3{,}157101\cdot 10^{-3}\,\ell^{0{,}4011624x} + 17{,}92435\ell^{-0{,}6132786x}}$ з $F$-відношенням 191,7299

*Знаходження коефіцієнтів a, c, d* моделі (3.247) за провідним коефіцієнтом $a$ методом сканування (розділ 3.3). Оскільки стали відомими відношення коефіцієнтів (3.249), то задачу знаходження коефіцієнтів моделі (3.247) зведемо до задачі пошуку оптимуму провідного коефіцієнта $a$ за критерієм МНК (3.193).

З (3.249) знаходимо, $c = 17{,}6778a$; $d = 3{,}50719\cdot10^{-3}a$ і підставляючи їх у (3.247) отримаємо модель, яка залежить від $a$ у виді:

$$\hat{y} = \frac{a\ell^{0{,}5905684x}}{17{,}6778\,a + \left(3{,}50719\cdot10^{-3}\,a\right)\ell^{0{,}9861794x}} \qquad (3.250)$$

Тоді критерій оптимізації (3.193) набуває виду:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{a\ell^{0{,}5905684x_i}}{17{,}6778\,a + \left(3{,}50719\cdot10^{-3}\,a\right)\ell^{0{,}9861794x_i}}\right)^2 \to \min, \qquad (3.251)$$

де $x_i$, $y_i$ – експериментальні дані (таблиця 3.61); $n$ – кількість дослідів.

Використовуючи метод сканування[264] провідного коефіцієнта $a$ в межах[265] 1–5 з точністю пошуку 0,0001 функції (3.251) знаходимо: $a$ = 1,129922 і функція (3.251) рівна 0,5701829. Тоді з (3.249) знаходимо: $c = 17{,}6778 \cdot 1{,}129922 = = 19{,}9745351$; $d = 3{,}50719\cdot10^{-3} \cdot 1{,}129922 = 3{,}9628511\cdot10^{-3}$. Після підстановки у (3.247) модель набуває виду:

$$\hat{y} = \frac{1{,}129922\;\ell^{0{,}5905684x}}{19{,}9745351 + 3{,}9628511\cdot10^{-3}\,\ell^{0{,}9861794x}}. \qquad (3.252)$$

*Оцінимо адекватність* моделі (3.252) експериментальним даним таблиці 3.61 за $F$-відношенням, для чого складемо таблицю 3.64.

Враховуючи, що $n$ = 41, $l$ = 5, використовуючи формулу (3.121) і дані[266] таблиці 3.64, знаходимо:

$$\bar{y} = \frac{64{,}711}{41} = 1{,}5783137;$$

$$s_{зал}^2 = \frac{0{,}57018763}{41-5} = 0{,}0158385; \quad s_{y-\bar{y}}^2 = \frac{106{,}9739945}{41-1} = 2{,}67434986.$$

---

[264] Змінюємо значення провідного коефіцієнта $a$ в межах 1-5 з кроком 0,0001 і для кожного його значення розраховуємо функцію (3.251). Серед всіх значень функції (3.251) знаходимо найменше, а значення $a$, яке їй відповідає – оптимальне.

[265] Вибираються методом проб і помилок, ідеальний варіант просканувати проміжок (–∞; +∞), але цього не потрібно.

[266] Розрахунки колонок: $\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$ – сума 0,57018763, $\left(y_i - \bar{y}\right)^2$ – сума 106,9739945 не наводяться, оскільки вони виконуються подібно таблиці 3.52.

Тоді $F$-відношення моделі (3.252):

$$F_p = \frac{2{,}67434986}{0{,}0158385} = 168{,}85073. \quad (3.253)$$

Таблиця 3.64 – **Адекватність моделі (3.252) експериментальним даним**

| $i$ | $y_i$ | $\hat{y}_i$ | 11 | 1,102 | 1,055 | 22 | 4,037 | 3,858 | 33 | 0,515 | 0,508 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,056 | 0,057 | 12 | 1,463 | 1,393 | 23 | 3,486 | 3,346 | 34 | 0,422 | 0,417 |
| 2 | 0,076 | 0,076 | 13 | 1,922 | 1,822 | 24 | 2,952 | 2,844 | 35 | 0,345 | 0,342 |
| 3 | 0,103 | 0,102 | 14 | 2,484 | 2,346 | 25 | 2,468 | 2,386 | 36 | 0,283 | 0,281 |
| 4 | 0,139 | 0,137 | 15 | 3,134 | 2,949 | 26 | 2,047 | 1,985 | 37 | 0,231 | 0,230 |
| 5 | 0,187 | 0,184 | 16 | 3,818 | 3,585 | 27 | 1,689 | 1,643 | 38 | 0,189 | 0,189 |
| 6 | 0,252 | 0,247 | 17 | 4,442 | 4,167 | 28 | 1,390 | 1,355 | 39 | 0,155 | 0,155 |
| 7 | 0,340 | 0,331 | 18 | 4,882 | 4,587 | 29 | 1,141 | 1,116 | 40 | 0,127 | 0,127 |
| 8 | 0,458 | 0,444 | 19 | 5,046 | 4,755 | 30 | 0,936 | 0,917 | 41 | 0,104 | 0,104 |
| 9 | 0,615 | 0,594 | 20 | 4,913 | 4,650 | 31 | 0,767 | 0,753 | | | |
| 10 | 0,825 | 0,793 | 21 | 4,543 | 4,321 | 32 | 0,628 | 0,619 | | | |

Отже нелінійна модель (3.252) задовільно прогнозує експериментальні дані, як видно зі значення критерію Фішера (3.253), таблиці 3.64 і рисунка 3.16. Подібну точність прогнозу можна досягнути тільки поліномом 10 порядку з $F$-відношенням 156,926036. Необхідно відмітити, що побудова подібної моделі сильно залежить від точності знаходження коефіцієнтів $b$ і $e$.

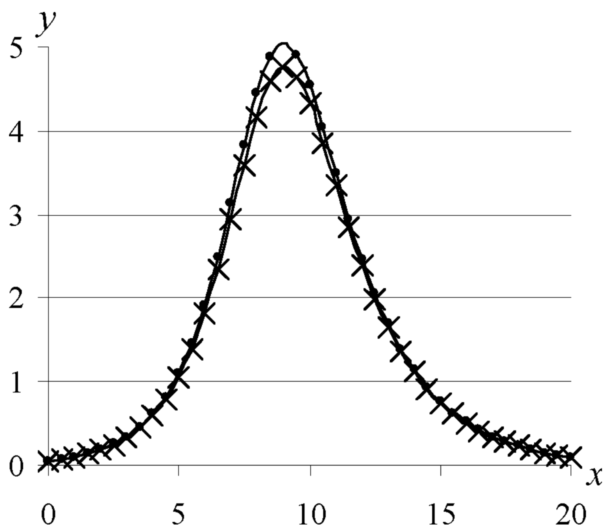


Рисунок 3.16 – **Адекватність моделі (3.252)**: експеримент (•), прогноз (×)

Таким чином, було використано нелінійне співвідношення між швидкостями порядків 1 і 2 функції (3.247) у виді диференціального рівняння (3.244) для знаходження коефіцієнтів нелінійної моделі (3.252). Точність знаходження коефіцієнтів залежить від інтервалу дискретизації $\Delta x$ і правильного вибору виду моделі.

Матеріал пункту 3.2.4 дозволяє знаходити коефіцієнти багатьох нелінійних диференціальних рівнянь, лінійних за невідомими параметрами з використанням прямого способу знаходження коефіцієнтів за МНК аналогом (3.196), причому, без розв’язку диференціального рівняння судити за $F$-

відношенням (3.121) прогнозу його різницевого аналога про точність прогнозу його неперервного аналога і таким чином підбирати відповідне диференціальне рівняння.

На практиці для опису динаміки процесу чи явища, зазвичай, зручно застосовувати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами, оскільки є надійна теоретична основа їх розв’язку, причому видозмінюючи їх праві частини можна добитися потрібного прогнозу. Звичайно недоліком такого підходу є мета не тільки отримати відповідне аналітичне диференціальне рівняння динаміки, але й розв’язати його. Також стало відомо, як для потрібної функції складати співвідношення між її швидкостями різних порядків у виді диференціального рівняння з метою визначення за останнім, деяких необхідних коефіцієнтів нелінійної за параметрами функції (розв’язок). Цей матеріал наведено з метою більш глибокого погляду на моделювання, причому динаміки, оскільки зв’язки між швидкостями зміни функції є складнішими, ніж її залежність від факторів.

На практиці складання динамічних моделей ускладнюється імовірним розумінням похідної, оскільки фізично похідна – це швидкість зміни функції при $\Delta x \to 0$, а значить виходячи з цього визначення необхідно нескінченно велика кількість дослідів за зміною функції $y$ від фактора $x$ з мінімальним інтервалом дискретизації $\Delta x$, що звичайно не можливо. А точної формули передбачення похідної невідомої функції через кінцеві різниці для будь-якого інтервалу дискретизації не існує[267] за визначенням похідної. Чим більше частота реєстрації даних, тим точніше в остаточному підсумку буде динамічна модель.

---

[267] Формули (3.179), (3.180) моделі (3.196) отримуються наступним чином: є три точки $x_1$, $x_2$, $x_3$ і відомі, відповідно, функції $y_1, y_2, y_3$, які не лежать на одній прямій. Необхідно аналітично знайти коефіцієнти функції $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ (1) і взяти від неї похідні. Для цього складемо систему (3.55) у вигляді:

$$\begin{cases} b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 = y_1 \\ b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2 = y_2 \,(2) \\ b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 = y_3 \end{cases} \text{, визначник } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(x_3 - x_2)x_1^2 + (x_1 - x_3)x_2^2 + (x_2 - x_1)x_3^2 = \\ &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб формули для похідних (3.179), (3.180) не залежали від значень факторів для відомої поточної точки, наприклад $(i-1)$, підставимо в (2) замість дійсних значень $x_i$ ($i = 1, 2, 3$) змінної $x$ їх кодовані (відносні) значення, відповідно $-h$, 0, $+h$ :

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -h & h^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} \right\| \Rightarrow b_0 = y_2; b_1 = \frac{y_3 - y_1}{2h}; b_2 = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2h^2}. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (1) знаходимо першу і другу похідні:

$$y = y_2 + \frac{y_3 - y_1}{2h}x + \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2h^2}x^2;\ y' = \frac{y_3 - y_1}{2h} + \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2}x;\ y'' = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2}. \quad (4)$$

Тоді для поточної ($i$ – 1), яка в кодованому вигляді наведена $x$ = 0, з використанням (4) і відповідною заміною $y_3$, $y_2$, $y_1$ на значення $y_i$, $y_{i-1}$, $y_{i-2}$ отримуємо (3.179), (3.180).

Щоб не розв′язувати аналог системи (2) формули для похідних більш високого порядку зручніше виводити за допомогою многочлена Лагранжа (виноска 71). Розв′язок системи (2) можна замінити зведенням подібних доданків функції:

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3;$$

$$y' = \frac{(x - x_2) + (x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_1) + (x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_1) + (x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3;$$

$$y'' = \frac{1 + 1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{1 + 1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{1 + 1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3.$$

Тоді для точок (–$h$; $y_1$), (0; $y_2$), ($h$; $y_3$) дійсних значень $x_i$ ($i$ = 1, 2, 3) і значення $x$ = 0 поточної ($i$ – 1) точки маємо:

$$y' = \frac{x + (x - h)}{-h(-2h)}y_1 + \frac{(x + h) + (x - h)}{h(-h)}y_2 + \frac{(x + h) + x}{2h \cdot h}y_3\bigg|_{x=0} \Rightarrow \frac{y_3 - y_1}{2h};$$

$$y'' = \frac{2}{-h(-2h)}y_1 + \frac{2}{h(-h)}y_2 + \frac{2}{2h \cdot h}y_3\bigg|_{x=0} \Rightarrow \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2}.$$

Якщо поліном другого порядку (1) замінити поліномом третього порядку $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ і побудувати поліном Лагранжа за 4 точками в кодованих значеннях $x_1 = -h,\ x_2 = 0,\ x_3 = h,\ x_4 = 2h$, то для поточної ($i$ – 2) точки можна отримати:

$$y' = \frac{-y_i + 3y_{i-1} - 3y_{i-2} - 2y_{i-3}}{6h};\ y'' = \frac{y_{i-1} - 2y_{i-2} + y_{i-3}}{h^2};\ y''' = \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{h^3}. \quad (5)$$

Якщо поліном другого порядку замінити поліномом четвертого порядку $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$ і побудувати поліном Лагранжа за 5 точками в кодованих значеннях $x_1 = -2h, x_2 = -h, x_3 = 0, x_4 = h, x_5 = 2h$, то для поточної ($i$ – 2) точки можна отримати:

$$y' = \frac{-y_i + 8y_{i-1} - 8y_{i-3} + y_{i-4}}{12h};\quad y'' = \frac{-y_i + 16y_{i-1} - 30y_{i-2} + 16y_{i-3} - y_{i-4}}{12h^2};$$

$$y''' = \frac{y_i - 2y_{i-1} + 2y_{i-3} - y_{i-4}}{2h^3};\quad y^{(4)} = \frac{y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} + y_{i-4}}{h^4}. \quad (6)$$

Формули (5), (6) для похідних першого і другого порядку повинні бути точнішими щодо формул (3.179), (3.180), однак автором не перевірялось. З формул видно також, чим складніше функція, тим більше сусідніх $y_{i-j}$ ($j$ = 0, 1, 2, …) впливає на значення похідних $y', y''$ в поточній ($i$–2)-точці.

Користуючись формулами (6):

– для прикладу 3.18 отримуємо аналог ОДР (3.202), що має вигляд $y'' + 0,4282667y' + 0,14280532y = 0$ з граничними умовами $y|_{t=0} = 0,9988431$,

## 3.3. Оптимізація функції

При зміні значення незалежної змінної $x$ на відрізку $[a;\ b]$ будь-яка функція $y = f(x)$ може набувати свого найменшого $y_{min}$ або найбільшого $y_{max}$ значення[268] при відвідних значеннях $x$ – $x_{min}$, $x_{max}$ (рисунок 3.11). Як видно з рисунка 3.11, досліджувана функція може мати інші максимальні й мінімальні значення, які відносяться до локальних, оскільки розташовуються нижче чи вище оптимальних. Пошук значень $x_{min}$ чи $x_{max}$

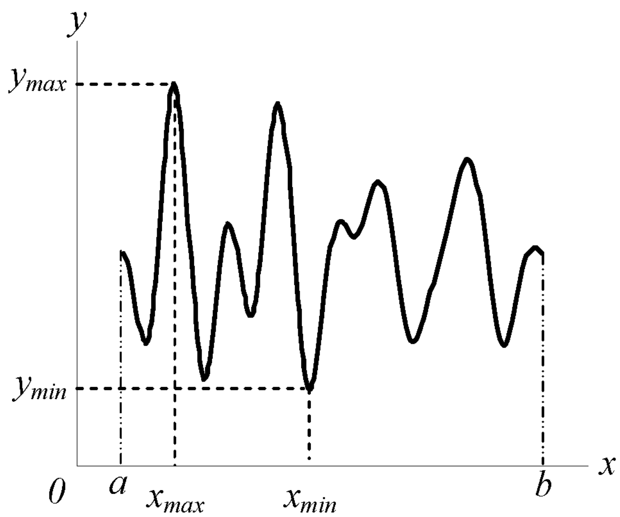


Рисунок 3.11 – **Функція, що оптимізується**

---

$y\big|_{t=50} = -5,996039\cdot 10^{-5}$ і характеризується $F$-відношенням $1,066361\cdot10^{7}$ (раніше отримано 3120,184627);

– для прикладу 3.19 отримуємо аналог НДР з ПК (3.213) $y'' + 13,17702y' + 197,3771y = -8,733382 + 717,6897x - 861,3669x^2 + 352,5728x^3$ і граничними умовами $y\big|_{x=0} = 0,0165799$, $y\big|_{x=1} = 0,9995781$ має $F$-відношення (3.226) 10495,35;

– для прикладу 3.20 аналог ДР (3.244) має вигляд $-0,2396718\, y^2 - 0,1995731\, yy' - \left(yy'' - 2y'^2\right) = 0$ з $F$-відношенням 28949,75 і розв′язок (3.252) $\hat{y} = \dfrac{4,93538\ell^{0,5994155x}}{87,7322032484 + 0,01597521307288\ell^{0,999258x}}$ з $F$-відношенням (3.253) 29260,86.

Формули заміни похідних, аналогічні (3.179), (3.180) для нерівновіддалених значень аргументу отримаємо, якщо знайти аналітично коефіцієнти (3) моделі (1) для кодованих значень аргументу: $-h\delta_-$, 0, $+h\delta_+$ і відповідних їм значень функції $y_1$, $y_2$, $y_3$, де $\delta_- = \dfrac{x_2 - x_1}{h}$, $\delta_+ = \dfrac{x_3 - x_2}{h}$ – поточні константи для трьох точок, що розглядаються, в натуральних значеннях $x_1$, $x_2$, $x_3$; $h$ – базовий крок. Тоді складаючи систему аналогічну (3), знаходимо:

$$b_0 = y_2,\ b_1 = \frac{y_3\delta_-^2 - y_1\delta_+^2 + y_2\left(\delta_+^2 - \delta_-^2\right)}{h\left(\delta_-\delta_+\left[\delta_- + \delta_+\right]\right)},\ b_2 = \frac{y_1\delta_+ - y_2\left(\delta_- + \delta_+\right) + y_3\delta_-}{h^2\left(\delta_-\delta_+\left[\delta_- + \delta_+\right]\right)}. \qquad (7)$$

Підставляючи (7) в (1) і знаходячи похідні, після претворень, аналогічних (4), при $x = 0$, і відповідною заміною $y_3$, $y_2$, $y_1$ на $y_i$, $y_{i-1}$, $y_{i-2}$, для поточної ($i$-1) точки, знаходимо:

$$y' = \frac{y_i\delta_-^2 + y_{i-1}\left(\delta_+^2 - \delta_-^2\right) - y_{i-2}\delta_+^2}{h\left(\delta_-\delta_+\left[\delta_- + \delta_+\right]\right)},\ y'' = 2\frac{y_i\delta_- - y_{i-1}\left(\delta_- + \delta_+\right) + y_{i-2}\delta_+}{h^2\left(\delta_-\delta_+\left[\delta_- + \delta_+\right]\right)}, \qquad (8)$$

де $\delta_- = \dfrac{x_{i-1} - x_{i-2}}{h}$, $\delta_+ = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h}$, $h$ – базовий крок, наприклад, $h = x_2 - x_1$

[268] За винятком $y = const$.

незалежної змінної $x$ за яких функція $y = f(x)$ досягає свого найбільшого чи найменшого значення називається задачею *пошуку екстремуму функції* чи *оптимізації*. Для розв'язку задачі оптимізації використовується ряд методів, наприклад, Ньютона, Гауса-Зейделя, Хука-Дживса, комплексний метод Бокса, найшвидшого спуску, тощо, але всі вони не дозволяють для будь-якої функції $y = f(x)$ знайти глобальний[269] екстремум.

### 3.3.1 Оптимізація лінійної функції

Відповідно до лінійної і нелінійної функції задачу оптимізації називають *лінійним*[270] і *нелінійним програмуванням*. Задачею лінійного програмування є пошук екстремуму функції

$$y = \sum_{i=1}^{k} b_i x_i \Rightarrow min \text{ чи } max, \tag{3.254}$$

за виконання системи лінійних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \le c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \le c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k \le c_m \end{cases} \quad x_i \ge 0, \tag{3.255}$$

де функція $y$ має назву цільової функції, $b_i$ – коефіцієнти цієї функції, $x_i$ – незалежні змінні, $k$ – кількість незалежних змінних, $a_{ij}$ – коефіцієнти рівнянь обмежень, $c_j$ – праві частини рівнянь обмежень, $m$ – кількість обмежень.

Розглянемо на прикладах два методи розв'язку задачі лінійного програмування:

– графічний (мета – ознайомлення з фізичною суттю задачі пошуку оптимуму), коли кількість незалежних змінних $k = 2$;

– чисельний за допомогою середовища MS Excel (метод Ньютона) для будь-якого випадку, в тому числі й для нелінійної функції.

*Приклад* 3.21

Знайти максимум та мінімум цільової функції графічним методом за умов:

---

[269] До нього відносять екстремум, що знаходиться в проміжку (–∞; +∞).

[270] Задачі цього типу знайшли застосування у таких напрямках: планування промислового виробництва; планування робочого часу робітників; розподіл транспортних вантажопотоків; рішення кадрових питань тощо.

$$y = -5x_1 - 2x_2 + 10, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

*Розв′язок*

Знайдемо точки, за якими побудуємо прямі, що обмежують ділянку допустимих розв′язків:

$l_1: x_1 + x_2 = 2$ $\quad$ $l_2: 4x_1 + 3x_2 = 24$ $\quad$ $l_3: x_1 - 2x_2 = 2$ $\quad$ $l_4: -2x_1 + 3x_2 = 6$

$\boxed{x_1 = 0;}\, x_2 = 2;$ $\quad$ $\boxed{x_1 = 0;}\, x_2 = 8;$ $\quad$ $\boxed{x_1 = 0;}\, x_2 = -1;$ $\quad$ $\boxed{x_1 = 0;}\, x_2 = 2;$

$x_1 = 2;\, \boxed{x_2 = 0.}$ $\quad$ $x_1 = 6;\, \boxed{x_2 = 0.}$ $\quad$ $x_1 = 2;\, \boxed{x_2 = 0.}$ $\quad$ $x_1 = -3;\, \boxed{x_2 = 0.}$

Побудуємо прямі $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ за знайденими точками ($x_1$; $x_2$) для того, щоб визначитися з ділянкою припустимих розв′язків – багатокутник, у вершинах якого будемо шукати мінімум і максимум цільової функції.

Зобразимо графічно цільову функцію $y$ прямою $L$: $0 = -5x_1 - 2x_2 + 10$, узяли $y = 0$, для зручності обчислень, тоді отримаємо:

$$-10 = -5x_1 - 2x_2 \Rightarrow \begin{matrix} \boxed{x_1 = 0;}\, x_2 = 5 \\ x_1 = 2;\, \boxed{x_2 = 0} \end{matrix}$$

Графічне зображення цільової функції та області, заданої обмеженнями, подано на рисунку 3.18.

Визначимося з ділянкою, в котрій ми будемо шукати оптимуми (мінімум і максимум) цільової функції $y = -5x_1 - 2x_2 + 10$, які задовольняють заданим умовам. Оскільки пряма $L$ не є паралельною[271] будь-якій із прямих $l_1$, $l_2$, $l_3$ та $l_4$, то оптимум може знаходитись тільки у вершинах $ABCD$

[271] У випадку паралельності прямої $L$ любій із прямих $l_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4) є три можливості, тобто ділянка припустимих значень цільової функції, задовольняючих умовам-нерівностям, може лежати: 1) всередині опуклого багатокутника $ABCD$: перевірочна точка $E$(2; 2) – *min* (*max*) може досягатися в будь-якій точці тієї сторони багатокутника, якій паралельна пряма $L$; 2) в I квадранті, але за межами ділянки багатокутника $ABCD$, так наприклад, якби пряма $L$ цільової функції $y$ була паралельна прямій $l_2$, то оптимум міг би розташовуватися між прямими $l_3$ і $l_4$ вище відрізку $CD$: перевірочна точка $I$ (6; 4) – *max*(*min*) є ∞; 3) цільова функція не має допустимої ділянки, заданої прямими $l_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4). Для знаходження ділянки припустимих розв′язків слід підставити координати точок $E$ та $I$ в обмеження, і там де вони виконуються буде ділянка припустимих розв′язків.

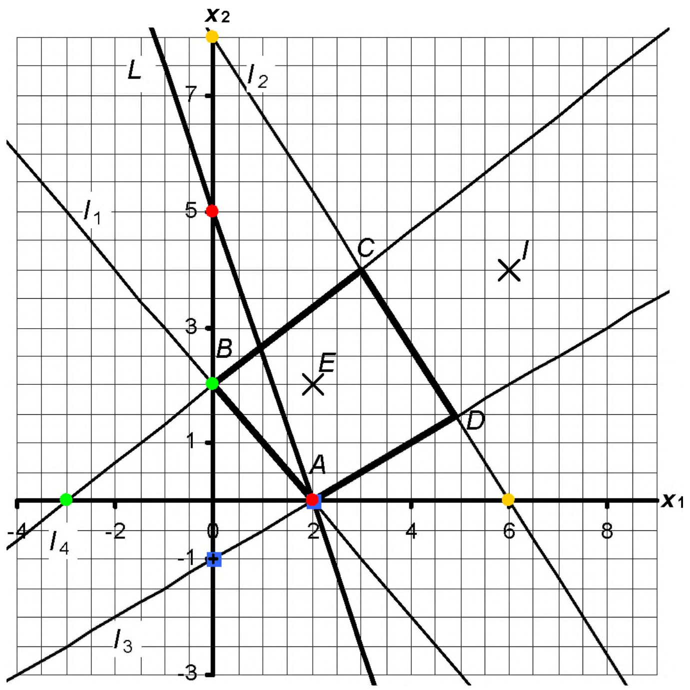



Рисунок 3.18 – **Розв'язок задачі лінійного програмування графічним способом**

опуклого багатокутника. Якщо уявити, що пряма $L$ рухається від початку координат зліва на право паралельно самій собі, то побачимо, що самою першою вона перетне вершину $B$, а самою останньою – вершину $D$. Отже, в цих двох вершинах функція $y = f(x_1, x_2)$ і буде набувати свої екстремальні значення. Дізнаємося про це більш детально. Спочатку перевіримо, чи дійсно припустимі значення цільової функції розташовані всередині опуклого багатокутника $ABCD$, а може[272] зовні:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \quad E(2;2) \to \begin{cases} 4 > 2 \\ 14 < 24 \\ -2 < 2 \\ 2 < 6 \end{cases}; \quad I(6;4) \to \begin{cases} 10 > 2 \\ 36 > 24 \\ -2 < 2 \\ 0 < 6 \end{cases}.$$

Ділянку[273] припустимих розв′язків графічно представлено опуклим багатокутником $ABCD$ і їй належить також точка $E(2;2)$.

Отже, оскільки пряма $L$ не паралельна ні якій із сторін багатокутника $ABCD$, то оптимуми (*min* і *max*) будуть знаходитись у якихось із двох його вершин. А щоб з′ясувати саме в яких, слід, як зазначалося вище, рухати графік цільової функції (пряму $L$) паралельно самій собі зліва на право у першому квадранті. Тоді сама перша $B$ і остання $D$ вершини прямокутника, які перетне пряма $L$, і будуть екстремальними. Щоб з′ясувати який саме вид екстремуму цільової функції $y = f(x_1, x_2)$ спостерігається у вершинах $B$ і $D$ слід знайти

[272] У випадку не паралельності прямої цільової функції $L$ прямим $l_i$ ($i$ = 1, 2, 3, 4) (наш випадок), цю перевірку можна не робити, оскільки кінцевий розв′язок будь-якої задачі лінійного програмування розташовується в якійсь із вершин опуклого багатокутника, або на його сторонах, якщо цільова функція паралельна якійсь із сторін багатокутника.

[273] В будь-якій точці цієї ділянки значення цільової функції задовольняють накладеним обмеженням у виді аналітичних нерівностей.

координати цих вершин, підставити їх в цільову функцію $y=-5x_1-2x_2+10$ і порівняти між собою. Одна з двох точок, в якій цільова функція набуває більшого значення, буде точкою максимуму, а меншого значення – мінімуму, якщо ж значення функції у цих точках буде однакове, то в них буде спостерігатися таке явище як мінімакс, тобто в них одночасно цільова функція буде набувати свого мінімального і максимального значення.

Знайдемо координати вершин $B$ (перетин прямих $l_1$ та $l_4$) і $D$ (перетин прямих $l_2$ та $l_3$) для чого складемо дві системи рівнянь:

– координати вершини $B$:

$$\begin{cases} l_1 \\ l_4 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ -2x_1+3x_2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases};$$

– координати вершини $D$:

$$\begin{cases} l_2 \\ l_3 \end{cases} \to \begin{cases} 4x_1+3x_2=24 \\ x_1-2x_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4{,}909091 \\ x_2=1{,}454545. \end{cases}$$

Знайдемо значення цільової функції $y$ у вершинах $B$ та $D$:

$$y_B=\left(-5x_1-2x_2+10\right)\Big|_{(0;2)}=6; \qquad y_D=\left(-5x_1-2x_2+10\right)\Big|_{(4{,}9091;\,1{,}4545)}=-17{,}4545.$$

Отже, $y_{min}=-17{,}4545$ у точці (4,909091; 1,454545); $y_{max}=6$ у точці (0; 2).

Таким чином, функція $y=-5x_1-2x_2+10$ за умов:

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 2 \\ 4x_1+3x_2\le 24 \\ x_1-2x_2\le 2 \\ -2x_1+3x_2\le 6 \end{cases}, \quad x_1\ge 0,\, x_2\ge 0$$

набуває свого мінімального значення $y_{min}$ = –17,4545 у точці (4,909091; 1,454545), а максимального – $y_{max}$ = 6 у точці (0; 2).

Оскільки розрахунки за графічним методом є трудомісткими, то він на практиці майже не застосовується, тому широке використання знайшов метод Ньютона, що міститься в стандартних засобах MS Excel. Розв'язок прикладу 3.21 з використанням MS Excel наведено в додатку Н. Необхідно відмітити, що за методом Ньютона розв′язується також задача оптимізації для нелінійної функції.

### 3.3.2 Оптимізація нелінійної функції

Для пошуку оптимуму будь-якої функції $y = f(x)$ при системі обмежень $g(x) = 0$ на фактори і $q(x) = 0$ на залежну змінну можна використати універсальний метод сканування, який дозволяє розв′язувати задачі як лінійного, так і нелінійного програмування. Його зручно використовувати у випадку кодованого факторного простору (3.262) при кількості незалежних[274] змінних 1–3. Якщо кількість факторів понад 3 можна спробувати використати метод Ньютона, який запрограмовано в MS Excel для розрахунку локального[275] екстремуму.

Нехай необхідно знайти максимум функції однієї змінної $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ з точністю $h$. Для цього розбиваємо проміжок $[a; b]$ значень незалежної змінної $x$ на $n = (b - a) / h + 1$ точок: $x_1 = a$, $x_2 = a + h$, $x_3 = a + 2h$, …, $x_{n-1} = a + (n-1)h$, $x_n = b$ і в кожній з цих точок підраховуємо значення функції $f(x)$: $y_1$, $y_2$, $y_3$, …, $y_n$. Серед значень функції[276] $y_1$, $y_2$, $y_3$, …, $y_n$ обираємо найбільше $y_{max}$ і ставимо йому у відповідність значення аргументу $x^*$. І тоді кажуть, що функція $y = f(x)$ досягає свого максимуму $y_{max}$ при $x = x^*$ на проміжку $[a; b]$ з точністю $h$. Переваги цього методу: знаходження *глобального* оптимуму функції $y = f(x)$ із заданою точністю $h$, а недоліки – велика кількість обчислень $n$ значень функції[277]. Цей метод легко узагальнюється на $k$-вимірні

---

[274] у випадку залежних факторів задачі «склад-властивість», тобто якщо $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$, кількість факторів можна збільшити до 5

[275] можливо він є і глобальним, однак в цьому немає впевненості (пошук залежить від виду функції)

[276] якщо фактор задовольняє системі умов $g(x)$, а залежна змінна – $q(x)$

[277] функція $y = \sum_{i=1}^{k} b_i x_i^2 \Rightarrow \min$; межі для всіх змінних $x_i$ [–1; 1]; точність пошуку $h$ = 0,01; одне звернення $1/10^{12}$ секунди (суперЕОМ http://www.top500.org); продуктивність суперкомп′ютера 1,4 TFLOPS – 1,4 трлн. операцій в секунду (таблиця).

Таблиця – **Залежність тривалості обчислення функції від кількості змінних**

| Змінні $x_i$ | Обчислення функції $n$ | Секунди | Години | Роки | Тисячоліття |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 200 | $2 \cdot 10^{-10}$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 40000 | 0,00000004 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 8000000 | 0,000008 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1600000000 | 0,0016 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $3{,}2 \cdot 10^{11}$ | 0,32 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | $6{,}4 \cdot 10^{13}$ | 64 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | $1{,}28 \cdot 10^{16}$ | 12800 | 4 | 0 | 0 |
| 8 | $2{,}56 \cdot 10^{18}$ | 2560000 | 711 | 0 | 0 |
| 9 | $5{,}12 \cdot 10^{20}$ | 512000000 | 142222 | 16 | 0 |
| 10 | $1{,}024 \cdot 10^{23}$ | $1{,}024 \cdot 10^{11}$ | 28444444 | 3247 | 3 |

функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, однак кількість обчислень значень функції різко збільшується[278] $n^k$.

*Приклад* 3.22

Знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{\sin(0{,}1 + 3x)}$ за методом сканування на проміжку [0; 1] з точністю пошуку $h = 0{,}1$.

*Розв'язок*. Розбиваємо проміжок [0; 1] на $n = (1 – 0) / 0{,}1 + 1 = 11$ точок й розраховуємо в них значення функції (таблиця 3.65).

Таблиця 3.65 – **Результати розрахунку мінімуму функції з однією незалежною змінною**

| $x$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10,0167 | 2,5679 | 1,5523 | 1,1884 | 1,0378 | 1,0004 | 1,0568 | 1,2369 | 1,6709 | 2,9852 | 24,0496 |

Серед всіх значень $y_i$ вибираємо найменше.

Таким чином, мінімум функції $y_{min} = 1{,}0004$ при $x^* = 0{,}5$ з точністю пошуку 0,1.

У випадку кількості факторів $k > 1$ алгоритм розв'язку задачі подібний. Так, для $k = 2$ значення незалежних змінних $x_1$ і $x_2$ в межах $[a_i; b_i]$ $(i = 1, 2)$, розраховують наступним чином: 1) фіксуємо $x_{21} = a_2$, змінюємо $x_{11} = a_1$, $x_{12} = a_1 + h$, ..., $x_{1n} = b_1$; 2) фіксуємо $x_{22} = a_2 + h$, змінюємо $x_{11} = a_1$, $x_{12} = a_1 + h$, ..., $x_{1n} = b_1$ і ...; … $n$) фіксуємо $x_{2n} = b_2$, змінюємо $x_{11} = a_1$, $x_{12} = a_1 + h$, ..., $x_{1n} = b_1$. При всіх комбінаціях $x_{2i}$, $x_{1j}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ розраховуємо[269] значення функції $y_{ij} = f(x_1, x_2)$. Потім серед них знаходимо шукане максимальне чи мінімальне значення функції і комбінацію $(x_{1j}; x_{2i})$. Розглянемо приклад.

*Приклад* 3.23

Знайти максимум функції $y = \left| \dfrac{1}{\sin(0{,}1 + 3x_1) + \cos(0{,}1 + 3x_2)} \right|$ за методом сканування на проміжку $a_i – b_i$ $(i = 1, 2)$ [0; 1] з точністю пошуку $h = 0{,}1$.

*Розв'язок*. Розбиваємо проміжок [0; 1] на (1 – 0) / 0,1 + 1 = 11 точок по кожній незалежній змінній $x_1$, $x_2$ і розраховуємо в них значення функції (таблиця 3.66).

Серед всіх значень $y_{ij}$ вибираємо найбільше.

Таким чином, максимум функції $y_{max} = 33{,}2467$ при $\overline{x}^* = (0{,}5; 0{,}5)$ з точністю пошуку 0,1. Для підвищення точності зменшують крок сканування $h$, внаслідок чого зростає кількість обчислень. Трудомісткість розрахунків можна

[278] При рівних $h$ та інтервалах $[a; b]$ по кожній незалежній змінній $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

знизити використанням програми «Функция желательности» з відповідними змінами, що наведена в додатку П.

Таблиця 3.66 – **Результати розрахунку максимуму функції з двома незалежними змінними**

| $x_2$ \ $x_1$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11,0217 | 3,5730 | 2,5573 | 2,1934 | 2,0428 | 2,0054 | 2,0618 | 2,2419 | 2,6759 | 3,9902 | 25,0547 |
| 0,1 | 11,1024 | 3,6536 | 2,6380 | 2,2741 | 2,1235 | 2,0861 | 2,1425 | 2,3226 | 2,7566 | 4,0709 | 25,1353 |
| 0,2 | 11,3241 | 3,8754 | 2,8597 | 2,4959 | 2,3453 | 2,3079 | 2,3642 | 2,5443 | 2,9784 | 4,2926 | 25,3571 |
| 0,3 | 11,8675 | 4,4187 | 3,4031 | 3,0392 | 2,8886 | 2,8512 | 2,9076 | 3,0877 | 3,5217 | 4,8360 | 25,9005 |
| 0,4 | 13,7550 | 6,3063 | 5,2906 | 4,9267 | 4,7762 | 4,7388 | 4,7951 | 4,9752 | 5,4093 | 6,7235 | 27,7880 |
| 0,5 | 24,230 | 31,679 | 32,695 | 33,059 | 33,209 | $\boxed{33,2467}$ | 33,190 | 33,010 | 32,576 | 31,262 | 10,1975 |
| 0,6 | 6,9235 | 0,5253 | 1,5409 | 1,9048 | 2,0554 | 2,0928 | 2,0365 | 1,8563 | 1,4223 | 0,1080 | 20,9564 |
| 0,7 | 8,3175 | 0,8687 | 0,1470 | 0,5108 | 0,6614 | 0,6988 | 0,6425 | 0,4624 | 0,0283 | 1,2859 | 22,3504 |
| 0,8 | 8,7685 | 1,3197 | 0,3041 | 0,0598 | 0,2104 | 0,2478 | 0,1915 | 0,0114 | 0,4227 | 1,7370 | 22,8014 |
| 0,9 | 8,9554 | 1,5066 | 0,4909 | 0,1271 | 0,0235 | 0,0609 | 0,0046 | 0,1755 | 0,6096 | 1,9239 | 22,9883 |
| 1 | 9,0158 | 1,5671 | 0,5514 | 0,1875 | 0,0370 | 0,0004 | 0,0559 | 0,2360 | 0,6701 | 1,9843 | 23,0488 |

Для оптимізації фізико-хімічних процесів і композиційних складів, що характеризуються кількома вихідними змінними $y_1$, $y_2$, ..., $y_m$, дослідники використовують узагальнену функцію бажаності, запропоновану Харрінгтоном. В цьому випадку пошук оптимуму функції бажаності також для невеликої кількості факторів проводиться за методом сканування.

### 3.3.3 Функція бажаності

Для оптимізації технологічного процесу та складу, які характеризуються $m$ вихідними змінними $y_1$, $y_2$, ..., $y_m$, використовується функція бажаності:

$$D = \sqrt[m]{d_1 d_2 \ldots d_m} \tag{3.256}$$

де $d_i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$) – частинна функція бажаності $i$-тої змінної $y_i$, яка приймає значення в інтервалі [0; 1] і визначається за залежністю:

$$d_i = \exp[-\exp(-y_i')] \tag{3.257}$$

де $y_i'$ – безрозмірне значення показника $y_i$, що визначається, зазвичай, за лінійною залежністю:

$$y_i' = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} y_i \tag{3.258}$$

Коефіцієнти $b_0^{(i)}$, $b_1^{(i)}$ залежностей (3.258) визначають із систем рівнянь:

$$\begin{cases} y_i'^{гірше} = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} y_i^{гірше} \\ y_i'^{краще} = b_0^{(i)} + b_1^{(i)} y_i^{краще} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (3.259)$$

де $y_i^{гірше}, y_i^{краще}$ – відповідно найгірше і найкраще значення вихідної змінної $y_i$, відповідно зменшити чи збільшити яке далі не є можливим за причиною технологічного характеру і яке встановлюється дослідником;

$y_i'^{гірше}, y_i'^{краще}$ – найгірше і найкраще значення безрозмірної вихідної змінної, яке визначається на підставі (3.257) за формулами:

$$y_i'^{гірше} = -\ln(-\ln d_{гірше}), \quad y_i'^{краще} = -\ln(-\ln d_{краще}), \qquad (3.260)$$

де $d_{гірше}$ і $d_{краще}$ – гірше і краще значення частинної функції бажаності (3.257), які зазвичай, приймають на практиці відповідно значення 0,2 і 0,8.

Максимум функції бажаності $D^*$, побудованої за (3.256), відповідає оптимальному режиму процесу чи складу відповідної композиції $\bar{x}^*$, який має найкращі компромісні значення вихідних змінних $y_i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$). За оптимальним значенням $D^*$ можна судити про їх компромісну узгодженість, яка може бути: дуже поганою – 0–0,2, поганою – понад 0,2–0,37, задовільною – понад 0,37–0,63, доброю – понад 0,63–0,8 і дуже доброю – 0,8–1.

Програма для оптимізації за методом сканування досліджуваного об′єкта, який характеризується $m$ вихідними змінними $y_i$ в $k$-факторному просторі $\bar{x}$, з використанням функції бажаності наведено в додатку П.

*Приклад* 3.24

Під впливом температури $x$, що змінюється в межах 0–60 °С, властивості об′єкта $y_1$ та $y_2$ змінюються за експоненціальними залежностями $y_1 = 1{,}047\ell^{0{,}05x}$, $y_2 = 21{,}148\ell^{-0{,}05x}$. Знайти максимальні компромісні значення вихідних змінних об′єкта, за наступних обмежень $y_i^{гірше}$, $y_i^{краще}$ для $y_1$ і $y_2$ однакові значення[279] – 3 і 6.

*Розв′язок*. Для розуміння задачі оптимізації зобразимо експоненціальні криві на рисунку 3.19. Як видно з рисунку 3.19, обидві функції $y_1$ та $y_2$ досягають максимуму, який ≈ 21, але за різних значень температур, відповідно, $x$ = 60 і 0. Отже, оскільки максимальні значення властивостей змінюються в протилежних напрямках, то компромісні властивості об′єкта будуть знаходитись на перетині кривих, що необхідно показати за допомогою функції бажаності.

[279] Оскільки функції симетричні і перетинаються в центрі інтервалу $x$ [0; 60].

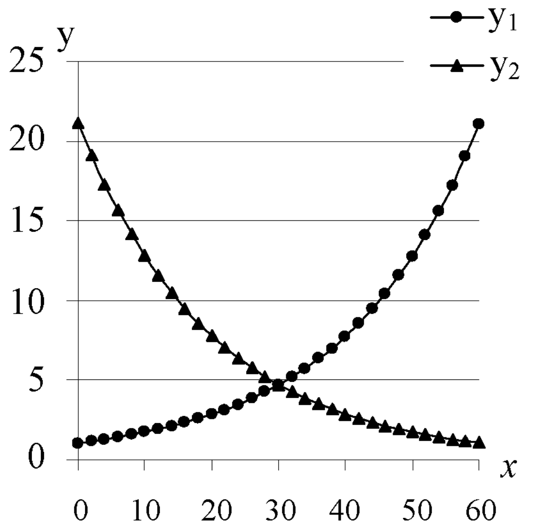



Рисунок 3.19 – **Залежності властивостей об′єкта від температури**

Приймаючи $d_{гірше} = 0{,}2$ і $d_{краще} = 0{,}8$ за допомогою (3.260) знаходимо:

$$y' = -\ln\left(-\ln\left(d\right)\right)$$

$$y'_{гірше} = -\ln\left(-\ln\left(0{,}2\right)\right) = -0{,}475885$$

$$y'_{краще} = -\ln\left(-\ln\left(0{,}8\right)\right) = 1{,}49994\,.$$

Приймаючи до уваги значення обмежень $y_i^{гірше}$, $y_i^{краще}$ ($i$ = 1, 2) і формули (3.259), складемо системи рівнянь для знаходження коефіцієнтів $b_0$ і $b_1$ функцій безрозмірних вихідних змінних (3.258):

для $y_1$

$$\begin{cases} -0{,}475885 = b_0 + 3b_1 \\ 1{,}49994 = b_0 + 6b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = -2{,}45171 \\ b_1 = 0{,}6586083 \end{cases},$$

для $y_2$

$$\begin{cases} -0{,}475885 = b_0 + 3b_1 \\ 1{,}49994 = b_0 + 6b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = -2{,}45171 \\ b_1 = 0{,}6586083 \end{cases}.$$

*Примітка.* Системи рівнянь однакові, оскільки умови обмежень $y_i^{гірше}$, $y_i^{краще}$ для $y_1$ і $y_2$ є однаковими – 3 і 6; в протилежному випадку вони відрізнятимуться правими частинами.

Підставляючи знайдені пари коефіцієнтів $b_0$ і $b_1$ і вихідні моделі в (3.258) а останні у (3.257), отримаємо аналітичні вирази частинних функцій бажаності.

$$d_1 = \exp[-\exp(-[-2{,}45171 + 0{,}6586083 \cdot 1{,}047 \exp(0{,}05x)])]$$

$$d_2 = \exp[-\exp(-[-2{,}45171 + 0{,}6586083 \cdot 21{,}148 \exp(-0{,}05x)])].$$

Підставляючи отримані функції $d_i$ в (3.256) знаходимо критерій Харрінгтона, який і є цільовим критерієм оптимізації дослідженого об′єкта.

$$D = \sqrt[2]{d_1 d_2}$$

Знаходячи завжди максимум функції $D$ за методом сканування для незалежної змінної $x$ в межах [0; 60] з точністю пошуку 0,01 за програмою, що наведена в додатку П, отримаємо компромісні властивості об′єкта $y_1$ = = 4,704214, $y_2$ = 4,706835 і $D$ = 0,5924958 за оптимальної температури $x$ = 30,05059. Як бачимо отримані компромісні значення властивостей є задовільними, оскільки знайдене значення функція бажаності знаходиться в межах задовільного інтервалу 0,37–0,63.

В реальній ситуації важливо правильно вибрати інтервал оптимального значення (гірше, краще) кожної залежної змінної, що можна показати на цьому ж прикладі (таблиця 3.67). В таблиці наведено різні варіанти завдання інтервалів $y_i^{гірше}$ і $y_i^{краще}$ з метою спостереження їх впливу на отримані оптимальні результати об′єкта.

Таблиця 3.67 – **Аналіз варіантів завдання інтервалів (гірше, краще) оптимуму вихідної змінної**

| Варіант | Інтервали оптимуму | $y_i^{гірше}$ | $y_i^{краще}$ | $x$ | $y_1$ | $y_2$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | менші | 2 | 3 | 30,05059 | 4,704214 | 4,706835 | 0,9923542 |
| | | 2 | 3 | | | | |
| 2 | | 2 | 3 | 59,99594 | 21,02529 | 1,053111 | 0,9829662 |
| | | 3 | 2 | | | | |
| 3 | | 3 | 2 | 30,06059 | 4,706566 | 4,704482 | $4{,}77132\cdot10^{-21}$ |
| | | 3 | 2 | | | | |
| 4 | містять оптимум | 6 | 3 | 30,06059 | 4,706566 | 4,704482 | 0,5035137 |
| | | 6 | 3 | | | | |
| 5 | | 3 | 6 | 59,99594 | 21,02529 | 1,053111 | 0,9695169 |
| | | 6 | 3 | | | | |
| 6 | більші | 10 | 11 | 0 | 1,041 | 21,148 | 0 |
| | | 10 | 11 | | | | |
| 7 | | 10 | 11 | 57,98627 | 19,01528 | 1,16443 | 1 |
| | | 11 | 10 | | | | |
| 8 | | 11 | 10 | 29,98059 | 4,687778 | 4,723338 | 0,9999936 |
| | | 11 | 10 | | | | |

На основі даних, наведених в таблиці 3.67 і апріорного знання оптимуму об′єкта, проаналізуємо отримані результати. У варіантах 1 і 8 для кожної залежної змінної інтервалами, що не містять оптимуму, $y_i^{гірше}$ і $y_i^{краще}$, але дослідник правильно визначився з напрямком до оптимуму і функція бажаності сама підводить його до оптимуму, що відображається значеннями $x$, $y_1, y_2$ і $D$. У варіантах 3 і 6 дослідник неправильно визначився з напрямком до оптимуму для кожної залежної змінної, на що вказує незадовільне значення функції $D = 0$. Варіанти 2 і 7 вказують на правильне визначення дослідником напрямку тільки для однієї залежної змінної, але завчасно відомий нам оптимум, не знайдено, не дивлячись на те, що $D = 1$. Однак значення функції бажаності є оправданим, тому що, наприклад, у варіанті 2, дослідник, встановлюючи межі, задався збільшенням $y_1$ та зменшенням $y_2$ і функція бажаності розв′язок до цього підвела, що видно із значень $y_1$ та $y_2$. І, нарешті, у варіантах 4, 5 в інтервалах, що містять оптимум, бачимо, що у варіанті 5 щодо варіанту 4, дослідник, неправильно задав напрямок до оптимуму і тому його не отримав, не дивлячись на те, що $D$ є високим.

Таким чином, для дослідника головним є правильно визначитись з напрямком руху до оптимуму і функція бажаності максимально його наблизить. Це є важливішим, ніж заключити оптимум апріорно відомими межами.

*Завдання для самостійної роботи* студентів з лінійного програмування наведено в додатку Н, а з функції бажаності – в додатку П.

### 3.3.4 Використання оптимізації для розрахунку коефіцієнтів моделі, нелінійної за параметрами

На практиці зустрічаються випадки, коли відомі функції $f_j\left(\bar{x}\right)$ моделі (3.112) містять невідомі коефіцієнти, наприклад

$$\hat{y} = b_1 + b_2 x^a + b_3 x^b \quad \text{чи} \quad \hat{y} = b_1 \sin\left(ax\right) + b_2 \cos\left(bx\right) \text{ тощо}, \qquad (3.261)$$

де відносно до $\hat{y}$ коефіцієнти: $b_1$, $b_2$, $b_3$ – лінійні, $a$ і $b$ – нелінійні.

В таких випадках пошук коефіцієнтів моделей (3.261) проводиться сумісно з використанням двох методів: лінійних коефіцієнтів за МНК, а нелінійних – з використанням будь-якого методу оптимізації функції $z\left(a,b\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 \to \min$. За цим підходом, при зміні $i$-тих поточних значень коефіцієнтів $a^{(i)}$ і $b^{(i)}$, наприклад за методом сканування, розраховуються за МНК відповідні коефіцієнти $b_1^{(i)}$, $b_2^{(i)}$, $b_3^{(i)}$. Знаходячи поточну модель (3.261), розраховуємо значення функції $z_i = z\left(a^{(i)}, b^{(i)}\right)$, що мінімізується коефіцієнтами $a$, $b$.

Оскільки ці розрахунки є трудомісткими, то їх зручно проводити в MS Excel. Слід відзначити, що в MS Excel використовується метод Ньютона, за допомогою якого не завжди, на відміну від сканування, можна розрахувати глобальний мінімум функції $z_{\min}$, тому точність розрахованих нелінійних коефіцієнтів $a$ і $b$ залежить від методу оптимізації.

*Приклад* 3.25

На основі статистичних даних показника $y$ і фактора $x$

| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 100,5005 | 11,6516 | 4,8125 | 3,7413 | 5,0151 | 8,6469 | 15,3722 | 26,2569 | 42,6065 | 65,9375 |

знайти параметри моделі та визначити її адекватність, якщо припустити, що залежність між фактором $x$ і показником $y$ має вид: $\hat{y} = b_1 + b_2 x^a + b_3 x^b$.

*Розв'язок* прикладу 3.25 наведено в додатку Р.

Отже, стало відомо як розраховувати коефіцієнти будь-яких моделей (статичних, динамічних, багатофакторних), лінійних і нелінійних за параметрами, визначати їх прогнозну здатність в умовах експерименту, використовуючи як основний показник залишкову суму $SS_{зал}$, котра в подальшому використовується для встановлення адекватності моделі експериментальним даним за $F$-відношенням у випадку наявності – відома похибка експерименту (3.123) та відсутності – відомий розкид експериментальних даних навколо їх середнього (3.121) паралельних дослідів; вираховувати похибки коефіцієнтів як складової моделі $f_j\left(\bar{x}\right)$ через перевірку їх значущості (3.119), так і похибку передбачення моделі (3.124) у будь-якій точці факторного простору.

На критерію ортогональності (метод Чебишева) було показано, що моделі можуть бути оптимально побудовані на будь-яких експериментальних даних (вхід-вихід) з позиції простоти її отримання. Отже, дослідник може наперед визначатися, яких оптимальних властивостей набуде в майбутньому його модель. В математичній статистиці є розділ планування оптимального експерименту, в якому розроблено багато оптимальних планів для моделей різних видів (задача[280], багатофакторність, порядок). Тому для будь-якого виду моделі можна отримати оптимальний план (оптимізувати дисперсійну матрицю $D$), за яким досліднику вигідніше ставити експерименти, щоб в майбутньому модель набула якихось оптимальних властивостей, як то: мінімальна похибка коефіцієнтів $s^2\left\{b_j\right\}$ ($D$-оптимальність[281]), мінімальна похибка прогнозу $\xi\big|_{\bar{x}}$ ($G$-оптимальність), однакова передбачувана здатність $\xi\big|_{\bar{x}} = \underset{r}{const}$ моделі у всіх точках, що рівновіддалені від центру плану колами

[280] Технологія-властивість, склад-властивість, технологія-склад- властивість.

[281] Мінімальний визначник дисперсійної матриці.

радіуса $r$ (ротатабельність), а також насиченість, композиційність[282] планів і багато інших несуттєвих, як, в наш час, критерій ортогональності. Всі оптимальні плани подаються в кодованій системі координат, що дозволяє будь-яку задачу, в якій незалежна змінна має різні розмірності, перевести в безрозмірну систему координат, часто від –1 до +1, для задачі[283] «технологія-властивість» за залежністю:

$$x_i = \frac{X_i - X_i^{(0)}}{\Delta X_i} \ (i = 1, 2, \ldots, k), \text{ де}^{284} \ X_i^{(0)} = \frac{X_i^{(\max)} + X_i^{(\min)}}{2}, \ \Delta X_i = \frac{X_i^{(\max)} - X_i^{(\min)}}{2}, \quad (3.262)$$

а для задачі[285] «склад-властивість» некодовані[286] значення факторів мають задовольняти умові:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1. \quad (3.263)$$

Після вибору моделі й плану за математичним апаратом, наведеним в розділі 3.2.3, розраховують похибку експерименту[287] (3.32), коефіцієнти (3.118), їх похибки (3.120), щоб відкинути незначущі складові моделі $f_j\left(\overline{x}\right)$ за (3.119), і, як кінцевий результат, визначити адекватність моделі (3.121) чи (3.123) та прогнозу (3.141) в потрібних досліднику умовах.

Таким чином, статистичний підхід до моделювання часто обирається за простотою використання, однак є більш складний – аналітичний підхід, в якому модель будується із відомих фізичних, хімічних, механічних, динамічних законів. Ці моделі показують фізичний внесок кожної її складової у вихідну змінну, однак, частіше вони залишаються нереальними моделями, тому що їх неможливо розв’язати без спрощення, або для використання необхідно ставити багато експериментів на встановлення їх постійних, початкових та граничних умов. Досягти точності об'єкта під час його моделювання неможливо, тому самим ефективним керуванням об'єктом може бути застосування датчиків, що заміряють поточні параметри (як вхідні, так і

---

[282] При підвищенні порядку моделі до $l$+1 степеня зберегти всі досліди, що були отримані для побудови моделі $l$ порядку.

[283] Повний факторний експеримент $2^k$ (ПФЕ), центральний композиційний ротатабельний план (ЦКРП) тощо.

[284] $X_i^{(0)}$, $\Delta X_i$ називають відповідно центром плану та інтервалом варіювання вхідної змінної $X_i$.

[285] Без обмежень на складові – симплексно-гратові плани Шеффе; з обмеженнями на складові – метод псевдокомпонентів, метод Макліна-Андерсона, синтез $D$-оптимальних планів тощо.

[286] Вони є також кодованими (в суміші сума компонентів дорівнює одиниці).

[287] В позначеннях $y$.

вихідні); отримана поточна інформація обробляється на ЕОМ і за певними правилами подаються відповідні дії (через фактори) на об'єкт для підтримування його стаціонарного режиму.

*Запитання і завдання для самоконтролю*

1. Як ви розумієте подію? Поява випадкової події.
2. Імовірність будь-якої події та її визначення.
3. Диференціальна та інтегральна функції розподілу неперервної випадкової величини.
4. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
5. Числові характеристики випадкової величини та їх розрахунок.
6. Що є генеральна сукупність і вибірка?
7. Математичне очікування і дисперсія нормально-розподіленої випадкової величини.
8. Корисність нормального закону для дослідника.
9. В чому полягає правило 3 $\sigma$?
10. Гіпотеза та алгоритм її перевірки.
11. Помилки статистичного критерію першого і другого типу.
12. Як ви розумієте рівень значущості та довірчу імовірність?
13. Перевірка нормальності закону розподілу.
14. Перевірка відповідності математичного очікування завчасно відомій сталій величині.
15. Перевірка некоректних експериментальних значень за критерієм Романовського.
16. Перевірка відтворюваності дослідів з використанням критеріїв Фішера і Кохрена.
17. Визначення похибки експерименту.
18. Функціональна, статистична та кореляційна залежності між двома величинами.
19. Який має вид кореляційне поле за наявності й відсутності кореляційного зв'язку? Позитивна і негативна кореляції.
20. Математичне вираження умови якомога ближчого розташування експериментальних точок до прямої.
21. Визначення тісноти лінійного зв'язку між двома величинами.
22. В чому полягає задача наближення функцій?
23. Пошук апроксимуючої функції $y = f(x)$ за експериментальними даними і розв'язок системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці теоретичний і в MS Excel.
24. Суть апроксимації функції за способом Чебишева.
25. Вибір виду емпіричної формули за експериментальними даними.
26. Розрахунки, пов'язані з приведенням нелінійної моделі до виду лінійного за параметрами.
27. В чому полягає суть методу найменших квадратів?
28. Складання системи нормальних рівнянь аналітичним способом.

29. Матрична форма системи нормальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів математичної моделі.
30. Визначення коефіцієнтів моделі лінійної за параметрами.
31. Як перевіряється значущість коефіцієнтів за *t*-критерієм?
32. Як перевірити адекватність математичної моделі експериментальним даним?
33. Як розраховується похибка прогнозу за моделлю?
34. Як проводити розрахунки за матричними формулами засобами MS Excel?
35. Використання компоненту «Регрессия» для визначення коефіцієнтів моделі та її статистичного аналізу.
36. Як визначається довірча зона експериментальних даних?
37. Точкова оцінка прогнозу, його зона надійності та їх розрахунок.
38. Геометрична інтерпретація похідної.
39. Як отримати лінійне ОДР з постійними коефіцієнтами за його різницевим аналогом?
40. Як розв’язується лінійне ОДР з постійними коефіцієнтами?
41. Наведіть алгоритм розв’язку лінійного НДР.
42. Прямий спосіб знаходження коефіцієнтів будь-яких нелінійних ДР лінійних за параметрами з використанням МНК.
43. Як визначаються постійні інтегрування на практиці?
44. Вибір аналітичного виду ДР.
45. Як використовуються ДР для отримання коефіцієнтів моделей нелінійних за параметрами?
46. Розв'язок задачі лінійного програмування в MS Excel.
47. Оптимізація функції методом сканування.
48. Для чого використовується функція бажаності?
49. Алгоритм складання функції бажаності.
50. Розрахунок коефіцієнтів моделей нелінійних за параметрами

# 4 МЕТОДОЛОГІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Найбільш важливою складовою частиною наукового дослідження є *експеримент* (від латинського experimentum – проба, дослід) – метод емпіричного дослідження, що базується на активному та цілеспрямованому втручанні суб'єкта у процес наукового пізнання явищ та предметів реальної дійсності шляхом створення умов, що контролюються та управляються, які дозволяють встановлювати визначені якості та закономірні зв'язки в об'єкті, що досліджується, та багатократно їх відтворювати.

Експеримент широко застосовують не лише в природничих науках, а й у соціальній практиці, де він відіграє значну роль у пізнанні та управлінні суспільними процесами.

Від звичайного, щоденного, пасивного спостереження експеримент відрізняється активним впливом дослідника на явище, що вивчається.

*Основною метою експерименту* є виявлення властивостей досліджуваних об'єктів, підтвердження наукових гіпотез і на цій основі більш широке та поглиблене вивчення теми наукового дослідження.

## 4.1 Сутність, мета, функції наукового експерименту

Проведення експериментальних досліджень передбачає здійснення ряду *пізнавальних операцій:*

– визначення цілей експерименту на основі існуючих теоретичних концепцій з урахуванням потреб практики та розвитку самої науки;

– теоретичне обґрунтування умов експерименту;

– розроблення основних принципів, створення технічних засобів для проведення експерименту;

– спостереження, вимірювання та фіксація виявлених у ході експерименту властивостей, зв'язків, тенденцій розвитку досліджуваного об'єкта;

– статистична обробка результатів експерименту;

– попередня класифікація та порівняння статистичних даних.

Експеримент дає можливість досліджувати, по-перше, об'єкти в так званому чистому вигляді; по-друге, в екстремальних умовах, що сприяє більш глибокому проникненню в їхню сутність; по-третє, важливою перевагою експерименту є його повторюваність. Існують різні види експериментів, які можна класифікувати за рядом ознак.

За призначенням об’єкта експерименту: природничонаукові (хімічні, біологічні, фізичні), виробничі, педагогічні, соціологічні, економічні тощо.

За характером зовнішніх впливів на об’єкт дослідження: речовинні, енергетичні, інформаційні. Речовинний експеримент передбачає вивчення впливу різних речовинних факторів на стан об’єкта дослідження, наприклад, вплив різних домішок на якість сталі. Енергетичний експеримент використовується для вивчення впливу різних видів енергії (електромагнітної, механічної, теплової тощо) на об’єкт дослідження. Інформаційний експеримент використовується для вивчення впливу інформації на об’єкт дослідження.

За характером об’єктів та явищ, що вивчаються в експерименті: технологічні, соціометричні тощо. Технологічний експеримент спрямований на вивчення елементів технологічного процесу (продукції, обладнання, діяльності робітників тощо) або процесу в цілому. Соціометричний експеримент використовується для вимірювання існуючих міжособистісних соціально-психологічних відносин у малих групах з метою їх подальшої зміни.

За структурою об’єктів та явищ, що вивчаються в експерименті: прості та складні. Простий експеримент використовується для вивчення простих об’єктів, які мають у своєму складі невелику кількість взаємозв’язаних та взаємодіючих елементів, що виконують прості функції. У складному експерименті вивчаються явища або об’єкти з розгалуженою структурою та великою кількістю взаємозв’язаних та взаємодіючих елементів, що виконують складні функції.

За способом формування умов проведення експерименту: природні та штучні. Природні експерименти характерні для біологічних, соціальних, педагогічних, психологічних наук, наприклад, при вивченні соціальних явищ (соціальний експеримент) в обставинах, наприклад, виробництва, побуту.

Штучні експерименти широко використовуються в багатьох природничонаукових або технічних дослідженнях. У цьому випадку вивчаються явища, що ізольовані до потрібного стану, для того щоб оцінити їв в кількісному та якісному відношеннях.

За організацією проведення експерименту: лабораторні, натурні, польові, виробничі, відкриті або закриті тощо. Лабораторні досліди проводять з використанням типових приладів, спеціальних моделюючих установок, стендів, обладнання тощо. Натурний експеримент проводиться в природних умовах та на реальних об’єктах. Залежно від місця проведення натурні експерименти поділяють на виробничі, можуть бути відкритими та закритими. Такі типи експериментів польові, полігонні тощо. Експерименти значно поширені в психології, соціології, педагогіці. У відкритому експерименті його завдання відкрито пояснюються тим, хто досліджується, у закритому – для одержання об'єктивних даних завдання експерименту приховуються.

За характером взаємодії засобу експериментального дослідження з об'єктом дослідження: звичайні та модельні. Звичайний (класичний) експеримент включає експериментатора, об'єкт або предмет експериментального дослідження та засоби, за допомогою яких проводиться експеримент. Модельний експеримент базується на використанні як об'єкта, що досліджується, моделі, яка може не тільки заміщувати в дослідженні реальний об'єкт, але і умови, в яких він вивчається.

За типом моделей, що досліджуються в експерименті: матеріальні та розумові. Матеріальний експеримент є формою об'єктивного матеріального зв'язку свідомості з зовнішнім світом. У матеріальному експерименті використовуються матеріальні об'єкти дослідження. Розумовий (ідеалізований, уявний) експеримент є однією з форм розумової діяльності суб'єкта, у процесі якої в його уяві відтворюється структура реального експерименту, тобто засобами розумового експерименту є розумові моделі (чуттєві образи, образно-знакові моделі, знакові моделі).

За величинами, що контролюються в експерименті: пасивні та активні.

Пасивний експеримент передбачає вимірювання тільки вибраних показників (параметрів, змінних) в результаті спостереження за об'єктом без втручання в його функціонування. Активний експеримент пов'язаний з вибором спеціальних вхідних сигналів (факторів) та контролює вхід та вихід системи, що досліджується.

За числом факторів, що варіюються в експерименті: однофакторні та багатофакторні. Однофакторний експеримент передбачає: виділення необхідних факторів; стабілізацію факторів, що заважають; почергове варіювання факторів, що цікавлять дослідника. Стратегія багатофакторного експерименту полягає в тому, що варіюються всі змінні відразу, і кожний ефект оцінюється за результатами всіх дослідів, що були проведені в даній серії досліджень.

За метою дослідження: перетворюючі, констатуючі, контролюючі, пошукові, вирішальні. Перетворюючий (творчий) експеримент включає активну зміну структури та функцій об'єкта дослідження у відповідності до висунутої гіпотези, формування нових зв'язків та відносин між компонентами об'єкта або між досліджуваним об'єктом та іншими об'єктами. Констатуючий експеримент використовується для перевірки відповідних передбачень. У процесі такого експерименту констатується наявність визначеного зв’язку між впливом на об’єкт дослідження та результатом.

Контролюючий експеримент зводиться до контролю за результатами зовнішніх впливів на об’єкт дослідження з урахуванням його стану, характеру впливу та ефекту, що очікується. Іноді виникає необхідність провести пошукові експериментальні дослідження. Вони необхідні в тому випадку, якщо виникають труднощі в класифікації всіх факторів, що впливають на явище, яке вивчається внаслідок відсутності достатньої кількості попередніх даних.

Вирішальний експеримент ставиться для перевірки справедливості основних положень фундаментальних теорій у тому випадку, коли дві або декілька гіпотез однаково узгоджуються з багатьма явищами. Така узгодженість призводить до труднощів у визначеності правильності гіпотез. Вирішальний експеримент відповідає на питання «так чи ні?».

*Методологія експерименту* – це загальна структура (методика) експерименту, тобто постановка та послідовність виконання експериментальних досліджень.

Експеримент включає такі *основні етапи*:

– розроблення плану – програми експерименту;

– оцінку вимірювання та вибір засобів для проведення експерименту;

– проведення експерименту;

– обробку та аналіз експериментальних даних.

Наведена кількість етапів характерна для традиційного експерименту. Разом з цим останнім часом широко використовують математичну теорію експерименту, яка дозволяє значно підвищити точність та зменшити обсяг експериментальних досліджень.

У цьому випадку експеримент включає такі етапи: розроблення плану – програми експерименту; оцінку вимірювання та вибір засобів для проведення експерименту; математичне планування експерименту з одночасним проведенням експериментального дослідження, обробкою та аналізом одержаних даних.

Зупинимося дещо детальніше на окремих етапах експериментального дослідження.

*Розроблення плану-програми експерименту.* План-програма включає найменування теми дослідження, робочу гіпотезу, методику експерименту, план створення експериментальної ситуації, перелік необхідних матеріалів, приладів, установок, список виконавців експерименту, календарний план робіт і кошторис витрат на виконання експерименту. В ряді випадків до плану-програми включають роботи з конструювання та виготовлення приладів, апаратів, пристроїв, їх методичне обстеження, а також програми дослідних робіт на підприємствах.

Одним з найбільш важливих етапів складання плану-програми є визначення *мети і завдань експерименту*. Чітко обґрунтовані завдання – це вагомий внесок у їх вирішення.

Основа плану-програми – *методика проведення експерименту*. В методиці детально проектують процес проведення експерименту. Спочатку складають послідовність (черговість) проведення операцій вимірювань та спостережень. Потім ретельно описують кожну операцію окремо з урахуванням вибраних засобів для проведення експерименту. Особливу увагу приділяють методам контролю якості операцій, які повинні забезпечувати при мінімальній(раніше встановленій) кількості вимірів високу надійність та задану точність. Розробляють форми журналів для запису результатів вимірів та спостережень.

Важливим розділом методики є вибір методів обробки та аналізу експериментальних даних. Обробка даних зводиться до систематизації всіх цифр, класифікації, аналізу. Результати експериментів повинні бути зведені до таких форм запису – таблиць, графіків, формул, номограм, які дозволяють швидко та доброякісно співвідносити одержані результати. Особливу увагу в методиці повинно бути приділено математичним методам обробки та аналізу одержаних дослідних даних – встановленню емпіричних залежностей, апроксимації зв’язків між варіюючими характеристиками, встановленню критеріїв тощо.

Після розроблення методики визначають *обсяг та трудомісткість експериментальних досліджень*, які залежать від глибини теоретичних розробок, ступеня точності прийнятих засобів вимірювання. Чим чіткіше сформульована теоретична частина дослідження, тим менший обсяг експерименту. На обсяг та трудомісткість експерименту істотно впливає і вид експерименту.

Після встановлення обсягу експериментальних робіт складають перелік необхідних засобів вимірювання, матеріалів, список виконавців, календарний план та кошторис витрат.

Не менш важливим є неодмінне розроблення в рамках плану-програми експериментального дослідження, так званого плану створення експериментальної ситуації.

*Експериментальна ситуація* – це сукупність умов, за яких проводиться експеримент.

План створення експериментальної ситуації завжди пов’язаний не лише з завданнями, методикою, але і з конкретним об’єктом, на якому потрібно вирішувати поставлені завдання та реалізовувати саму методику.

На завершення план-програму експериментального дослідження розглядає науковий керівник, обговорюють в науковому колективі та затверджують в установленому порядку.

*Оцінка вимірювання та вибір засобів для проведення експерименту.* Обґрунтування засобів вимірювання – це вибір необхідних для спостережень та вимірювань приладів, обладнання, машин, апаратів тощо. Засоби вимірювання можуть бути вибрані стандартні або за їх відсутності виготовлені самостійно.

Дуже відповідальною частиною є встановлення точності вимірів та похибок. Методи вимірювання повинні базуватися на законах спеціальної науки – метрології.

*Проведення експерименту.* Проведення експерименту є найважливішим та трудомістким етапом. Експериментальні дослідження необхідно проводити у відповідності до затвердженого плану-програми і особливо методики експерименту. Розпочинаючи експеримент, остаточно уточнюють методику його проведення, послідовність випробувань. При проведенні експерименту потрібно дотримуватися таких загальних вимог:

– об’єкт дослідження повинен допускати можливість опису системи змінних, що визначають його функціонування;

– потрібно мати можливість проведення якісних та кількісних вимірів факторів, які впливають на об’єкт дослідження, зміну його стану або поведінки під час експерименту;

– опис об’єкта експериментального дослідження потрібно проводити в системі його складових;

– необхідно обов’язкове визначення та опис умов існування об’єкту – дослід;

– потрібно мати чітко сформульовану експериментальну гіпотезу про наявність причинно-наслідкових зв’язків;

– необхідне предметне визначення понять сформульованої гіпотези експерименту;

– потрібне обґрунтоване виділення незалежної та залежної змінних;

– потрібний обов’язковий опис специфічних умов діяльності об’єкта дослідження (місце, час, соціально-економічна ситуація тощо).

*Робочим місцем експериментатора* називається частина робочого простору, на яке поширюється безпосередній вплив експериментатора в процесі дослідження.

*Робочий простір* – це частина лабораторного або виробничого приміщення, оснащена необхідними експериментальними засобами, що обслуговується одним або групою дослідників. Робочий простір може бути стаціонарним (в лабораторіях, науково-дослідних закладах, полігонах тощо); умовно-стаціонарним (у пересувних лабораторіях, на тимчасових полігонах); мобільним (у ходових лабораторіях).

*Лабораторія* являє собою спеціально обладнане приміщення, в якому проводяться експериментальні дослідження.

Дослідник (експериментатор) в лабораторії виконує відповідальну роботу, від якої залежить правильність вирішення теоретичної або практичної задачі в цілому. Точність при виконанні методики дослідження, акуратність, старанність при плануванні і підготовці експерименту, уважність при його проведенні – основні умови ефективності експериментальної роботи. Обов'язковою вимогою до проведення експерименту є ведення журналу. Форма журналу може бути довільною, але найкраще відповідати процесу, що досліджується для максимальної фіксації всіх факторів. У процесі експериментальних робіт необхідно строго дотримуватися вимог промислової санітарії, техніки безпеки, пожежної безпеки. Результати деяких лабораторних та більшості виробничих експериментів оформлюються протоколом, який підписується керівником виробництва та експериментатором.

*Обробка та аналіз експериментальних даних.* Завершується експеримент переходом від емпіричного вивчення до обробки отриманих даних, логічних узагальнень, аналізу і теоретичної інтерпретації отриманого фактичного матеріалу. Для обробки та аналізу експериментальнитх даних можна використовувати різні сучасні програмні продукти, наприклад Mathcad. Так, зазначений продукт дозволяє здійснювати апроксимацію експериментальних залежностей з графічним представленням отриманих результатів. Для простих типових формул апроксимації передбачений ряд функцій регресії, у яких параметри функцій підбираються в середовищі Mathcad самостійно. На рис. 4.1–4.5 наведені приклади лінійної, експонентної, поліноміальної та узагальненої регресійних залежностей вихідної змінної $y$ від вхідної змінної $x$, отриманих при обробці результатів експериментальних досліджень в середовищі Mathcad.

$$VX := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1.8 \\ 2.9 \\ 4.1 \\ 4.8 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 4.2 \\ 11 \\ 15 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix}$$

ORIGIN:= 1

a := intercept(VX, VY)  b := slope(VX, VY)

i := 1.. 5  f(x) := a + b·x

a = 0.938  b = 4.709  corr(VX, VY) = 0.987

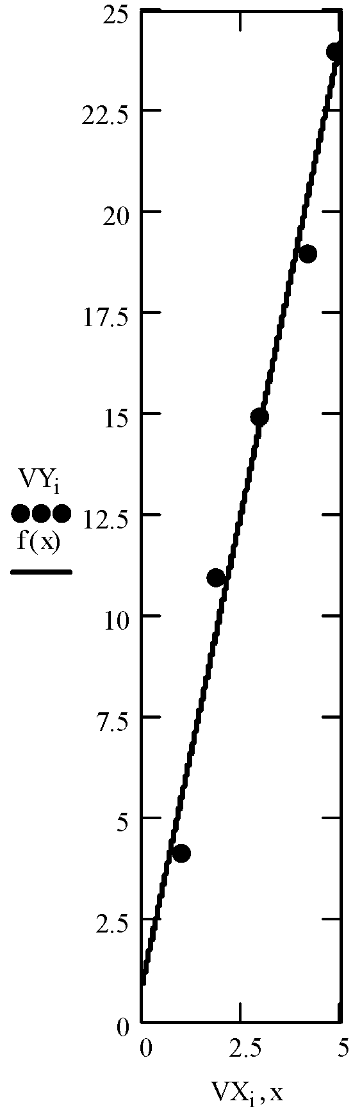



Рис. 4.1 – **Виконання лінійної регресії в середовищі Mathcad**

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3.5 \\ 6.2 \\ 13 \\ 23 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$f(x,a,b,c) := a \cdot \exp(b \cdot x) + c$$

$$S := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K := \text{expfit}(x, y, S)$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.554 \\ 0.459 \\ 2.713 \end{pmatrix}$$

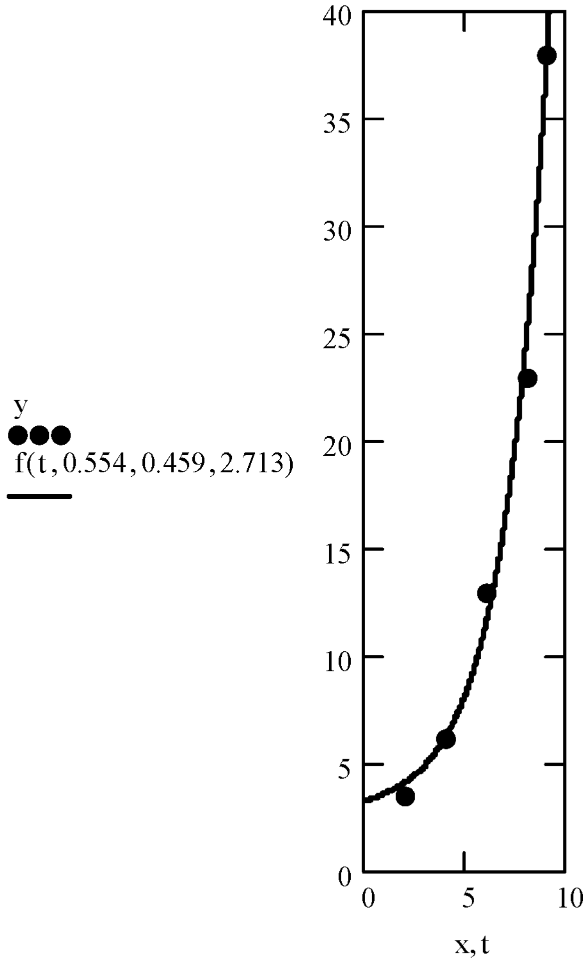


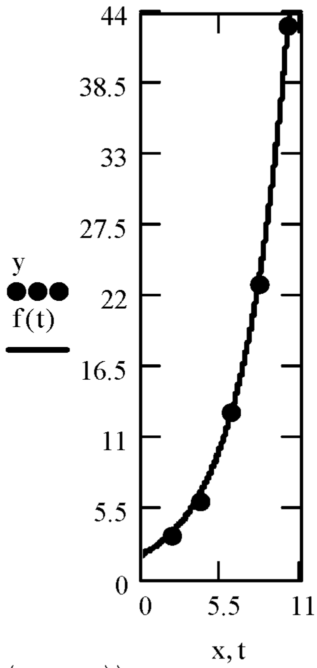

Рис. 4.2 – **Виконання експонентної регресії в середовищі Mathcad**

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 3.5 \\ 6.2 \\ 13 \\ 23 \\ 43 \end{pmatrix} \qquad f(x,a,b) := a \cdot \exp(b \cdot x) \qquad a := 1 \quad b := 1$$

Given

$$f(x_0,a,b) = y_0 \quad f(x_1,a,b) = y_1 \quad f(x_2,a,b) = y_2 \quad f(x_3,a,b) = y_3 \quad f(x_4,a,b) = y_4$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \mathrm{MinErr}(a,b) \qquad a = 1.933 \qquad b = 0.31 \qquad f(x) := a \cdot \exp(b \cdot x)$$




$$a1 := \exp\left(\mathrm{intercept}\left(x, \overrightarrow{\ln(y)}\right)\right) \qquad b1 := \mathrm{slope}\left(x, \overrightarrow{\ln(y)}\right)$$

$$f1(x) := a1 \cdot \exp(b1 \cdot x)$$

$$a1 = 1.839 \qquad b1 = 0.316 \qquad \mathrm{corr}\left(x, \overrightarrow{\ln(y)}\right) = 0.999$$

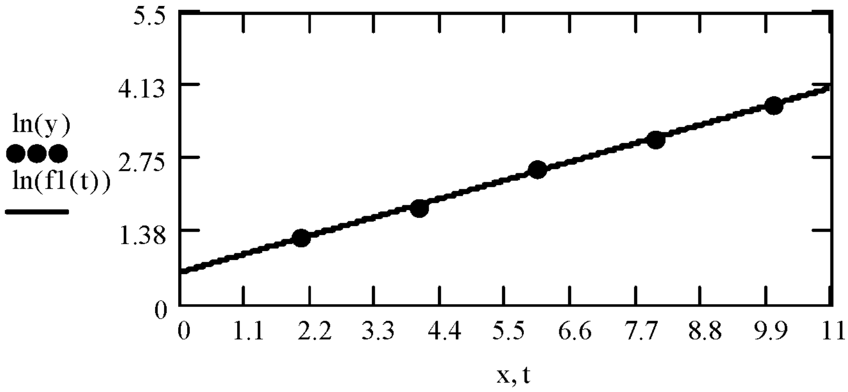



Рис. 4.3 – **Виконання експонентної регресії без лінеаризації вихідної функції і з її лінеаризацією в середовищі Mathcad**

$$data := \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 10 & 21 \\ 15 & 25 \\ 20 & 23 \\ 25 & 15 \end{pmatrix}$$

$$X := data^{\langle 0 \rangle} \qquad Y := data^{\langle 1 \rangle} \qquad n := rows(data)$$

$$k := 2 \qquad S := regress(X, Y, k)$$

$$fit(x) := interp(S, X, Y, x) \qquad coeffs := submatrix(S, 3, length(S) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs^{T} = (4 \ \ 2.743 \ \ -0.091) \qquad \frac{\sum \overrightarrow{(fit(X) - mean(Y))^2}}{\sum \overrightarrow{(Y - mean(Y))^2}} = 0.962$$

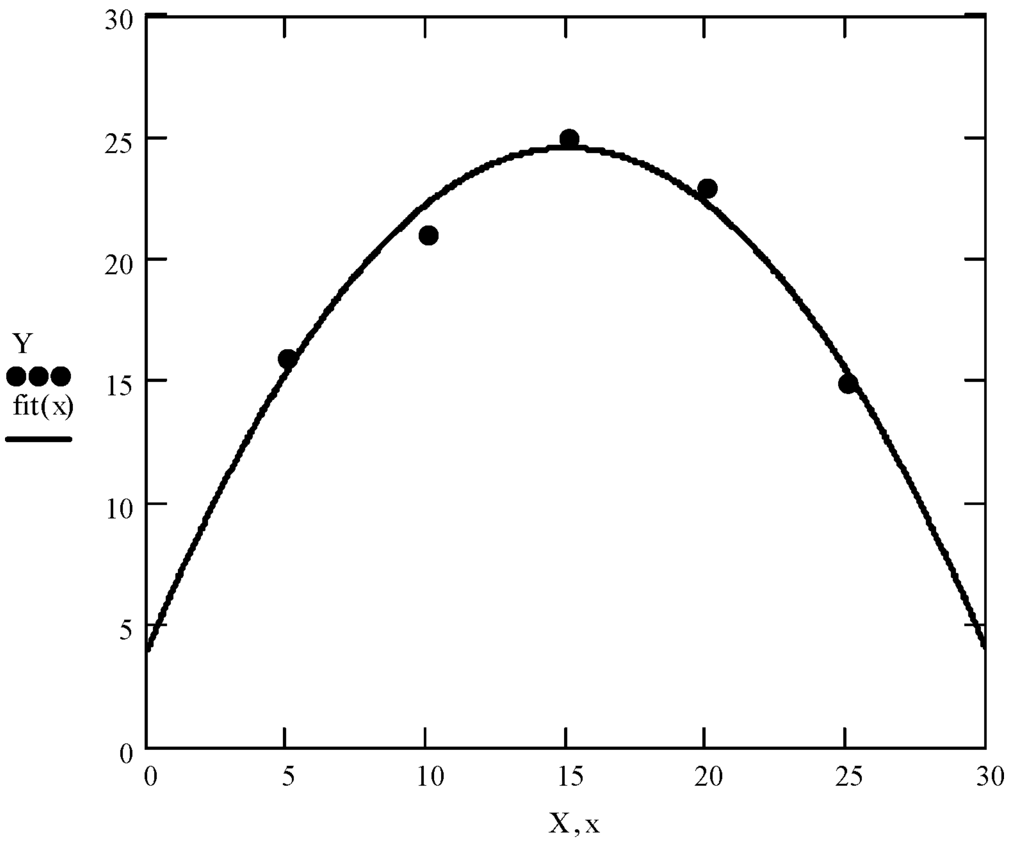



Рис. 4.4 – **Виконання поліноміальної регресії другого ступеня в середовищі Mathcad**

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4.8 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 12 \\ 7.5 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ \exp(x) \end{pmatrix}$$

$$K := \text{linfit}(VX, VY, F)$$

$$K = \begin{pmatrix} 11.017 \\ 0.4 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$g(t) := F(t) \cdot K$$

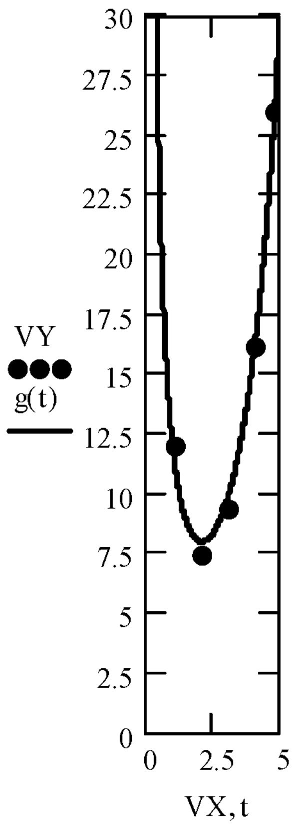



Рис. 4.5 – **Виконання узагальненої регресії в середовищі Mathcad**

Для встановлення залежностей вихідних змінних від багатьох факторів, що впливають на неї, в практичній роботі широко використовуються факторні експерименти. Як приклад, розглянемо планування і обробку результатів експерименту, що належить до повних факторних експериментів.

### 4.2 Багатофакторний експеримент

Теорія математичного експерименту включає ряд концепцій, які забезпечують успішну реалізацію завдань дослідження. До них відносять *концепції рандомізації, послідовного експерименту, математичного моделювання, оптимального використання факторного простору* і деякі інші.

*Принцип рандомізації* полягає в тому, що до плану експерименту вводять елемент імовірності. Для цього план експерименту складають так, щоб ті систематичні фактори, які складно піддаються контролю, враховувалися статистично і потім виключалися в дослідженнях як систематичні похибки.

При *послідовному проведенні експеримент* виконується не одночасно, а поетапно, для того щоб результати кожного етапу аналізувати та приймати рішення про доцільність проведення подальших досліджень.

У результаті експерименту одержують *математичну модель* у вигляді багаточлену. Для конкретних випадків математична модель створюється на основі цільової направленості процесу і завдань дослідження з урахуванням визначеної точності рішення та достовірності вихідних даних. У зв'язку з тим, що порядок моделі, яка адекватно описує процес, передбачити неможливо, то спочатку він описується лінійною моделлю, а у випадку неадекватності, підвищують її порядок, що указує на поетапне проведення експерименту.

В основі методу моделювання лежить припущення, що сукупність значень параметра оптимізації $y$, отримана при різних сполученнях факторів $x_i$, утворить поверхню відгуку. Для спрощення представлення про поверхню відгуку розглянемо випадок, при якому число факторів дорівнює двом ($x_1$ і $x_2$). При цьому границі значень факторів утворять на площині $x_1 0 x_2$ (рис. 4.6) прямокутник *ABCD*, усередині якого лежать точки можливих значень $x_1$ і $x_2$. Якщо по осі $y$ відкладати значення $y_{ij}$, отримані при різних сполученнях значень факторів, то точки $y_{ij}$ будуть лежати на поверхні відгуку. На цій поверхні знаходиться точка *M*, що відповідає максимуму оптимального значення $y$.

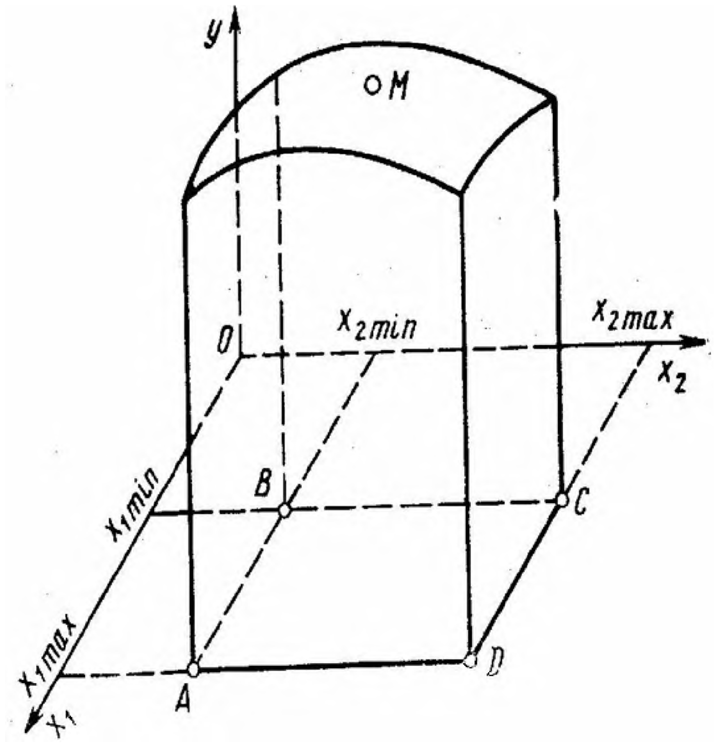



Рис.4.6 – **Зображення поверхні відгуку**

*Повний факторний експеримент.* Для зручності запису умов експерименту й обробки експериментальних дані рівні факторів кодують. У кодованому вигляді верхній рівень позначають +1, нижній –1, а основний 0. Кодоване значення фактора $x_i$ визначають за залежністю (3.262).

Для повного факторного експерименту типу $2^2$ рівняння регресії з урахуванням ефектів взаємодії можна навести залежністю

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2. \qquad (4.1)$$

Для цього експерименту матриця планування наведена в табл. 4.1. У цій матриці міститься стовпець змінної $x_0$ для оцінки вільного члена $b_0$. Стовпець добутку $x_1x_2$ отриманий для розрахунку коефіцієнта $b_{1,2}$.

Таблиця 4.1 – **Матриця факторного експерименту** $2^2$

| Номер досліду | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1x_2$ | $\bar{y}_u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | – | – | + | $\bar{y}_1$ |
| 2 | + | + | – | – | $\bar{y}_2$ |
| 3 | + | – | + | – | $\bar{y}_3$ |
| 4 | + | + | + | + | $\bar{y}_4$ |

*Проведення експерименту й обробка його результатів.* Для кожного рядка матриці планування за результатами $m$ паралельних експериментів знаходять середнє арифметичне значення параметра оптимізації:

$$\overline{y}_u = \frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} y_{ui}, \tag{4.2}$$

де $u$ – номер досліду;

$y_{ui}$ – значення параметра оптимізації в $i$ паралельному експерименті $u$ рядка матриці.

З метою оцінки відхилень параметра оптимізації від його середнього значення для кожного рядка матриці планування обчислюють дисперсію $s_u^2$ експерименту за даними $m$ паралельних експериментів (виноска 110). При цьому статистична дисперсія $i$ досліду знаходиться за формулою:

$$s_u^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(y_{ui} - \overline{y}_u)^2. \tag{4.3}$$

Після обчислення за формулою (4.2) дисперсій перевіряють гіпотезу їхньої однорідності (відтворюваності дослідів). При однаковій кількості паралельних дослідів, їх відтворюваність перевіряється з використанням *G-критерію Кохрена* (3.30). Якщо досліди відтворювані, то знаходять похибку всього експерименту на основі формули (3.32, в позначеннях $y$).

$$s_{експ.}^2 = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} s_u^2, \tag{4.4}$$

де $n$ – кількість дослідів (число рядків матриці).

За результатами експерименту на основі формули (3.118) обчислюють коефіцієнти моделі (4.1). Вільний член $b_0$ визначається за формулою:

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} \overline{y}_u. \tag{4.5}$$

Коефіцієнти моделі, що характеризують лінійні ефекти, обчислюються за формулою:

$$b_i = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}\overline{y}_u. \tag{4.6}$$

Коефіцієнти моделі, що характеризують ефекти взаємодії, визначаються за формулою:

$$b_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ui}x_{uj}\overline{y}_u, \tag{4.7}$$

де $i$ $j$ – номери факторів;

$x_{ui}$, $x_{uj}$ – кодовані значення факторів $i$ і $j$ в $u$ експерименті.

Перевірку значимості коефіцієнтів виконують за допомогою *t*-критерію Стьюдента (3.119).

Останнім етапом обробки результатів експерименту є перевірка гіпотези адекватності знайденої моделі за *F-критерієм* Фішера (3.123).

Плани другого порядку дозволяють сформувати функцію відгуку у вигляді повного квадратичного багаточлена:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2. \quad (4.8)$$

Часто використовують ротатабельні плани, у яких дисперсійна функція, що характеризує точність прогнозу моделі є постійною на колах від центра плану (сферах, гіперсферах). У таблиці 4.2 наведена матриця такого плану.

Таблиця 4.2 – **Матриця ротатабельного плану факторного експерименту другого порядку**

| Номер експери-менту | $x_1$ | $x_2$ | Середнє значення y в паралельних дослідах $\bar{y}_u$ |
|---|---|---|---|
| 1 | – | – | $\bar{y}_1$ |
| 2 | + | – | $\bar{y}_2$ |
| 3 | – | + | $\bar{y}_3$ |
| 4 | + | + | $\bar{y}_4$ |
| 5 | –1,41 | 0 | $\bar{y}_5$ |
| 6 | +1,41 | 0 | $\bar{y}_6$ |
| 7 | 0 | –1,41 | $\bar{y}_7$ |
| 8 | 0 | +1,41 | $\bar{y}_8$ |
| 9 | 0 | 0 | $\bar{y}_9$ |
| 10 | 0 | 0 | $\bar{y}_{10}$ |
| 11 | 0 | 0 | $\bar{y}_{12}$ |
| 12 | 0 | 0 | $\bar{y}_{12}$ |
| 13 | 0 | 0 | $\bar{y}_{13}$ |

Коефіцієнти рівняння регресії визначаються в результаті вирішення матричного рівняння типу (3.117).

Для визначення коефіцієнтів рівняння регресії можна також скористатися формулами:

$$b_0 = \frac{A}{n}[2\lambda^2(k+2)\sum_{u=1}^{n} y_u - 2\lambda c \sum_{i=1}^{k}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 y_u] \qquad (4.1)$$

$$b_i = \frac{c}{n}\sum_{u=1}^{n} x_{ui} y_u \qquad (4.10)$$

$$b_{i,j} = \frac{c^2}{n\lambda}\sum_{u=1}^{n} x_{ui} x_{ui} y_u \qquad (4.11)$$

$$b_{ii} = \frac{A}{n}\{c^2[(k+2)\lambda - k]\sum_{u=1}^{n} x^2{}_{ui} y_u + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 y_u - 2\lambda c \sum_{u=1}^{n} y_u\} \qquad (4.12)$$

У формулах (4.9) - (4.12) прийняті наступні позначення:

$$c = \frac{n}{\sum_{u=1}^{n} x_{iu}^2}; \qquad (4.13)$$

$$\lambda = \frac{n2^k}{(\sum_{u=1}^{n} x_{iu})^2}. \qquad (4.14)$$

Формули (4.9) - (4.12) можна переписати у вигляді:

$$b_0 = a_1 \sum_{u=1}^{n} y_u + a_2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 y_u;; \qquad (4.15)$$

$$b_i = a_3 \sum_{u=1}^{n} x_{ui} y_u; \qquad (4.16)$$

$$b_{ij} = a_4 \sum_{u=1}^{n} x_{ui} x_{uj} y_u; \qquad (4.17)$$

$$b_{ii} = a_5 \sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 y_u + a_6 \sum_{i=1}^{k}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 y^2 - a_7 \sum_{u=1}^{n} y_u; \qquad (4.18)$$

У формулах (4.15)–(4.18) прийняті наступні позначення:

$$a_1 = \frac{A}{n} 2\lambda^2 (k+2); \qquad (4.19)$$

$$a_2 = \frac{A}{n} 2\lambda c; \qquad (4.20)$$

$$a_3 = \frac{c}{n}; \qquad (4.21)$$

$$a_4 = \frac{c^2}{n\lambda}; \qquad (4.22)$$

$$a_5 = \frac{A}{n} c^2 [(k+2)\lambda - k]; \qquad (4.23)$$

$$a_6 = \frac{A}{n} c^2 (1-\lambda); \qquad (4.24)$$

$$a_7 = \frac{A}{n} 2\lambda c. \qquad (4.25)$$

Для дфохфакторного експерименту коефіцієнти $a_1 - a_7$, розраховані за формулами (4.19) – (4.25), приймають наступні значення: $a_1 = 0{,}2$; $a_2 = 0{,}1$; $a_3 = 0{,}125$; $a_4 = 0{,}5$; $a_5 = 0{,}125$; $a_6 = 0{,}187$; $a_7 = 0{,}1$.

На рис. 4.7–4.11 наведено приклад виконання розрахунків при плануванні та обробці результатів двохфакторного експерименту відповідно до центрального ротатабельного плану другого порядку. в середовищі Mathcad

## 4.3 Пошук оптимальних параметрів

На практиці для пошуку оптимальних рішень найчастіше використовують градієнтні методи крутого сходження по поверхні відгуку, релаксації та найшвидшого спуску. Ці методи засновані на тому, що похідна функції відгуку за напрямком із деякої вихідної точки у факторному просторі характеризує швидкість зміни цієї функції у обраному напрямку.

Похідна від цільової функції за напрямком нормалі до поверхні постійного рівня цієї функції дорівнює за алгебраїчним значенням вектору, який називається градієнтом цільової функції у визначеній точці. Вказаний вектор у кожній точці ділянки визначення функції цілі спрямований за нормаллю до поверхні рівня, проведеною через дану точку, і тому співпадає за напрямком найшвидші зміни цільової функції. У зв'язку з цим, рух за градієнтом найшвидше приводить до оптимального рішення.

*Круте сходження по поверхні відгуку.* Градієнтом називають вектор, що показує напрямок найшвидшої зміни деякої величини, значення якого міняється від однієї точки простору до іншої. Градієнт *($\nabla\varphi$)* безперервної однозначної функції $\varphi$ є вектор:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\bar{j} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\bar{k}, \qquad (4.26)$$

де $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ – частинна похідна функції по *i-му* фактору;

$\bar{i}, \bar{j}, \ldots, \bar{k}$ – одиничні вектори в напрямку осей факторів.

Відповідно до теореми Тейлора про розкладання аналітичної функції в ряд, частині похідні функції по факторах рівні по величині і знаку відповідним коефіцієнтам регресії.

Введення вихідних даних.

Число факторів $k := 2$ Рівні варіювання: $v := (-1.414\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 1.414)$

Число повторних дослідів: $m := 4$ Допустима загальна похибка: $\Delta := 0.05745$

Результати дослідів:

| | | |
|---|---|---|
| $x1 := 1$ | $x2 := 1$ | |
| $x1 := -1$ | $x2 := 1$ | |
| $x1 := 1$ | $x2 := -1$ | |
| $x1 := -1$ | $x2 := -1$ | |
| $x1 := -1.414$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 1.414$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := -1.414$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 1.414$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | |

$$r := \begin{pmatrix} 26.576 & 25.878 & 25.618 & 26.236 \\ 22.506 & 23.518 & 23.603 & 24.432 \\ 23.927 & 24.802 & 24.8592 & 22.867 \\ 21.842 & 22.746 & 22.831 & 23.781 \\ 20.509 & 21.516 & 21.506 & 20.504 \\ 26.116 & 25.818 & 26.821 & 25.016 \\ 23.229 & 24.198 & 23.191 & 25.231 \\ 26.206 & 24.414 & 24.493 & 25.209 \\ 27.044 & 26.143 & 25.056 & 26.035 \\ 27.1443 & 25.0443 & 26.0443 & 26.043 \\ 24.043 & 26.058 & 28.029 & 27.063 \\ 25.014 & 26.067 & 27.103 & 26.087 \\ 27.453 & 26.018 & 26.081 & 26.024 \end{pmatrix}$$

Визначення необхідного числа повторень дослідів:

$n := 13$ $\qquad r := r^T$

$u := 1..n$

$y_u := r^{\langle u \rangle}$

Среднє арифметичне значення результатів у кожному досліді: $ycp_u := \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (y_u)_i}{m}$

Дисперсія похибок в кожному досліді: $s_u := \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{m} \left[(y_u)_i - ycp_i\right]^2}{m-1}}$

Табличне значення критерію Стьюдента: $t := 3.183$

Величина похибки в кожному досліді: $\Delta y := \dfrac{t \cdot s}{\sqrt{m}}$

Рис. 4.7 – **Введення вихідних даних та розрахунок похибок вимірювань**

Результати розрахунків:

$$ycp = \begin{pmatrix} 26.077 \\ 23.5148 \\ 24.1138 \\ 22.8 \\ 21.0087 \\ 25.9427 \\ 23.9622 \\ 25.0805 \\ 26.0695 \\ 26.069 \\ 26.2982 \\ 26.0678 \\ 26.394 \end{pmatrix} \quad \Delta y = \begin{pmatrix} 0.6655 \\ 1.2554 \\ 1.4869 \\ 1.2612 \\ 0.923 \\ 1.1895 \\ 1.5369 \\ 1.3228 \\ 1.2941 \\ 1.3652 \\ 2.714 \\ 1.3574 \\ 1.1245 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{s^2} = \begin{pmatrix} 0.1749 \\ 0.6222 \\ 0.8729 \\ 0.628 \\ 0.3364 \\ 0.5586 \\ 0.9326 \\ 0.6909 \\ 0.6611 \\ 0.7359 \\ 2.9081 \\ 0.7275 \\ 0.4992 \end{pmatrix} \quad ycp - \Delta y = \begin{pmatrix} 25.4115 \\ 22.2593 \\ 22.6269 \\ 21.5388 \\ 20.0857 \\ 24.7533 \\ 22.4253 \\ 23.7577 \\ 24.7754 \\ 24.7038 \\ 23.5843 \\ 24.7103 \\ 25.2695 \end{pmatrix}$$

$\max(\Delta y) = 2.714$

Порівняння максимальної похибкиї з допустимим значенням: $g := \mathrm{if}(\max(\Delta y) < \Delta, 1, 0$

$g = 1$

$rez := \mathrm{if}(g = 1, ycp, 0)$

Перевірка однорідності дисперсій за допомогою критерія Кохрена: $G := \dfrac{\max(s)^2}{\sum_{i=1}^{N} (s_i)^2}$

$G = 0.281$

Визначення коефіцієнтів регресії.

ORIGIN:= 1

$N := 13$

$s2 := (0.2 \;\; 0.1 \;\; 0.125 \;\; 0.25 \;\; 0.125 \;\; 0.0187 \;\; 0.1)$

$a := s2^T$

$y := rez$

$x := x2$

$$x2 := \begin{pmatrix} v_{1,4} & v_{1,4} \\ v_{1,2} & v_{1,4} \\ v_{1,4} & v_{1,2} \\ v_{1,2} & v_{1,2} \\ v_{1,1} & v_{1,3} \\ v_{1,5} & v_{1,3} \\ v_{1,3} & v_{1,1} \\ v_{1,3} & v_{1,5} \\ v_{1,3} & v_{1,3} \\ v_{1,3} & v_{1,3} \\ v_{1,3} & v_{1,3} \\ v_{1,3} & v_{1,3} \\ v_{1,3} & v_{1,3} \end{pmatrix}$$

Рис. 4.8 – **Перевірка відтворюваності дослідів**

$$b_0 := a_1 \cdot \sum_{u=1}^{N} y_u - a_2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{u=1}^{N} \left(x_{u,i}\right)^2 \cdot y_u \qquad b_1 := a_3 \cdot \sum_{u=1}^{N} y_u \cdot x_{u,1} \qquad b_2 := a_3 \cdot \sum_{u=1}^{N} y_u \cdot x_{u,2}$$

$$b_{12} := a_4 \cdot \sum_{u=1}^{N} x_{u,1} \cdot x_{u,2} \cdot y_u \qquad b_{11} := a_5 \cdot \sum_{u=1}^{N} \left(x_{u,1}\right)^2 \cdot y_u + a_6 \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{u=1}^{N} \left(x_{u,i}\right)^2 \cdot y_u - a_7 \cdot \sum_{u=1}^{N} y_u$$

$$b_{22} := a_5 \cdot \sum_{u=1}^{N} \left(x_{u,2}\right)^2 \cdot y_u + a_6 \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{u=1}^{N} \left(x_{u,i}\right)^2 \cdot y_u - a_7 \cdot \sum_{u=1}^{N} y_u$$

$b_0 = 26.1855 \quad b_1 = 1.3566 \quad b_2 = 0.5324 \quad b_{12} = 0.3121 \quad b_{11} = -1.3439 \quad b_{22} = -0.8212$

Перевірка значимості коефіцієнтів регресії. $u := 1..n$

$$y_u := r^{\langle u \rangle}$$

$$s_e := \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left[\left(y_u\right)_i - ycp_i\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} (m-1)}}$$

Дисперсія експерименту: $s_e^2 = 7.208$

Похибки при визначенні коефіцієнтів регресії. $\alpha 2 := (0.2 \;\; 0.125 \;\; 0.1438 \;\; 0.25)$

$$\alpha := \alpha 2^T \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.125 \\ 0.1438 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b_0 := 2 \cdot \sqrt{\alpha_1 \cdot \frac{s_e}{m}} \qquad \Delta b_1 := 2 \cdot \sqrt{\alpha_2 \cdot \frac{s_e}{m}} \qquad \Delta b_2 := 2 \cdot \sqrt{\alpha_2 \cdot \frac{s_e}{m}}$$

$$\Delta b_{11} := 2 \cdot \sqrt{\alpha_3 \cdot \frac{s_e}{m}} \qquad \Delta b_{22} := 2 \cdot \sqrt{\alpha_3 \cdot \frac{s_e}{m}} \qquad \Delta b_{12} := 2 \cdot \sqrt{\alpha_4 \cdot \frac{s_e}{m}}$$

$\Delta b_0 = 0.7328 \quad \Delta b_1 = 0.5793 \quad \Delta b_2 = 0.5793 \quad \Delta b_{12} = 0.8193 \quad \Delta b_{11} = 0.6213 \quad \Delta b_{22} = 0.6213$

Присвоєння значень значимим коефіцієнтам регресії.

$$b_0 := \text{if}\left(\left|b_0\right| > \left|\Delta b_0\right|, b_0, 0\right) \qquad b_1 := \text{if}\left(\left|b_1\right| > \left|\Delta b_1\right|, b_1, 0\right) \qquad b_2 := \text{if}\left(\left|b_2\right| > \left|\Delta b_2\right|, b_2, 0\right)$$

$$b_{12} := \text{if}\left(\left|b_{12}\right| > \left|\Delta b_{12}\right|, b_{12}, 0\right) \qquad b_{11} := \text{if}\left(\left|b_{11}\right| > \left|\Delta b_{11}\right|, b_{11}, 0\right) \qquad b_{22} := \text{if}\left(\left|b_{22}\right| > \left|\Delta b_{22}\right|, b_{22}, 0\right)$$

$b_0 = 26.1855 \quad b_1 = 1.3566 \quad b_2 = 0 \quad b_{12} = 0 \quad b_{11} = -1.3439 \quad b_{22} = -0.8212$

Рис. 4.9 – **Визначення коефіцієнтів регресії**

Рівняння регресії для кодованих значень факторів.

$$y(x1,x2) := 26.1855 + 1.3566x1 + 0.5324x2 - 1.3439x1^2 - 0.8212x2^2$$

Перевірка адекватності моделі експериментальній залежності.

Значення фунцкії, розраховані за рівнянням регресі і квадрати їх відхилень від експериментальних даних у точках плану

$$\begin{pmatrix} 26.077 \\ 23.5148 \\ 24.1138 \\ 22.8 \\ 21.0087 \\ 25.9427 \\ 23.9622 \\ 25.0805 \\ 26.0695 \\ 26.069 \\ 26.2982 \\ 26.0678 \\ 26.394 \end{pmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x1 := 1$ | $x2 := 1$ | $y(x1,x2) = 25.9094$ | $(26.077 - 25.9094)^2 = 0.0281$ |
| $x1 := -1$ | $x2 := 1$ | $y(x1,x2) = 23.1962$ | $(23.5148 - 23.1962)^2 = 0.1015$ |
| $x1 := 1$ | $x2 := -1$ | $y(x1,x2) = 24.8446$ | $(24.1138 - 24.8446)^2 = 0.5341$ |
| $x1 := -1$ | $x2 := -1$ | $y(x1,x2) = 22.1314$ | $(22.8 - 22.1314)^2 = 0.447$ |
| $x1 := -1.414$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 21.5803$ | $(21.0087 - 21.5803)^2 = 0.3267$ |
| $x1 := 1.414$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 25.4167$ | $(25.9427 - 25.4167)^2 = 0.2767$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := -1.414$ | $y(x1,x2) = 23.7908$ | $(23.9622 - 23.7908)^2 = 0.0294$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 1.414$ | $y(x1,x2) = 25.2964$ | $(25.0805 - 25.2964)^2 = 0.0466$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 26.1855$ | $(26.0695 - 26.1855)^2 = 0.0135$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 26.1855$ | $(26.069 - 26.1855)^2 = 0.0136$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 26.1855$ | $(26.2982 - 26.1855)^2 = 0.0127$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 26.1855$ | $(26.0678 - 26.1855)^2 = 0.0139$ |
| $x1 := 0$ | $x2 := 0$ | $y(x1,x2) = 26.1855$ | $(26.394 - 26.1855)^2 = 0.0435$ |

Сума квадратів відхилень значень фунцкії, розрахованих за рівнянням регресії, і експериментальних даних у точках плану.

$$C := 0.0281 + 0.1015 + 0.5341 + 0.447 + 0.3267 + 0.2767 + 0.0294 + 0.0466 + 0.0135 + 0.0136 + 0.0127 + 0.0139 + 0.0435$$

$$C = 1.8873$$

Дисперсія адекватності: $\dfrac{4 \cdot 1.8873}{13 - 6 - (5 - 1)} = 2.5164$

Розрахункове значення критерію Фішера: $\dfrac{2.5164}{0.796} = 3.1613$

Перехід до рівняння регресії для натуральних значень факторів.

$$z(t1,t2) := 26.1855 + 1.3566\left(\frac{t1 - 240}{27}\right) + 0.5324\left(\frac{t2 - 45}{17}\right) - 1.3439\left(\frac{t1 - 240}{27}\right)^2 - 0.8212\left(\frac{t2 - 45}{17}\right)^2$$

$$26.1855 - \frac{1.3566}{27}\cdot 240 - \frac{0.5324}{17}\cdot 45 - \frac{1.3439}{27^2}\cdot 240^2 - \frac{0.8212}{17^2}\cdot 45^2 = -99.2212 \qquad \frac{1.3566}{27} + \frac{1.3439}{27^2}\cdot 2\cdot 240 = 0.9351$$

$$\frac{0.5324}{17} + \frac{0.8212}{17^2}\cdot 2\cdot 45 = 0.2871 \qquad \frac{1.3439}{27^2} = 0.0018 \qquad \frac{0.8212}{17^2} = 0.0028$$

Рис. 4.10 – **Перевірка адекватності математичної моделі**

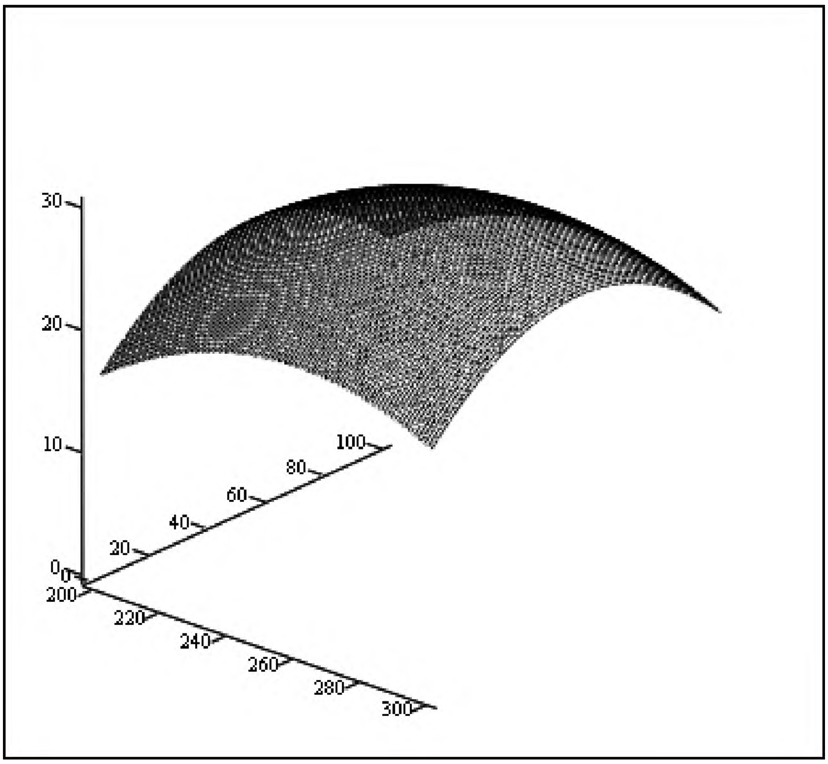
Рівняння регресії для натуральних значень факторів.

$$m(t1,t2) := -99.2212 + 0.9351 \cdot t1 + 0.2871 \cdot t2 - 0.0018 t1^2 - 0.0028 t2^2$$

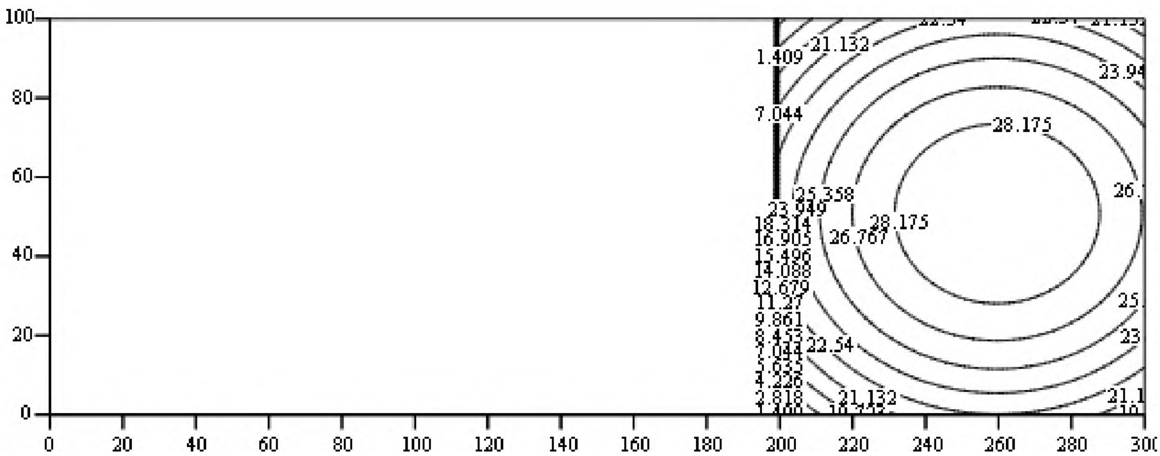
Побудова графіків.

$$t1 := 200..300 \qquad t2 := 1..100$$

$$M_{(t1,t2)} := m(t1,t2)$$




M




M

Рис. 4.11 – **Графічна інтерпретація результатів експерименту**

Отже, градієнт $\nabla y$ функції відгуку $y$ є вектор:

$$\nabla y = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + \ldots + b_k\bar{k}. \qquad (4.27)$$

Рух по градієнту забезпечує найбільш короткий шлях до оптимуму, тому що напрямок градієнта – це напрямок самого крутого схилу, що веде від даної точки до вершини. Якщо змінювати фактори пропорційно їхнім коефіцієнтам з урахуванням знака, то рух до оптимуму буде здійснюватися по самому крутому шляху. Цей процес руху до області оптимуму називають крутим сходженням.

Техніку розрахунку крутого сходження розглянемо на прикладі задачі з одним фактором $x_1$ (рис. 4.12). Припустимо, що крива *I* являє собою невідому функцію відгуку. У результаті реалізації плану експерименту з центром у точці 0 отримане рівняння регресії $\hat{y} = b_0 + b_1x_1$, що адекватно описує функцію відгуку в області значень фактора $x_1$ від –1 до +1. Значення коефіцієнта регресії $b_1$ дорівнює тангенсу кута між лінією регресії і віссю даного фактора.

Якщо крок руху по осі $x_1$ прийняти рівним $\Delta x$, то, помноживши його на $b_1$, одержимо координати ($\Delta x$ і $b_1\Delta x$) точки *A*, що лежить на градієнті. Після другого кроку відстань по осі $x_1$, буде дорівнювати $2\Delta x$. Помноживши $2\Delta x$ на $b_1$, знайдемо координати $2\Delta x$ і $2b_1\Delta x$ точки *B*, що лежить на градієнті, і т. д. Потім проводять експерименти з умовами, що відповідають точкам на градієнті. За результатами цих експериментів визначають область оптимуму. У практичних задачах для скорочення обсягу експерименту проводять не всі, а тільки частину експериментів, передбачених крутим сходженням. Умови проведення вибирають так, щоб область оптимуму можна було укласти у «вилку». Після цього експерименти проводять у точках інтервалу, утвореного точками «вилки», до знаходження найкращого результату. У випадку *k* факторів розрахунок крутого сходження по осі кожного фактора здійснюють аналогічним чином, тому що коефіцієнти $b_1$ визначаються незалежно один від одного. При цьому рух по осях усіх факторів здійснюють одночасно. Крок руху по градієнту вибирають таким, щоб його мінімальна величина була більше помилки, з яким фіксують фактор. Максимальну величину кроку обмежує область визначення фактора. Необхідно враховувати, що при русі до оптимуму малий крок потребує значного числа експериментів, а великий крок може привести до проскакування області оптимуму. Крок руху вибирають для одного фактора, а для інших його розраховують за формулою:

$$\Delta_i = \Delta_l \frac{b_i \varepsilon_i}{b_l \varepsilon_l}, \qquad (4.28)$$

де $\Delta_l$ – обраний крок руху для фактора $l$;

$\Delta_{i-i}$ крок руху для $i$ фактора;

$b_i$, $b_l$ – коефіцієнти регресії $i$ та $l$ факторів;

$\varepsilon_i$, $\varepsilon_l$ – інтервали варіювання $i$ та $l$ факторів.

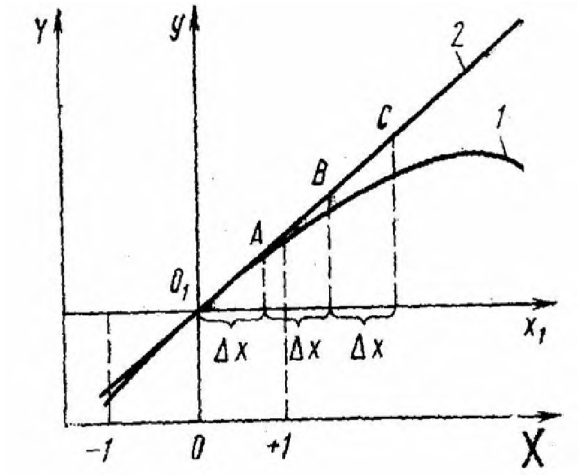



Рис. 4.12 – **Схема до координат точок у напрямку градієнта:**
1 – графік невідомої функції; 2 – пряма $y = b_0 + b_1 x_1$ – напрямок градієнта

Рух по градієнту повинен починатися від нульової точки (основного рівня кожного фактора), тому що коефіцієнти регресії обчислені для функції відгуку, розкладеної в ряд Тейлора в околі нульової точки. Якщо коефіцієнти регресії значно відрізняються один від одного, то рекомендують змінити інтервали варіювання факторів і провести нову серію експериментів, тому що при розходженні коефіцієнтів на порядок і більше багатофакторний експеримент при крутому сходженні може перетворитися в однофакторний. Розрахувавши крок руху для кожного фактора, знаходять умови «уявних» дослідів. «Уявними» називають експерименти, умови проведення яких на стадії крутого сходження встановлені з урахуванням кроку руху для кожного фактора. З метою перевірки результатів крутого сходження частина уявних експериментів реалізується.

Якщо при русі до оптимуму виникає ситуація, що перешкоджає зміні яких-небудь факторів, то ці фактори можна фіксувати на оптимальних рівнях, продовжуючи рух по інших факторах. Круте сходження припиняється, якщо знайдені умови оптимізації або якщо обмеження на фактори підтверджують подальший рух по градієнті нерозумним.

Розглянемо метод Бокса-Уілсона на прикладі дослідження модифікування чистого алюмінію молібденом. Як параметр оптимізації $y$ вибрали число зерен алюмінію в 1 см$^2$, що визначається металографічними дослідженнями.

На параметр оптимізації впливають наступні фактори: $x_1$ – кількість введеного в алюміній молібдену, %; $x_2$ – температура перегріву, °С; $x_3$ – час нагрівання, хв.; $x_4$ – швидкість охолодження. $x_1$, $x_2$, $x_3$ – фактори кількісні; $x_1$ – фактор якісний, приймає два значення: швидке охолодження в графітовому тиглі і повільне охолодження в шамотному тиглі. Обрані інтервали варіювання і рівні факторів зазначені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – **Рівні й інтервали варіювання факторів**

| Найменування | Фактори | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| Основний рівень | 0,40 | 840 | 60 | – |
| Інтервал варіювання | 0,15 | 100 | 60 | – |
| Верхній рівень (+) | 0,55 | 940 | 120 | Графітовий тигель |
| Нижній рівень (–) | 0,25 | 740 | 0 | Шамотний тигель |

Матриця планування і результати досліджень представлені в табл. 4.5. Досліди не дублювали. Для визначення дисперсії параметра оптимізації було проведено три експерименти при перебуванні факторів на основних рівнях (графітовий тигель).

Отримані значення параметра оптимізації $y_u$, його середнє значення $\bar{y}$, відхилення значень параметра оптимізації від його середнього значення $(y_u - \bar{y})$ і квадрати цих відхилень наведені в табл. 4.6.

Таблиця 4.5 – Матриця планування

| Номер експери-менту | Порядок реалізації експерименту | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | + | + | + | + | + | 100 |
| 2 | 3 | + | – | + | + | – | 81 |
| 3 | 8 | + | + | – | + | – | 95 |
| 4 | 5 | + | – | – | + | + | 36 |
| 5 | 7 | + | + | + | – | – | 130 |
| 6 | 2 | + | – | + | – | + | 69 |
| 7 | 1 | + | + | – | – | + | 90 |
| 8 | 6 | + | – | – | – | – | 64 |

Таблиця 4.6 – **Допоміжна таблиця для розрахунку** $s_y^2$

| Номер експер. | $y_u$ | $\bar{y}$ | $(y_u - \bar{y})$ | $(y_u - \bar{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | $\dfrac{\sum_{u=1}^{3} y_u}{3} = 80$ | 0 | 0 |
| 2 | 82 | | 2 | 4 |
| 3 | 78 | | –2 | 4 |
| – | – | | – | $\sum_{u=1}^{n_0=3}(y_u - \bar{y})^2 = 8$ |

Дисперсія параметра оптимізації

$$s_y^2 = \frac{\sum_{n=1}^{n_0}(y_u - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = 4.$$

Знаходимо коефіцієнти моделі

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j}{n}; b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{lj} y_j}{n};$$

$$b_0 = 83{,}1; b_1 = 20{,}0; b_2 = 11{,}9; b_3 = -5{,}1; b_4 = -9{,}4.$$

Середня квадратична помилка у визначенні коефіцієнтів регресії

$$s\{b_l\} = +\sqrt{\frac{s_y^2}{n}} = 0{,}71.$$

Довірчий інтервал коефіцієнтів регресії

$$\Delta b_i = \pm ts\{ b_i \}$$

При 5 % рівні значимості і числі ступенів вільності $f = n_0 - 1 = 2$ табличне значення критерію $t_т = 4{,}3$. Отже, $\Delta b_i = \pm 3{,}053$.

Усі коефіцієнти регресії по абсолютній величині більше довірчого інтервалу, тому їх можна визнати статистично значимими. Таким чином, одержали модель у вигляді полінома першого ступеня:

$$y = 83{,}1 + 20\,x_1 + 11{,}9\,x_2 - 5{,}1x_3 - 9{,}4\,x_4.$$

Відповідно до отриманої моделі параметр оптимізації зростає зі збільшенням значень факторів $x_1$, $x_2$ і зменшенням значень факторів $x_3$, $x_4$. Найбільший вплив на параметр оптимізації має фактор $x_1$.

Перевірку адекватності моделі робимо за $F$-критерієм Фішера. Для обчислення дисперсії адекватності складемо допоміжну табл. 4.7.

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{y}_j)^2}{n-(k+1)} = 8;$$

$$F_p = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_y^2} = 2{,}0.$$

Таблиця 4.7 – **Допоміжна таблиця для розрахунку** $s_{\text{ад}}^2$

| Номер досліду | $y_j$ | $\hat{y}_j$ | $y_j - \hat{y}_j$ | $(y_j - \hat{y}_j)^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 101 | –1 | 1 |
| 2 | 81 | 79 | +2 | 4 |
| 3 | 95 | 96 | –1 | 1 |
| 4 | 36 | 37 | –1 | 1 |
| 5 | 130 | 130 | 0 | 0 |
| 6 | 69 | 71 | –2 | 4 |
| 7 | 90 | 87 | +3 | 9 |
| 8 | 64 | 66 | –2 | 4 |
| | | | | $\sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{y}_j)^2 = 24$ |

Табличне значення $F_т$ – критерію при 5 % рівні значимості і числах ступенів вільності для чисельника 3 і для знаменника 2 дорівнює 19,2, $F_p < F_m$. Отже, модель адекватна. Отримане рівняння використовуємо для крутого сходження по поверхні відгуку. Круте сходження (табл. 4.8) починаємо з нульової точки (основні рівні): $x_1$ = 0,40; $x_2$ = 840; $x_3$ = 60; $x_4$ – повільне охолодження (шамотний тигель), тому що швидке охолодження приводить до зменшення параметра оптимізації ($b_4$ = –9,4). Крок руху для фактора $x_2$ прийнятий $\Delta_2$ = 10 °С. За формулою (4.28) обчислюємо крок руху для факторів $x_1$ і $x_3$:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \frac{b_1\varepsilon_1}{b_2\varepsilon_2} = 10\frac{20\cdot 0{,}15}{11{,}9\cdot 100} = 0{,}0252,$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \frac{b_3\varepsilon_3}{b_2\varepsilon_2} = 10\frac{(-5{,}1)60}{11{,}9\cdot 100} = -2{,}57.$$

Кращий результат отриманий у 11 експерименті. Величина параметра оптимізації задовольнила дослідників, і робота була закінчена. Таким чином, потрібно було провести 12 експериментів для того, щоб визначити оптимальні умови модифікування алюмінію молібденом.

Коли припускається, що круте сходження, почате в нульовій точці, сповільнюється через спуск на дно западини (рис. 4.13), рекомендується закінчити рух за градієнтом в деякій критичній точці $x_k^{(0)}$[288], а потім продовжити пошук методом кроків по впадині. В цьому випадку рекомендується розділити всі фактори умовно на дві групи: 1) фактори, зміна яких значно впливає на функцію цілі; 2) фактори, вплив яких незначний.

**Таблиця 4.8 – Параметри крутого сходження по поверхні відгуку**

| Найменування | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Основний рівень | 0,40 | 840 | 60 | – | – |
| Коефіцієнт $b_i$ | 20 | 11,9 | –5,1 | –9,4 | – |
| Інтервал варіювання $\varepsilon_i$ | 0,15 | 100 | 60 | – | – |
| $b_i x \varepsilon_i$ | 3 | 1190 | –306 | – | – |
| Крок $\Delta_i$ | 0,0252 | 10 | –2,57 | – | – |
| Округлений крок | 0,03 | 10 | –3 | – | – |
| Уявний дослід | 0,43 | 850 | 57 | Шамотний тигель | – |
| Те саме | 0,46 | 860 | 54 | Те ж | – |
| Реалізований дослід 9 | 0,49 | 870 | 51 | “ | 108 |
| Уявний дослід | 0,52 | 880 | 48 | “ | – |
| Те саме | 0,55 | 890 | 45 | “ | – |
| Реалізований дослід 10 | 0,58 | 900 | 42 | “ | 196 |
| Реалізований дослід 11 | 0,61 | 910 | 39 | “ | 366 |
| Реалізований дослід 12 | 0,64 | 920 | 36 | “ | 313 |

Потім з критичної точки здійснюють крок в напрямку максимальної зміни тих факторів, які найбільше впливають на критерій оптимізації, і знаходять деяку точку $x^{(1)}$. З цієї точки знову ведуть рух по градієнту з метою пошуку оптимуму до тієї пори, поки не попадуть в нову критичну точку $x_k^{(2)}$, яка знаходиться на дні западини. Дві знайдені критичні точки з'єднують прямою лінією ($x_k^{(0)} - x_k^{(2)}$), яку продовжують до нової вихідної точки $x^{(3)}$, з якої знову рухаються по градієнту до наступної критичної точки $x_k^{(4)}$ і т. д.

*Метод релаксації* заснований на русі до оптимуму в напрямку осей координат, вздовж яких функція цілі змінюється (зменшується чи зростає) найбільш істотно.

---

[288] Верхній індекс відповідає номеру кроку при русі до оптимуму.

В початковій точці пошуку визначають частинні похідні функції цілі по всім незалежним змінним, а потім вибирають з них похідну, яка є найбільшою за модулем (рис.4.14).

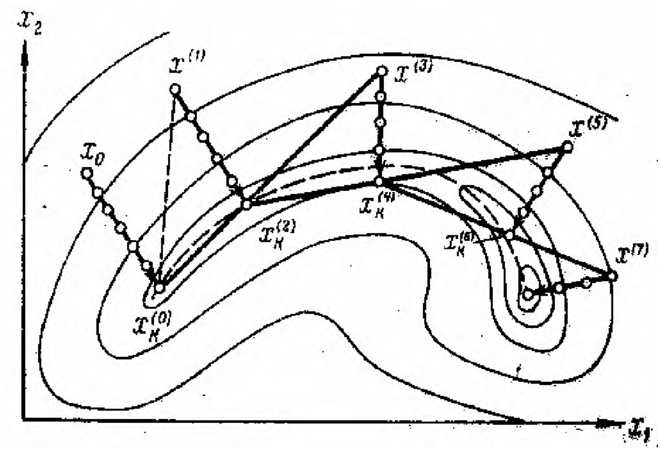



Рис. 4.13 – **Схема руху до оптимуму кроками по впадині**

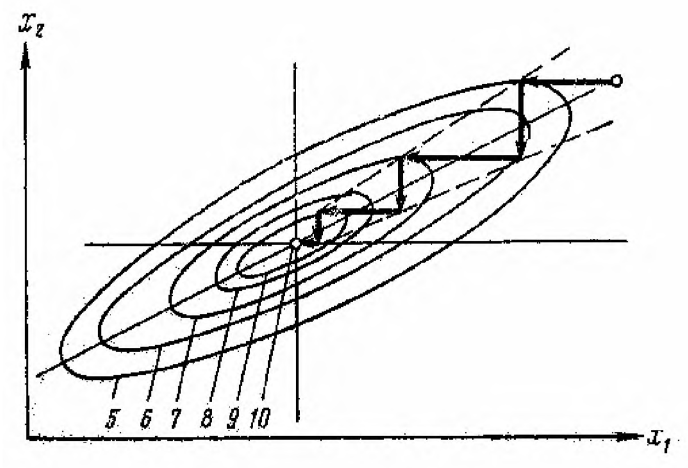



Рис. 4.14 – **Схема пошуку оптимуму методом релаксації при різній орієнтації системи координат**

В задачах мінімізації функції цілі кроки в напрямку її убування здійснюють до тієї пори, поки значення критерію оптимізації по вибраному осьовому напрямку стануть мінімальними.

Алгоритм руху (спуску) для кожного вибраного осьового напрямку має вигляд:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h \cdot sign\left[\frac{\partial y(x)}{\partial x_i^{(k)}}\right], \tag{4.29}$$

де $x_i^{(k+1)}$ – значення фактора в наступній точці;

$x_i^{(k)}$ – значення фактора в початковій точці;

$h$ – величина кроку;

$sign$ – функція знаку;

$\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_i^{(k)}}$ – значення похідної функції в початковій точці, де останній раз знаходили похідні цільової функції.

Критерієм закінчення пошуку часто служить момент досягнення точки, яка характерна тим, що при русі з неї по будь-якому осьовому напрямку не відбувається подальше зниження величини критерію оптимізації. Деколи критерієм закінчення пошуку є умова досягнення позитивності всіх похідних функції цілі по допустимим осьовим напрямкам.

*Приклад.* Необхідно знайти мінімальне значення критерію оптимізації в двохвимірному просторі при відомому математичному описанні об'єкта досліджень у вигляді рівняння другого порядку (рис. 4.15):

$$y = x_1^2 + x_2^2 + 1{,}2x_1x_2 . \qquad (4.30)$$

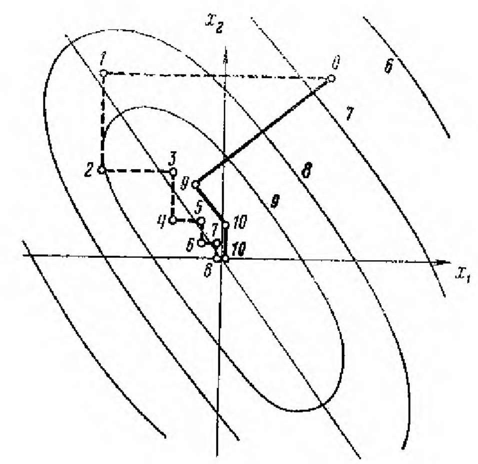



Рис. 4.15 – **Схема пошуку оптимуму методом релаксації (0-1-2-3-4-5-6-7-8) і методом найшвидшого спуску (0-9-10-8)**

Критерій оптимізації у вихідній точці дорівнював 7,4; ця точка мала наступні координати: $x_1^{(0)} = 1$; $x_2^{(0)} = 2$. Пошук вели спочатку в напрямку осі $x_1$, у зв'язку з чим зберігали значення $x_2^{(0)} = 2$ постійним:

$$y_1 = x_1^2 + 4 + 2{,}4x_1 .$$

Мінімум цієї функції знаходили з умови:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 2x_1 + 2{,}4 = 0 ; \; x_1^{(1)} = -1{,}2 .$$

В новій точці закріпляли на постійному рівні фактор $x_1$; координати точки наступні $x_1^{(1)} = -1{,}2$; $x_2^{(1)} = x_2^{(0)} = 2$. Значення критерію оптимізації знизилось до 2,56. Далі вели рух в напрямку осі $x_2$ з урахуванням нового рівняння для функції цілі:

$$y_2 = 1{,}44 + x_2^2 - 1{,}44 x_2 .$$

Мінімум функції цілі знайшли з умови:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 2x_2 - 1{,}44 = 0; \; x_2^{(2)} = 0{,}72 .$$

Координати нової точки: $x_1^{(2)} = x_1^{(1)} = -1{,}2$; $x_2^{(2)} = 0{,}72$. Величина критерію оптимізації зменшилась до 0,92. Після цього рух знову вели вздовж осі $x_1$, потім знову вздовж осі $x_2$ і т. д.

В підсумку після восьми циклів встановили мінімальне значення критерію оптимізації, яке становило 0,0005. Результати пошуку наведені в табл. 4.9.

Таблиця 4.9 – **Результати пошуку мінімального значення критерію оптимізації методом релаксації**

| Номер циклу | Фактори | | $y$ |
|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | |
| 0 | 1 | 2 | 7,4 |
| 1 | –1,2 | 2 | 2,56 |
| 2 | –1,2 | 0,72 | 0,92 |
| 3 | –0,43 | 0,72 | 0,09 |
| 4 | –0,43 | 0,26 | 0,30 |
| 5 | –0,16 | 0,26 | 0,011 |
| 6 | –0,16 | 0,093 | 0,037 |
| 7 | –0,55 | 0,093 | 0,0013 |
| 8 | –0,55 | 0,033 | 0,0005 |

При пошуку оптимуму *методом найшвидшого спуску* рух ведуть в напрямку градієнта циклами по декілька кроків в кожному до моменту знаходження мінімального значення функції. Для знаходження значень незалежних змінних (нових координат) в кожній наступній точці використовують формули:

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} - h \cdot sign\left(\frac{\partial y}{\partial x_1^{(0)}}\right). \tag{4.31}$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h \cdot sign\left(\frac{\partial y}{\partial x_2^{(0)}}\right) \qquad (4.32)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h \cdot sign\left(\frac{\partial y}{\partial x_k^{(0)}}\right). \qquad (4.33)$$

Ці рівняння можна виразити в загальному вигляді:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \Theta\left(\frac{\partial y}{\partial x_i^{(k)}}\right), \qquad (4.34)$$

де $\Theta$ – коефіцієнт пропорційності (при русі до максимуму знак потрібно змінити на протилежний);

$\frac{\partial y}{\partial x_i^{(k)}}$ – частинні похідні функції цілі в початковій точці.

Координати точки мінімуму функції цілі у напрямку антиградієнта (наступної точки спуску) визначають шляхом визначення частинних похідних функції цілі по змінним, підстановки отриманих значень похідних у вирази для координат наступної точки, підстановки цих виразів у рівняння функції цілі, диференціювання отриманої функції за $\Theta$, отримання розрахункового значення $\Theta$ з умови рівності похідної нулю і підстановки його у вихідні рівняння для координат наступної точки.

*Приклад.* Необхідно знайти мінімальне значення критерію оптимізації при описанні об'єкта досліджень з попереднього прикладу.

Значення частинних похідних функції цілі для початкової точки (з координатами $x_1^{(0)} = 1$; $x_2^{(0)} = 2$) дорівнюють:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1^{(0)}} = 2x_1 + 1{,}2x_2 = 2 \cdot 1 + 1{,}2 \cdot 2 = 4{,}4;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2^{(0)}} = 2x_2 + 1{,}2x_1 = 2 \cdot 2 + 1{,}2 \cdot 1 = 5{,}2.$$

З урахуванням рівнянь вищенаведених значень похідних знаходились координати точки, в яку потрібно було переходити з початкової точки:

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \Theta\left(\frac{\partial y}{\partial x_1^{(0)}}\right) = 1 - 4{,}4 \cdot \Theta;$$

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \Theta\left(\frac{\partial y}{\partial x_2^{(0)}}\right) = 1 - 5{,}2 \cdot \Theta.$$

Попасти в цю точку можна при русі з вихідної точки по антиградієнту з кроком, величина якого визначається наступним чином.

Підставивши у вихідне рівняння координати нової точки, знаходимо функцію:

$$f_1(\Theta) = (1-4{,}4\Theta)^2 + (1-5{,}2\Theta)^2 + 1{,}2(1-4{,}4\Theta)(1-5{,}2\Theta) = 82{,}9\Theta^2 - 46{,}4\Theta + 7{,}4\,.$$

В даному випадку функція цілі перетворилась в функцію від однієї змінної $\Theta$, тому що рух іде по вже вибраному напрямку (по градієнту).

Екстремальне значення функції $f_1(\Theta)$ знаходять після розрахунку похідної цієї функції ($\Theta$ завжди має позитивне значення, оскільки росте від 0):

$$f_1'(\Theta) = 2 \cdot 82{,}9\Theta - 46{,}4 = 0\,;$$

$\Theta_1 = 0{,}28$ – найкраще значення $\Theta$ на першому кроці. З урахуванням встановленого значення $\Theta_1$ система рівнянь приймає наступний вигляд:

$$x_1^{(1)} = 1 - 4{,}4 \cdot 0{,}28 = -0{,}23\,;$$

$$x_2^{(1)} = 1 - 5{,}2 \cdot 0{,}28 = 0{,}54\,.$$

Знаючи координати першої точки (після початкової), визначаємо величину функції цілі для нової точки:

$$y = (-0{,}23)^2 + 0{,}54^2 - 1{,}2 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}54 = 0{,}3\,.$$

Із знайденої точки здійснюється другий крок при застосуванні аналогічної схеми розрахунків:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1^{(1)}} = 2x_1 + 1{,}2x_2 = 2 \cdot (-0{,}23) + 1{,}2 \cdot 0{,}54 = -0{,}19\,;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2^{(1)}} = 2x_2 + 1{,}2x_1 = 2 \cdot 0{,}54 + 1{,}2 \cdot (-0{,}23) = 0{,}81\,;$$

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} - \Theta\left(\frac{\partial y}{\partial x_1^{(1)}}\right) = -0{,}23 + 0{,}19\Theta\,;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} - \Theta\left(\frac{\partial y}{\partial x_2^{(1)}}\right) = 0{,}54 - 0{,}81 \cdot \Theta\,;$$

$$f_2(\Theta) = (-0{,}23 + 0{,}19\Theta)^2 + (0{,}54 - 0{,}81\Theta)^2 + 1{,}2(-0{,}23 + 0{,}19\Theta)(0{,}54 - 0{,}81\Theta) =$$
$$= 0{,}5\Theta^2 - 0{,}63\Theta + 0{,}3.$$

$$f_2'(\Theta) = 2 \cdot 0{,}5\Theta - 0{,}63 = 0\,;$$

$\Theta_{max} = 0{,}63$; це значення коефіцієнта $\Theta$ приймається для розрахунку руху при другому кроці з урахуванням наведених вище рівнянь:

$$x_1^{(2)} = -0{,}23 + 0{,}19 \cdot 0{,}63 = -0{,}11\,;$$

$$x_2^{(2)} = 0{,}54 - 0{,}81 \cdot 0{,}63 = 0{,}038\,.$$

Використовуючи відомі значення координат, знаходимо величину функції цілі в розглядуваній точці:

$$y = (-0{,}11)^2 + 0{,}038^2 - 1{,}2 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}038 = 0{,}0085\,.$$

Таким чином, рух методом найшвидшого спуску привів практично до оптимуму уже після двох кроків.

Якщо математичне описання об'єкта досліджень невідоме, то проводять експеримент в початковій точці і, як мінімум, двох точках, розташованих на лініях, паралельних координатним осям, що відповідають факторам. Після цього знаходять значення координат наступної точки, що знаходиться на градієнті:

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\Theta}{\Delta_1}\left(y(x_1^k + \Delta_1) - y(x_1^k)\right); \tag{4.35}$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\Theta}{\Delta_2}\left(y(x_2^k + \Delta_2) - y(x_2^k)\right), \tag{4.36}$$

де $\Delta_1$, $\Delta_2$ – інтервали зміни факторів в іменованих величинах, $\Theta$ – крок.

Спочатку ведуть рух з вихідним кроком, рівному 10% від діапазону зміни відповідного фактора.

Рух з цим кроком продовжують до тих пір, поки для двох останніх значень цільової функції не виконується умова $y(x^{(k+1)}) < y(x^{(k)})$. Якщо виявиться, що ця умова перестає виконуватися, то крок зменшують в два рази і починають рух в зворотному напрямку з останньої точки.

Допускають зменшення кроку до величини, яка не менше заданої точності вимірювань, а потім рух зупиняють і шукають новий напрямок.

*Приклад.* Необхідно знайти мінімальне значення критерію оптимізації при невідомому математичному описанні об’єкту досліджень. Результати попереднього експерименту занесені в табл. 4.10.

З урахуванням експериментальних даних знаходили значення координат точки, що знаходиться на градієнті (рис. 4.16):

$$x_1^{(6)} = x_1^{(0)} - \frac{\Theta}{\Delta}\left(y^{(3)} - y^{(0)}\right) = 50 - \frac{0{,}5}{5}(850 - 900) = 10\,;$$

$$x_2^{(6)} = x_2^{(0)} - \frac{\Theta}{\Delta}\left(y^{(5)} - y^{(0)}\right) = 50 - \frac{0{,}5}{5}(1000 - 900) = 55\,.$$

Тут $\Delta$ – інтервал зміни фактора в іменованих величинах, $\Theta$ – крок.

Таблиця 4.10 – **Вихідні дані для пошуку мінімального значення критерію оптимізації**

| Номер досліду | Значення факторів | | | | Критерій оптимізації |
|---|---|---|---|---|---|
| | кодовані | | іменовані | | |
| | $x_1$ | $x_2$ | $a$ | $b$ | |
| 1 | 0 | 0 | 5 | 65 | 900 |
| 2 | –1 | 0 | 0 | 65 | 1000 |
| 3 | +1 | 0 | 10 | 65 | 850 |
| 4 | 0 | –1 | 5 | 60 | 840 |
| 5 | 0 | +1 | 5 | 70 | 1000 |

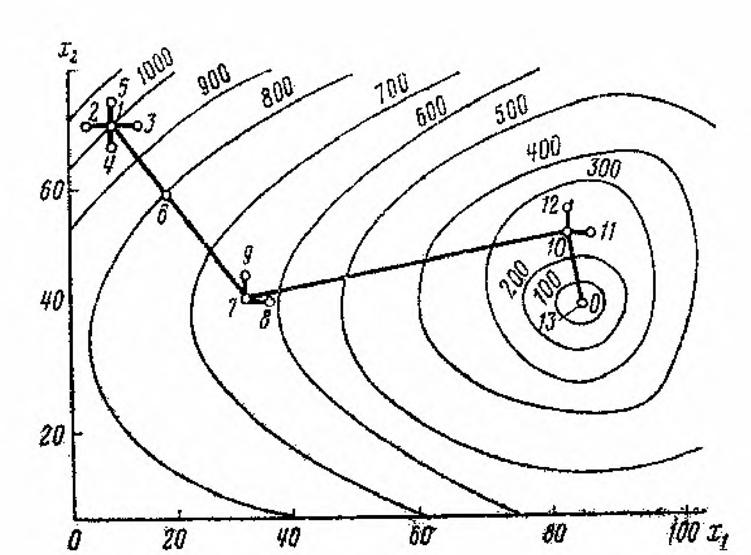



Рис. 4.16 – **Схема руху до оптимуму методом найшвидшого спуску**

Після ряду кроків з точки 6 прийшли в точку 7, яка відповідала локальному екстремуму (мінімальному значенню критерію оптимізації при русі у вибраному напрямку).

В районі точки 7 було вирішено поставити додатковий експеримент (точки 8 і 9), з урахуванням якого знайшли новий напрямок руху по градієнту (в точку 10).

Потім знову проводили експеримент (точки 11 і 12) і рухались в напрямку нового градієнту. Це дозволило знайти область оптимуму.

## 4.4 Обмін даними між Excel і Mathcad

Існує кілька шляхів *імпортування даних з MS Excel в Mathcad*. Найпростіший спосіб полягає в наступному:

– копіюється діапазон комірок робочого листа Excel, в якому містяться імпортовані дані;

– скопійовані дані вставляються в Mathcad на місце значення деякої змінної.

В результаті, визначеній змінній буде відповідати масив імпортованих даних.

Імпорт даних з Excel може використовуватися не тільки при безпосередній обробці в Mathcad деякою інформацією, що знаходиться в документах Excel, а й при початковому рішенні задач в Mathcad, якщо необхідно вводити великий обсяг даних, наприклад, вручну формувати масив з великого числа значень. В такому випадку набагато зручніше ввести потрібні значення в Excel, а потім імпортувати цей масив даних в Mathcad.

Крім простого копіювання і вставки даних, в Mathcad існують спеціальні інструменти, що дозволяють працювати з даними Excel та інших програм. Один з таких інструментів – функція READFILE. Механізм дії цієї функції відображений на рис. 4.17.

У верхній частині рис. 4.17 показана частина документу excel.xls, що містить потрібні дані. У нижній – частина документу Mathcad з імпортованими даними. Змінній А присвоюється значення функції READFILE. Першим аргументом функції READFILE є шлях до файлу з даними; другий аргумент – тип даних, що імпортуються, в нашому випадку Excel; третій аргумент – діапазон рядків імпортованих даних, причому, якщо вказати просто певну кількість, то імпортуватися будуть всі рядки, починаючи з номера, що відповідає зазначеному числу; четвертий – діапазон стовпців. У функції READFILE є ще два аргументи, colwidths і emptyfill, які в нашому випадку були опущені, – докладніше про них можна прочитати в довідковій системі Mathcad.

Другий інструмент імпортування викликається через меню Insert -> Data -> Table. Створюється найпростіша таблиця 2 х 2. Для того щоб імпортувати дані, потрібно клікнути по верхній лівій комірці правою кнопкою миші і вибрати в контекстному меню пункт «Import». Далі, за допомогою кнопки «Browse» вибрати потрібний файл Excel, натиснути «Далі», потім вибрати потрібний діапазон комірок і натиснути «Готово». Імпортовані дані потрібно присвоїти деякій змінній.

| | A |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |
| 7 | 7 |
| 8 | 8 |
| 9 | 9 |

$$A := \mathrm{READFILE}\left[\text{"E:\textbackslash excel.xls"}, \text{"Excel"}, \begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{pmatrix}$$

Рис. 4.17 – **Функція READFILE**

Схожим способом інформація імпортується з допомогою Insert -> Data -> File Input. Відмінність від попереднього способу полягає в тому, що зміна імпортованих даних в первісному документі Excel буде відображатися і при перерахунку листа Mathcad. Функція READFILE також реагує на оновлення початкових даних. Якщо ж використовується інструмент Insert -> Data -> Table, то дані імпортуються один раз і потім не оновлюється. Також є відмінності у відображенні даних за допомогою File Input, але в цілому вони не істотні.

Нарешті, Insert -> Data -> Data Import Wizard поєднує в собі особливості попередніх двох способів, тільки сам процес імпортування видається більш наочним.

Важливим інструментом обміну даними з Excel є використання компонентів. Викликається цей інструмент в меню Insert -> Component. У вікні «Component Wizard» вибираємо «Microsoft Excel», потім так як дані потрібно імпортувати, то вибираємо за допомогою кнопки «Browse» потрібний файл. На наступному етапі в розділах «Inputs» і «Outputs» потрібно визначити кількість вхідних і вихідних змінних і діапазон комірок, яким ці змінні будуть відповідати. Використання компонента Excel представлено на рис. 4.18.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C := A + B = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$S :=$ $\qquad\qquad$ $S = 90$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 10 | |
| 2 | 10 | |
| 3 | 10 | |
| 4 | 10 | |
| 5 | 10 | |
| 6 | 10 | |
| 7 | 10 | |
| 8 | 10 | |
| 9 | 10 | |
| | 90 | |

C

Рис. 4.18 – **Використання компоненту Excel**

На рис. 4.18 масив A - матриця, імпортована в Mathcad з файлу excel.xls за допомогою функції READFILE. B – матриця, введена в Mathcad, C – сума цих матриць. Далі створювався компонент Excel з файлу excel.xls. Визначалася одна вхідна змінна C, якій встановлювалося відповідність з клітинкою B1 (для вхідної змінної можна вказувати тільки ліву верхню клітинку). Вихідна змінна S відповідає клітинці B10, в якій обчислюється сума клітинок B1: B9 (сума значень матриці C).

*Запитання і завдання для самоконтролю*

1. У чому полягає основна мета експерименту?

2. У чому полягає різниця між пасивним та активним експериментом?

3. Які параметри в теорії експерименту називають факторами?
4. Які змінні параметри можна обирати в якості факторів при проведенні активного експерименту?
5. Які параметри в теорії експерименту називають відгуками?
6. Що таке матриця експерименту?
7. Скільки рядків містить матриця повного двохфакторного експерименту першого порядку?
8. Що називають інтервалом варіювання факторів?
9. Як визначаються кодовані значення факторів?
10. Які рівні варіювання факторів обирають для повного факторного експерименту першого порядку?
11. Скільки рядків містить матриця повного ротатабельного двохфакторного експерименту другого порядку?
12. Які рівні варіювання факторів обирають для повного факторного ротатабельного експерименту другого порядку?
13. З якою метою проводять паралельні досліди?
14. За яким критерієм визначають необхідне число паралельних дослідів?
15. Як визначається дисперсія відтворюваності?
16. Як визначається дисперсія адекватності?
17. Як визначають однорідність дисперсій в експерименті?
18. За яким критерієм перевіряється однорідність дисперсій в експерименті?
19. Які коефіцієнти рівняння регресії є значимими?
20. Які коефіцієнти рівняння регресії є не значимими?
21. Як здійснюється перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії?
22. Яка регресійна модель називається адекватною?
23. За яким критерієм перевіряється адекватність регресійних моделей?
24. Які існують пошукові методи оптимізації?
25. Що називають крутим сходження по поверхні відгуку?
26. З якою метою використовують метод релаксації?
27. У чому полягає сутність методу найшвидшого спуску?
28. Які функції Mathcad використовуються при обробці результатів експериментів?
29. Як здійснюється імпортування даних з MS Excel в Mathcad?

# 5 ОСНОВИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ

Інтелектуальна власність (ІВ) – це права на результати розумової, творчої діяльності в науковій, художній, виробничій та інших областях діяльності. ІВ є об'єктом цивільно-правових відносин стосовно права кожного володіти, користатися та розпоряджатися результатами своєї інтелектуальної творчої діяльності, які є правом нематеріальним, зберігаються за його творцями та можуть використовуватися іншими особами лише за узгодженням з ним, за винятком випадків, передбачених законом.

## 5.1 Право інтелектуальної власності

Особливістю права ІВ є його подвійна природа – економічна і духовна. Право ІВ містить:

– особисте немайнове право творця на створений ним продукт інтелектуальної праці;

– майнове право на цей продукт (тобто право власності на матеріальне втілення).

*Особисте немайнове (або моральне) право* належить тільки творцю, тобто фізичній особі. До нього відносяться:

– право на визнання людини творцем (автором, виконавцем, винахідником тощо) об'єкта права ІВ (ОПІВ);

– право перешкоджати будь-якому посяганню на право ІВ, здатному завдати шкоди честі та репутації творця ОПІВ.

– інші особисті немайнові права ІВ, встановленні законом стосовно певного об'єкта ІВ.

Особисті немайнові права невід'ємні від автора, тобто не відчужуються і не передаються. Вони належать автору незалежно від його майнових прав і зберігаються за автором у випадку переходу його майнових прав до іншої особи. Немайнове право діє без обмежень у часі.

До *майнового права* відносяться:

– право на використання ОПІВ;

– виключне право дозволяти використання ОПІВ;

– виключне право перешкоджати неправомірному використанню ОПІВ, в тому числі забороняти таке використання;

– інші майнові права, встановлені законом стосовно певного об'єкта права ІВ.

Під виключним правом розуміють лише майнові права. Виключне право – абсолютне право на нематеріальний об’єкт, для якого воно виконує ту саму функцію, що й право власності для матеріальних об’єктів.

Майнове право може належати творцю (автору) або іншій фізичній чи юридичній особі, тобто є від’ємним від людини чи підприємства. Майнові права можуть бути предметом договору застави, бути вкладом у статутний капітал, можуть бути передані повністю або частково іншій особі згідно договору.

Майнове право має часові та територіальні обмеження. Наприклад, право на винахід діє протягом 20 років і тільки на території країни, патентним відомством якої видало патент.

Право інтелектуальної власності є непорушним. Ніхто не може бути позбавлений права ІВ чи обмежений у його здійсненні, крім випадків передбачених законом.

Право ІВ та право власності на річ не залежать одне від одного. Перехід права на ОПІВ не означає переходу права власності на річ і навпаки.

Порушення права інтелектуальної власності можливе:

– у формі дій (посягання на право інтелектуальної власності);

– у формі бездіяльності (невизнання права інтелектуальної власності органами, через які у встановлених законом випадках має проводитися легітимація результатів інтелектуальної, творчої діяльності);

– у змішаній формі (невизнання права інтелектуальної власності з наступним незаконним використанням тим же суб'єктом результатів чужої інтелектуальної, творчої діяльності).

Порушенням права інтелектуальної власності визнається також ввезення на митну територію України виробів (товарів), в яких використано об'єкти права інтелектуальної власності, що захищаються на території України, без дозволу суб'єкта права інтелектуальної власності, з порушенням цього права незалежно від того, захищалися чи захищаються ці об'єкти в країнах походження.

Порушником права інтелектуальної власності може бути фізична або юридична особа.

Матеріальним наслідком порушення права інтелектуальної власності є поява контрафактних виробів, тобто продукції (товарів), вироблених з використанням об'єкта права інтелектуальної власності і реалізованих в межах України з порушенням права на них. Контрафактними вважаються також вироби, які виготовлені законно, але розповсюджені з порушенням права суб'єкта інтелектуальної власності.

Загальні засади захисту права інтелектуальної власності від порушень встановлені Цивыльним кодексом Украъни, який зазначає, що таке право є непорушним. Воно належить його володільцю як природне право, внаслідок чого ніхто не може бути позбавлений права інтелектуальної власності чи обмежений у його здійсненні, крім випадків, передбачених законом.

Відповідно до цих засад, які у свою чергу грунтуються на положеннях Конституції, захист права інтелектуальної власності здійснюється судом. Інститути права ІВ визначаються видом творчої діяльності.

У 1967 році у Стокгольмі була підписана Конвенція, яка заснувала Всесвітню організацію ІВ (ВОІВ). У цій Конвенції дано перелік видів діяльності, права на які віднесено до ІВ.

Право ІВ має три самостійні інститути, які відрізняються за об'єктами та суб'єктами права (рис. 5.1).


Рис. 5.1 – **Класифікація об'єктів права інтелектуальної власності**

Як видно з рис. 5.1 до ОПІВ належать:

– право на об’єкти промислової власності (за сферою використання результатів);

– право на нетрадиційні об’єкти ІВ.

– авторське право та суміжні права.

Промислова власність стосується безпосередньо результатів творчої діяльності, які використовуються у промисловості, сільському господарстві, торгівлі.

Термін «промислова власність» не розповсюджується на об’єкти рухомої чи нерухомої власності, які задіяні у виробництві (обладнання, споруди, транспорт тощо). Поняття промислової власності визначено Паризькою конвенцією про охорону промислової власності.

Авторське право та суміжні права регулюють відносини, які виникають у зв’язку із створенням і використанням літературних, музичних та художніх творів, наукових праць тощо. Англійською мовою авторське право позначають терміном «копірайт» (copyright), бо історично в першу чергу малося на увазі, що право дати дозвіл на виготовлення копій твору може лише автор або його правонаступник.

Суміжними називають права на такі об’єкти, як виконавська діяльність артистів, фонограми і т. ін. Поєднання цих двох груп правових відносин пояснюється їх тісною взаємозалежністю та одними й тими самими законами, що регулюють відповідні відносини.

## 5.2 Система правової охорони інтелектуальної власності

Сучасну законодавчу базу України у сфері ІВ складають Конституція України (ст. 41, 42, 46, 54) і Кодекси України, зокрема:

– Цивільний кодекс (книга IV «Право інтелектуальної власності», книга V «Зобов’язувальне право») та Цивільний процесуальний кодекс;

– Господарський кодекс та Господарський процесуальний кодекс;

– Кримінальний кодекс та Кримінально-процесуальний кодекс;

– Кодекс про адміністративні правопорушення;

– Митний кодекс;

– Кодекс законів про працю.

Спеціальні закони України, стосовно:

– охорони прав на винаходи і корисні моделі;

– охорони прав на промислові зразки;

– охорони прав на знаки для товарів і послуг;

– охорони прав на зазначення походження товарів;

–охорони прав на сорти рослин;

– племінної справи в тваринництві;

– охорони прав на топографії інтегральних мікросхем;

– авторського права і суміжних прав;

– захисту від недобросовісної конкуренції;

– захисту економічної конкуренції;

– розповсюдження примірників аудіовізуальних творів та фонограм;

– особливостей державного регулювання діяльності суб’єктів господарювання, пов’язаної з виробництвом, експортом, імпортом дисків для лазерних систем зчитування.

Окремі норми, що стосуються ІВ, містяться в багатьох інших законах України. Наприклад, Закон України «Про оцінку майна, майнових прав і професійну оціночну діяльність в Україні», який набрав чинності у 2002 році, передбачає оцінку вартості прав на ОПІВ. Інститут інтелектуальної власності і права готує професійних оцінювачів прав на ОПІВ за умови наявності вищої освіти та досвіду роботи оцінювачем.

Укази та розпорядження Президента, постанови Кабінету Міністрів України, відомчі підзаконні акти тощо.

Загалом – 37 законів та 100 підзаконних актів.

У разі, коли треба врегулювати спори щодо прав на ОПІВ між фізичними або юридичними особами України та іноземних країн, верховенство перед національними законами мають міжнародні договори, до яких приєдналася Україна.

Для координації діяльності органів виконавчої влади у сфері охорони ІВ створено у лютому 2000 року міжвідомчий комітет з проблем захисту прав на ОІВ при Кабінеті Міністрів, а у 2002 році – Державний департамент ІВ Міністерства освіти і науки України, з 2011 року реорганізований у Державну службу інтелектуальної власності України (далі – Державна служба). Державна служба є центральним органом виконавчої влади, основною функцією якого є забезпечення державної політики у сфері ІВ, прогнозування та визначення перспектив та напрямів розвитку у сфері ІВ, розроблення пропозицій щодо нормативно-правової бази функціонування державної системи охорони ІВ, забезпечення умов введення ІВ до господарського обігу, координація підготовки кадрів, міжнародне співробітництво. Державна служба здійснює державну реєстрацію та ведення державних реєстрів щодо ОПІВ, видачу охоронних документів, реєстрацію договорів про передачу прав на об’єкти ІВ, що охороняються на території України, та ліцензійних договорів, організовує розгляд заяв та скарг щодо видачі охоронних документів на ОПІВ.

Державне підприємство «Український інститут промислової власності» (Укрпатент) – здійснює експертизи заявок на об’єкти промислової власності на предмет відповідності умовам правової охорони і видає експертні висновки. Укрпатент займається інформаційним забезпеченням функціонування системи охорони промислової власності, зокрема формуванням фондів національної патентної документації та міжнародним обміном патентною інфор- мацією із зарубіжними патентними відомствами на основі сучасних інформа- ційних технологій, приймає участь у розробці пропозицій щодо вдосконалення законодавства в сфері охорони промислової власності.

На сайті Укрпатенту є гіперпосилання на доступні джерела патентної інформації. Зараз патентне відомство кожної країни намагається подати на сайті загального користування свій повний національний патентний фонд.

Патентна інформація подається також у комерційних мережах Інтернету. Укрпатент має філію – Український центр інноватики та патентно-інформаційних послуг, який на комерційній основі надає консультації та послуги у вирішенні питань, що стосуються сфери промислової власності.

Ці послуги включають:

– складання комплекту документів для подання заявки на одержання правової охорони об’єкту промислової власності (ОПВ) в Україні та за її межами;

– відповіді на запити експертизи за поданими заявками;

– дотримання інтересів правовласників при складанні договорів про передачу прав на ОПВ, ліцензійних договорів про їх використання.

Державне підприємство «Українське агентство з авторських та суміжних прав» (УААСП) своєю головною функцією має колективне управління майновими правами авторів, за бажанням автора здійснює державну реєстрацію об’єктів АСП (авторських та суміжних прав); здійснює допомогу щодо захисту прав авторів та суб’єктів суміжних прав України та інших країн у разі їх порушень, допомагає в укладанні ліцензійних угод.

УААСП укладає угоди з юридичними та фізичними особами на управління майновими правами на колективній основі, формує каталоги вітчизняних та закордонних авторів; здійснює збір та розподіл авторської винагороди з користувачів творів, з якими укладає угоди, за публічне використання творів (сповіщення, показ, виконання, відтворення, імпорт) на всій території України. Збором авторської винагороди займаються інспек- тори ДПС УААСП, які працюють у регіонах.

Суб’єкти права можуть управляти своїми правами особисто, через свого повіреного або через організацію колективного управління (ОКУ). Існують різні види ОКУ за категоріями відповідних творів(музика, драматичні твори, мультимедійні продукти тощо). ОКУ від імені та за дорученням своїх членів узгоджують розмір винагороди та умови використання і з користувачами надають ліцензії на право використання, збирають та розподіляють винагороду. Правовласники безпосередньо не приймають участі у цих діях.

Державні інспектори з питань ІВ здійснюють систематичний державний контроль за дотриманням суб'єктами господарювання вимог законодавства у сфері ІВ, та сфері виробництва, експорту, імпорту дисків для лазерних систем зчитування. Мають право перевіряти всю документацію, пов'язану з діяльністю у сфері ІВ, та всю підприємницьку діяльність, пов'язану з дисками для лазерного зчитування, і їх облік.

Особливе місце займає Всеукраїнська асоціація патентних повірених України. Саме через патентних повірених здійснюється патентування вітчизняних винаходів за кордоном і навпаки. Патентні повірені надають також послуги фізичним і юридичним особам в питаннях правової охорони, використання та захисту прав на ОПІВ.

З охороною ІВ пов'язана діяльність низки міністерств та відомств:

– Антимонопольний комітет (захист від недобросовісної конкуренції, пов'язаної з неправомірним використанням ОПІВ);

– Міністерство юстиції України (координує законотворчу діяльність, відповідає за адаптацію українського законодавства до міжнародного, зокрема, Європейського союзу);

– МВС України (попередження та розкриття злочинів, пов'язаних з порушенням прав ІВ, зокрема – попередження та викриття фактів розмноження та розповсюдження контрафактної аудіовізуальної продукції, неліцензованого комп'ютерного забезпечення, розповсюдження фальсифікованої продукції з незаконним використанням товарних знаків). При державній службі боротьби з економічною злочинністю створено у 2001 році підрозділи по боротьбі з порушеннями у сфері ІВ;

– Державна податкова адміністрація (контроль над нарахуванням та сплатою податків при ввезенні та виробництві (складанні) аудіо- та відеоапаратури на території України, вилучення та знищення котрафактної продукції, захист ІВ, в т. ч. авторських прав на аудіо- та відеопродукцію, виявлення та припинення підпільного виробництва);

– Державна митна служба (держконтроль над дотриманням законодавства, захистом прав споживачів). У 2006 р. до Митного кодексу були внесені зміни, які узгодили митне законодавство України з вимогами угод СОТ, зокрема, угоди TRIPS, і суттєво змінили ситуацію із захистом прав на митному кордоні.

– СБУ (участь в розробці та здійсненні заходів із захисту державних таємниць, сприяє підприємствам та установам у збереженні комерційної таємниці, розголошення якої може завдати шкоди інтересам України, відповідає за голографічний захист товарів і документів і контролює його);

– Державний комітет стандартизації, метрології та сертифікації України (контроль над дотриманням законодавства України про захист прав споживачів і рекламу у цій сфері).

У структурі судової влади у 2001 році створена спеціалізована судова колегія суддів Вищого господарського суду України з розгляду справ, пов’язаних із захистом прав ІВ.

З 31.03.2003 року у Вищому господарському суді України та в апеляційних господарських судах почали діяти спеціалізовані судові палати з розгляду справ у господарських суперечках, пов’язаних із захистом прав на ОПІВ. Запроваджено спеціалізацію суддів у місцевих господарських судах.

Основою міжнародної системи інтелектуальної власності є 23 угоди, які регулюють правовідносини у цій сфері та адмініструються ВОІВ.

Правовідносини у сфері промислової власності регулюють 15 міжнародних договорів, а 8 – у сфері авторського права та суміжних прав.
Ці договори можна поділити наступним чином.

Угоди, що встановлюють міжнародну систему охорони є базовими:

– Паризька Конвенція про охорону промислової власності (1883, Україна – з грудня 1991 р.).

– Угода про закони щодо торгівельних законів (TLT) (1994, Україна – 03.11.95).

– Мадридська угода про санкції за неправдиві та неправильні позначення походження виробів (1891).

– Міжнародна конвенція про захист нових сортів рослин (UPON) (1961, Україна – 03.11.95).

– Вашингтонська угода, про інтелектуальну власність стосовно інтегральних схем (1989, досі не є чинною).

– Найробський договір про охорону олімпійського символу (1981, Україна – 20.12.1995).

– Бернська конвенція про захист літературних і художніх творів (1886, Україна – 25.10.1995).

– Міжнародна конвенція про охорону прав виконавців, виробників фонограм і організацій ефірного мовлення («Римська конвенція”) (1961, Україна – 12.06.2002)

– Женевська конвенція про охорону інтересів виробників фонограм від незаконного відтворення їхніх фонограм (Конвенція про фонограми) (1971, Україна – 19.02.2002).

– Брюссельська конвенція про розповсюдження сигналів, що несуть програми через супутник («Конвенція по супутниках”) (1974).

– Договір ВОІВ про авторське право (ДАП (1996, Україна 06.03.2002).

– Договір ВОІВ про виконання фонограми (ДВФ) (1996, Україна – 20.05.02).

– Договір про патентне право (PLT) (28.04.2005, Україна 31.03.2003).

– Будапештський договір про міжнародне визнання депонування мікроорганізмів з метою патентної процедури (1977, Україна – 02.07.1997).

– Договір про міжнародну реєстрацію аудіовізуальних творів (FRT) (1989).

– Сінгапурський договір про право з торговельних марок (2006, Україна – 15.04.2009).

Угоди, що полегшують отримання охорони одночасно в декількох країнах:

– Договір про патентну кооперацію (РСТ) (1970, Україна – 25.12.1991).

– Мадридська угода про міжнародну реєстрацію знаків (1891, Україна – 25.12.1991).

– Протокол до Мадридської угоди про міжнародну реєстрацію знаків (1989, Україна – 01.06.2000).

– Гаазька угода про міжнародну реєстрацію промислових зразків(1925, Україна – 1925, Україна – 17.01.2002).

– Лісабонська угода про охорону зазначень місця походження виробів та їх міжнародної реєстрації (1958).

Угоди, що встановлюють міжнародні класифікації:

– Локарнська угода про утворення міжнародної класифікації промислових зразків (1968, Україна – 07.07.2009).

– Ніццька угода про міжнародну класифікацію товарів і послуг для реєстрації знаків (1957, Україна – 29.12.2000).

– Страсбурзька угода про Міжнародну патентну класифікацію (1971, Україна – 07.04.2010).

– Віденська угода про утворення міжнародної класифікації зображувальних елементів знаків (1973, Україна – 18.02.2009).

ВОІВ не адмініструє наступні угоди:

– Всесвітня конвенція про авторське право (1952, Україна - 23.12.1993).

– Угода про торгівельні аспекти прав інтелектуальної власності (TRIPS) (1995, Україна – 16.05.2008).

Загалом, Україна приєдналася до більш ніж 20 міжнародних договорів.

У 1967 р. на дипломатичній конференції у Стокгольмі підписана Конвенція, яка заснувала Всесвітню організацію інтелектуальної власності (ВОІВ, міжнародна абревіатура – WIPO). Конвенція визначила мету, функції, структуру ВОІВ.

ВОІВ здійснює управління 24 угодами, які охоплюють основні аспекти інтелектуальної власності. Двома ключовими угодами є Паризька конвенція про охорону промислової власності (1883) та Бернська конвенція про охорону літературних та художніх творів (1886).

ВОІВ співпрацює з міжнародними спілками та організаціями, які поєднують правовласників у сфері авторських та суміжних прав, з організаціями колективного управління.

У 1948 р. на Женевській конференції 23 держави підписали Генеральну угоду з тарифів та торгівлі (GATT) з метою створення правових основ для лібералізації торговельних відносин.

Найважливіші принципи GATT:

– принцип найбільшого сприяння;

– принцип національного режиму;

– захист національної економіки переважно з використанням митних тарифів, а не торговельно-політичними заходами.

Ці принципи були відображені у національних законодавствах країнучасників Угоди.

Подальшим розвитком та результатом перемовин стала Угода, що заснувала у 1993 р. Світову організацію торгівлі (СОТ). Членами СОТ автоматично стали всі країни-учасниці Угоди GATT. СОТ має статус постійно діючої спеціалізованої установи ООН. Членами СОТ є 148 країн, на які припадає ~ 90 % світової торгівлі.

Угода СОТ містить також угоду TRIPS ( від англ. Agreement on Trade Related Aspects of Intellectual Property Rights) з торгівельних аспектів прав інтелектуальної власності, яка є обов’язковою для країн-членів СОТ.

З 16 травня 2008 року Україна є повноправним членом СОТ і, як наслідок, з цієї дати на її території набула чинності Угода про торгівельні аспекти прав інтелектуальної власності (TRIPS).

### 5.3 Об’єкти промислової власності

Об’єкти промислової власності поділяються на об’єкти патентного права і засоби індивідуалізації учасників цивільного обороту, товарів і послуг. До об'єктів патентного права належать: винаходи, корисні моделі і промислові зразки – ті об'єкти, які захищаються патентами. Відповідно до Закону України «Про охорону прав на винаходи і корисні моделі» об'єктом корисної моделі може бути те саме, що й об'єкт винаходу, тобто продукт, спосіб і застосування раніше відомого продукту чи способу за новим призначенням. Але зазвичай як корисні моделі патентуються лише пристрої, а для характеристики корисної моделі використовують ті самі ознаки, що й для об'єкта винаходу «пристрій». Корисні моделі відрізняються від винаходів, головним чином, двома аспектами: по-перше, для корисної моделі не вимагається винахідницький рівень; по-друге, максимальний строк охорони, передбачений законодавством, менший за строк охорони винаходів.

До засобів індивідуалізації учасників цивільного обороту, товарів і послуг відносяться: торговельні марки (знаки для товарів і послуг), географічні зазначення і фірмові найменування.

### 5.3.1 Правова охорона винаходів і корисних моделей

*Винахід* (*корисна модель*) – результат інтелектуальної діяльності людини в будь-якій сфері технології.

*Об'єкти винаходу (корисної моделі):*

– продукти (пристрій, речовина, штам мікроорганізму, культура клітин рослин і тварин тощо);

– процес (спосіб);

– нове застосування відомого продукту чи процесу.

До *пристроїв* належать конструкції та вироби – машини, механізми, прилади, транспортні засоби, інструменти тощо.

*Корисна модель* – це нове і промислово придатне конструктивне виконання пристрою.

До *речовин* відносять індивідуальні хімічні сполуки (характеризують якісним та кількісним складом атомів, зв'язком між атомами та їх взаємним розташуванням у молекулі виражають хімічною формулою або кристалічною решіткою), високомолекулярні сполуки та об'єкти генної інженерії, композиції (сполуки, суміші, сплави, розчини), продукти ядерного перетворення. Для речовин невизначеного складу або невизначеної структури (наприклад, індивідуальна хімічна сполука з невизначеною структурою – антибіотик) вказують ознаки способу одержання.

До індивідуальних штамів відносять штами мікроскопічних грибів, дріжджів, мікроскопічних водоростей, лишайників, безхребетних тварин, неклітинні структури вірусів та фагів, штами, що несуть ДНК (РНК). Патентують також гібридні соматичні культури та клітини рослин і тварин, що культивуються та культивовані клітини, що несуть ДНК (РНК). Не патентуються гени людини, матеріали або речовини, які існують у природі.

До способів як об'єктів винаходів належать процеси виконання дій над матеріальним об'єктом за допомогою матеріальних об'єктів, тобто це дії над сировиною, заготовкою тощо. Традиційно це різні способи механічної обробки, хімічні технології, виробництво та передача енергії, зображень тощо, вплив на рослини та інші об'єкти живої природи з метою покращення їх споживацьких властивостей, підвищення врожайності.

Спосіб – основний об'єкт патентного права в медичній галузі: способи лікування, діагностики, профілактики, прогнозування, дослідження, одержання лікарського препарату тощо. Майже завжди всі ці способи передбачають експериментальні або клінічні дослідження, які підтверджують можливість та доцільність використання.

Дія патенту, що виданий на спосіб, розповсюджується і на продукт, який цим способом отримано.

Нове застосування відомого продукту чи процесу передбачає 3 характерні ознаки конкретно вказаного продукту чи способу:

– призначення, за яким застосувався даний продукт чи спосіб;

– нове призначення;

– позитивні відмінності використання продукту чи способу за новим призначенням.

Згідно з п. 1 ст. 6 закону *«Про охорону прав на винаходи і корисні моделі»* правова охорона надається винаходу (корисній моделі), що не суперечить публічному порядку, принципам гуманності і моралі та відповідає умовам патентоздатності.

Згідно з ч. 3 ст. 6 закону *«Про охорону прав на винаходи і корисні моделі»* не можуть отримати правову охорону як винаходи:

– результати художнього конструювання (охороняються як промислові зразки);

– топографії інтегральних мікросхем (охороняється спеціальним законом);

– сорти рослин і породи тварин (охороняється спеціальним законом);

– біологічні у своїй основі процеси відтворення рослин і тварин, що не належать до небіологічних та мікробіологічних процесів.

Крім цього, у відповідності до п. 2.5 *«Правил складання та подання заявки на винахід та заявки на корисну модель»*, не вважаються винаходами (корисними моделями):

– відкриття, наукові теорії та математичні методи;

– методи інтелектуальної, господарської, організаційної та комерційної діяльності (планування, фінансування, постачання, обліку, кредитування, прогнозування, нормування тощо);

– правила виконання фізичних вправ, проведення ігор, конкурсів, аукціонів;

– проекти та схеми планування споруд, будинків, територій;

– умовні позначення (дорожні знаки, маршрути, коди, шрифти тощо), розклади, інструкції;

– комп’ютерні програми;

– форма представлення інформації (наприклад, у вигляді таблиці, діаграми, графіка, за допомогою акустичних сигналів, вимовлення слів, візуальних демонстрацій, книг, аудіо- та відеодисків).

*Порядок отримання патенту на винахід (корисну модель).* Автор пропозиції, що має ознаки винаходу чи корисної моделі, може стати суб'єктом патентних прав лише за умови відповідної кваліфікації заявленої пропозиції компетентним державним органом, яким в Україні є Укрпатент — Державне підприємство «Український інститут промислової власності».

Для цього автор пропозиції має надати їй об'єктивної форми, яка б робила останню можливою для сприйняття іншими особами і була здатна до відтворення. Пропозиція має бути втілена в кресленні, дослідному зразку чи просто описана так, щоб її сутність була зрозуміла і доступна іншим особам і придатна для користування.

Право кваліфікації творчої пропозиції як винаходу чи корисної моделі належить Укрпатенту. Лише після того як Укрпатент визнає заявлену пропозицію винаходом, корисною моделлю чи промисловим зразком, прийме рішення про внесення її до відповідного Державного реєстру і видачу патенту автору, він офіційно визнається автором свого творіння і здобуває певні права та пільги, встановлені чинним законодавством України. Тільки після цього автор, а також інші особи можуть розголошувати сутність пропозиції шляхом публікації, усних доповідей та іншим чином.

Оформлення прав на винаходи, корисні моделі потребує виконання ряду формальностей. Це, передусім, подання належним чином оформленої заявки до Установи.

Вимоги до складу й оформлення матеріалів заявки, подання заявки визначаються Законом України *«Про охорону прав на винаходи і корисні моделі»* та *«Правилами складання і подання заявки на винахід та заявки на* *корисну модель»*, затвердженими наказом Міністерства освіти і науки України № 22 від 22.01.2001 та зареєстрованими в Міністерстві юстиції України за № 173/5364 від 27.02.2001.

Наступним етапом є проведення експертиз поданої заявки в тих випадках, коли вони передбачені.

Останній етап – занесення до спеціального Державного реєстру об'єктів, які відповідають умовам патентоздатності. Після державної реєстрації видається правоохоронний документ – патент. Зараз в Україні встановлена єдина форма правової охорони винаходів, корисних моделей і промислових зразків – патент.

Патент – це техніко-юридичний документ, який засвідчує визнання заявленої пропозиції винаходом, корисною моделлю чи промисловим зразком, авторство на них, пріоритет і право власності на зазначені об'єкти.

Право на подання заявки на винахід, корисну модель передусім має автор. Він може (але не зобов'язаний) подавати заявку до Установи через представника у справах інтелектуальної власності (патентного повіреного) або іншу довірену особу. Іноземні громадяни і юридичні особи, що мають постійне місце знаходження за межами України, подають заявки тільки через представників у справах інтелектуальної власності.

Право на подання заявки має роботодавець, якщо винахід, корисна модель створено у зв'язку з виконанням службового обов'язку чи доручення роботодавця.

Право на подання заявки мають також правонаступники як авторів, так і роботодавців. Заявка складається українською мовою і має стосуватись лише одного результату технічної творчості (вимога єдиності винаходу). Об'єднання в одній заявці двох винаходів, корисних моделей чи промислових зразків не допускається.

Заявка надсилається на адресу Українського інституту промислової власності (Укрпатент). Заява на видачу патенту подається за встановленою формою. У графі цієї форми заяви, що містить прохання видати патент України, необхідно вказати, на який із двох об'єктів промислової власності заявник просить видати патент – на винахід чи на корисну модель. У разі прохання видати патент на винахід, слід зазначити, який саме патент бажає одержати заявник – патент із строком дії 20 років, що видається після проведення експертизи по суті, чи деклараційний патент із строком дії шість років, що видається під відповідальність заявника без проведення експертизи по суті. У заяві на видачу патенту обов'язково має бути вказано прізвище заявника (заявників), його адресу, а також автора (авторів) заявленої пропозиції.

Детальну інформацію щодо оформлення об'єктів інтелектуальної власності можна отримати на офіційному веб-порталі державної служби інтелектуальної власності України.

*Склад заявки.* Заявка повинна містити:

– заяву про видачу патенту України на винахід чи корисну модель;

– опис винаходу (корисної моделі);

– формулу винаходу (корисної моделі);

– креслення (якщо на них є посилання в описі);

– реферат.

*Оформлення документів.* Документи заявки, а саме: заяву про видачу патенту, опис і формулу винаходу (корисної моделі), креслення і реферат подають у трьох примірниках. Документи оформлююься українською мовою. Усі документи заявки на винахід (корисну модель) слід оформляти таким чином, щоб можна було зберігати їх тривалий час і безпосередньо репродукувати в необмеженій кількості копій.

Документи заявки друкують на аркушах білого паперу форматом 210×297 мм (Формат А4, орієнтація – книжна). Кожний документ заявки починають на окремому аркуші, при цьому другий і наступні аркуші нумерують арабськими цифрами.

Мінімальний розмір полів аркушів опису, формули, реферату становить, мм: ліве – 25; верхнє, нижнє і праве по 20.

Креслення виконують на аркушах білого паперу форматом 210×297 мм.

Мінімальний розмір полів аркушів креслень становить, мм: ліве і верхнє по 25; нижнє – 15; праве – 10.

Усі документи друкують шрифтом чорного кольору. Текст опису, формули винаходу і реферату друкують через 2 інтервали або через 1,5 інтервалу при комп'ютерному наборі з висотою літер не менше ніж 2,1 мм. Латинські назви, латинські і грецькі літери, графічні символи, математичні і хімічні формули допускається вписувати чорнилом, пастою або тушшю чорного кольору.

Бібліографічні дані джерел інформації в документах заявки наводяться таким чином, щоб можна було знайти це джерело інформації.

*Графічні зображення.* Графічні зображення (власне креслення, схеми, діаграми) виконують відповідно до правил креслення, на щільному, білому, гладкому папері чорними чіткими лініями і штрихами, які не витираються, без розтушовування і розмальовування.

Масштаб і чіткість зображень вибирають такими, щоб при репродукуванні з лінійним зменшенням розмірів до 2/3 можливо було розпізнати всі деталі.

Висота цифр і літер має бути не менше 3,2 мм. Цифрові та літерні позначення мають бути чіткими, товщина їх ліній повинна відповідати товщині ліній зображення. Цифри та літери не слід брати в дужки та лапки.

На кресленнях використовують переважно прямокутні (ортогональні) проекції (у різних видах, розрізах й перерізах), в окремих випадках допускається також використання аксонометричної проекції.

Кожний елемент на кресленні виконують пропорційно всім іншим елементам за винятком випадків, коли для чіткого зображення елемента необхідне розрізнення пропорцій.

Розміри на кресленнях не позначають, їх наводять, за потреби, в описі.

Креслення виконують без будь-яких написів, за винятком необхідних слів, таких як «вода», «пара», «відкрито», «закрито», «розріз за А–А».

Окремі фігури розміщують таким чином, щоб аркуші були максимально заповненими і креслення можна було читати при вертикальному розташуванні довших боків аркуша.

Якщо фігури, що розміщені на двох і більше аркушах, являють собою частини єдиного креслення, то їх розміщують таким чином, щоб це креслення можна було скомпонувати без пропусків будь-якої із зображених на різних аркушах фігур.

На одному аркуші креслення можна розміщувати декілька фігур, при цьому слід чітко відмежовувати їх одну від одної.

Елементи фігур позначають арабськими цифрами відповідно до посилань на них у описі винаходу (корисної моделі). Одні й ті самі елементи на декількох фігурах позначають одними й тими ж цифрами.

Позначення, про які не згадують в описі винаходу, на кресленнях не проставляють і навпаки.

Якщо графічні зображення представлені у вигляді схеми, то при її виконанні застосовують стандартизовані умовні графічні позначення.

Якщо схема представлена у вигляді прямокутників як графічних позначень елементів, то крім цифрового позначення безпосередньо в прямокутник, якщо це можливо, вписують і назву елемента. Якщо розміри графічного зображення елемента не дозволяють цього зробити, то назву елемента можна зазначити на виносній лінії (за потреби, у вигляді напису під цим елементом).

На схемах одного виду допускається зображення окремих елементів схем іншого виду (наприклад, на електричній схемі допускається зображення елементів кінематичних, гідравлічних схем тощо).

Кожне графічне зображення нумерується послідовно арабськими цифрами (фіг. 1, фіг. 2 тощо) незалежно від виду цього зображення (креслення, схема, діаграма тощо) і нумерації аркушів відповідно до черговості наведення їх у тексті опису. Якщо опис винаходу пояснює лише одне графічне зображення, то воно не має нумерації.

*Хімічні формули.* У документах заявки можуть бути використані хімічні формули.

Структурні формули хімічних сполук подають (як і креслення) з нумерацією кожної структурної формули як окремої фігури і наведенням посилань на відповідні позначення.

При написанні структурних хімічних формул слід використовувати загальновживані символи елементів і чітко вказувати зв'язки між елементами і радикалами.

*Математичні формули і символи.* В описі, формулі і рефераті винаходу (корисної моделі) можуть бути використані математичні вирази (формули) і символи.

Форма подання математичного виразу не регламентується.

Усі літерні позначення, які є в математичних формулах, мають бути розшифровані. При цьому розшифрування літерних позначень подають у порядку їх використання в формулі.

Для позначення інтервалів між величинами допускається використання знаку «–» (від і до), в інших випадках слід писати словами «від» і «до».

При вираженні величин у відсотках знак відсотка (%) слід ставити після числа через пробіл. Якщо величин декілька, то знак відсотка ставлять перед їх переліком і відокремлюють від них двокрапкою.

Математичні позначення «>», «<», «=» та інші використовуються лише в математичних формулах, а в тексті їх слід писати словами (більше, менше, дорівнює тощо).

Перенос у математичних формулах допускається лише по знаку.

Пояснення до математичної формули слід писати стовпцем і після кожного рядка ставити крапку з комою.

*Загальні вимоги до змісту документів заявки.* Заявку складають українською мовою. Якщо опис і формулу винаходу (корисної моделі) викладено іншою мовою, то для збереження дати подання їх переклад повинен надійти до Укрпатенту протягом двох місяців від дати подання заявки.

Матеріали заявки не повинні містити висловів, креслень, малюнків, фотографій та будь-яких інших матеріалів, що суперечать громадському порядку і моралі, зневажливих висловлювань стосовно винаходів (корисних моделей) та результатів діяльності інших осіб, а також відомостей і матеріалів, які вочевидь не стосуються або не є необхідними для визнання документів заявки такими, що відповідають вимогам Правил.

У формулі, описі, рефераті і пояснювальних матеріалах до опису використовують, як правило, стандартизовані терміни і скорочення, а за їх відсутності – загальновживані в науковій і технічній літературі.

При використанні термінів і позначень, що не є загальновживаними, необхідно пояснити їх значення при першому вживанні в тексті.

Усі умовні позначення слід розшифровувати.

У описі, формулі винаходу (корисної моделі) та рефераті необхідно зберігати єдиність термінології, тобто одні і ті самі ознаки в зазначених документах повинні називатися однаково. Вимога єдиності термінології стосується також умовних позначень і розмірності фізичних одиниць, які використовуються в матеріалах заявки.

Назва винаходу, за потреби, може містити символи латинської абетки та цифри. Використання символів інших абеток, спеціальних знаків у назві не допускається.

Одиниці вимірювання фізичних величин переважно вживаються в одиницях діючої Міжнародної системи одиниць.

*Заява про видачу патенту.* Заяву про видачу патенту (деклараційного патенту) України на винахід чи деклараційного патенту на корисну модель слід подавати українською мовою за формою, яка наведена в додатку 1 до Правил. Якщо відомості не можуть бути повністю розміщені за браком місця у відповідних графах, то їх наводять на додатковому аркуші за тією самою формою із зазначенням у відповідній графі заяви – «див. на окремому аркуші». Графи з кодами (21), (22), що розташовані у верхній частині заяви, заявником не заповнюються, вони призначені для зазначення реквізитів заявки після її подання до Установи.

Якщо заявник має наміри здійснити патентування в іноземній державі, то у відповідній клітинці заяви необхідно зробити позначку «Х».

Графи з кодами (86) і (87) заповнюються у випадку прийняття міжнародної заявки, що містить зазначення України, до розгляду за національною процедурою. За кодом (86) зазначають реєстраційний номер та дату подання міжнародної заявки, установлені відомством-одержувачем. У графі за кодом (87) зазначаються номер і дата міжнародної публікації міжнародної заявки.

У графі, що містить прохання видати патент України, необхідно зазначити, який різновид патенту просить видати заявник, зробивши у відповідній клітинці позначку «Х».

За кодом (71) для фізичної особи (фізичних осіб) зазначають повне ім'я, місце проживання; для юридичної особи (юридичних осіб) зазначають повне найменування (згідно з установчими документами), місцезнаходження.

Якщо заявником є винахідник, декілька винахідників чи всі винахідники, то їх місце проживання наводять на звороті заяви у графі за кодом (72).

Для іноземної особи здійснюється транслітерація (передача транскрипційних знаків певної мови літерами української абетки) повного імені або найменування зазначеної особи. Після українського зазначення наводять у дужках ці самі відомості мовою оригіналу. Місце проживання або місцезнаходження заявника (за потреби) наводять мовою оригіналу і зазначають код держави згідно із стандартом ВОІВ ST.3.

Для заявників – юридичних осіб України зазначають код відповідно до Єдиного державного реєстру підприємств та організацій України (ЄДРПОУ), для заявників, що проживають чи мають постійне місцезнаходження за межами України, зазначають код держави згідно із стандартом ВОІВ ST.3.
Якщо заявників декілька, то зазначені відомості наводяться для кожної особи окремо.

Якщо заявник має підстави скористатися правом пріоритету попередньої заявки відповідно до статті 15 Закону, то у відповідній клітинці заяви необхідно зробити позначку «Х» і зазначити номер та дату подання попередньої заявки. Відомості про попередню заявку, подану в державі – учасниці Паризької конвенції, наводять за кодами (31), (32), (33). За кодом (33) зазначають код держави, до якої подано попередню заявку, відповідно до стандарту ВОІВ ST.3. Відомості про попередню заявку, подану до Установи, наводять за кодом (66). Відомості про попередню заявку, з якої виділено цю заявку, наводять за кодом (62). Якщо попередніх заявок декілька, то наводять відомості щодо кожної заявки.

За кодом (54) наводять повну назву винаходу (групи винаходів) чи корисної моделі, яка повинна збігатися з назвою, наведеною в описі.
За кодом (98) зазначають адресу для листування між заявником та Укрпатентом, повне ім'я або найменування адресата. Листування може здійснюватись за будь-якою зручною для заявника адресою на території України.

За наявності телефону, факсу чи іншого засобу зв'язку їх вказують.

Якщо заявник користується послугами представника або іншої довіреної особи, то за кодом (74) зазначають повне ім'я та реєстраційний номер представника або повне ім'я іншої довіреної особи.

Якщо заявник бажає прискорити публікацію заявки, у відповідній клітинці треба зробити позначку «Х».

Розділ заявки «Перелік документів, що додаються» заповнюють за допомогою позначок «Х» у відповідних клітинках із зазначенням кількості примірників і аркушів кожного документа. У клітинці «інші документи», якщо такі є в матеріалах заявки, необхідно зазначити назву документа.

Якщо право на подання заявки й одержання патенту передано винахідником чи роботодавцем правонаступнику, то в графі «Підстави щодо виникнення права на подання заявки і одержання патенту» відповідну підставу зазначають позначкою «Х». Якщо заявником (заявниками) є єдиний винахідник чи всі винахідники, то ця графа не заповнюється.

За кодом (72) наводять дані про винахідника (винахідників): повне ім'я та місце проживання. Для іноземного винахідника здійснюється транслітерація (передача транскрипційних знаків певної мови літерами української абетки) повного імені і поряд, у дужках, ці самі дані мовою оригіналу, а замість його місце проживання проставляють назву держави та її код згідно із стандартом ВОІВ ST.3. Якщо винахідники є заявниками, то вони проставляють підписи у правій графі.

Якщо винахідник (винахідники) не бажає (бажають) бути згаданим (згаданими) у публікації відомостей про заявку та (або) відомостей про видачу патенту, то у відповідній графі заяви робиться про це запис, що підписується винахідником (винахідниками), який (які) не бажає (бажають) бути згаданим (згаданими).

Заповнення останньої графи заяви «Підпис(и) заявника(ів)» є обов'язковим, крім випадку, коли всі заявники є винахідниками і їх підписи проставлені в графі за кодом (72).

Якщо заявником є юридична особа, то заяву підписує особа, що має на це повноваження. Підпис складається з повного найменування посади особи, яка підписує заяву, особистого підпису, ініціалів, прізвища і скріплюється печаткою.

Якщо заявник доручив ведення справ за заявкою представнику або іншій довіреній особі, то довірена особа може ставити свій підпис замість заявника. У цій графі також проставляють дату підпису.

Якщо будь-які відомості наводять на додатковому аркуші, то його треба підписати в такому самому порядку.

*Опис винаходу (корисної моделі)*. Опис повинен розкривати суть винаходу (корисної моделі) настільки ясно і повно, щоб його (її) міг здійснити фахівець у зазначеній галузі.

Опис необхідно викладати в порядку, зазначеному в Правилах.

Структура опису.

Опис починається із зазначення *індексу рубрики діючої редакції МПК*, до якої належить винахід (корисна модель), назви винаходу і містить такі розділи:

– галузь техніки, до якої належить винахід (корисна модель);

– рівень техніки;

– суть винаходу (корисної моделі);

– перелік фігур креслення (якщо на них є посилання в описі);

– відомості, які підтверджують можливість здійснення винаходу (корисної моделі).

Для кращого розуміння і більш стислого викладення опису дозволяється інша послідовність наведення розділів або їх частин, якщо цього вимагає характер винаходу.

Не допускається заміна розділу опису в цілому або його частини посиланням на інформаційне джерело, що містить необхідні відомості, навіть якщо це опис до раніше поданої заявки чи опис до охоронного документа.

*Назва винаходу (корисної моделі)* повинна відповідати суті винаходу (корисної моделі) і, як правило, характеризувати його (її) призначення.

Назву винаходу (корисної моделі) слід викладати в однині.

Винятки складають:

– назви, які не вживаються в однині;

– назви винаходів, що є хімічними сполуками, охопленими загальною структурною формулою.

Назва групи винаходів, що є об’єктами, один з яких призначений для одержання (виготовлення), здійснення або використання іншого, повинна містити повну назву одного винаходу і скорочену – іншого.

Назва групи винаходів, що є об’єктами, один з яких призначений для використання в іншому, повинна містити повні назви винаходів, які входять до групи.

Назва групи винаходів, що є варіантами, повинна містити назву одного об‘єкта групи із зазначенням у дужках слова «варіанти».

*Галузь техніки*, до якої належить винахід (корисна модель). У цьому розділі зазначають галузь техніки, до якої належить винахід (корисна модель), а також, за потреби, галузь застосування винаходу (корисної моделі). Якщо таких галузей декілька, то зазначають ті з них, які мають перевагу.

*Рівень техніки.* У розділі наводять рівень техніки, відомий заявнику, і який можна вважати корисним для розуміння винаходу (корисної моделі) і його (її) зв‘язку з відомим рівнем.

Зокрема, наводять дані про відомі заявнику аналоги винаходу (корисної моделі) з виділенням серед них аналога, найбільш близького за сукупністю ознак до винаходу (корисної моделі).

Аналог винаходу (корисної моделі) – це засіб того самого призначення, який відомий з джерел, що стали загальнодоступними до дати подання заявки до Установи, або, якщо заявлено пріоритет, до дати пріоритету, і характеризується сукупністю ознак, подібних до сукупності суттєвих ознак винаходу (корисної моделі).

Якщо аналогів декілька, то останнім описують найближчий аналог.

При описуванні кожного з аналогів наводять бібліографічні дані джерела інформації, де він розкритий, його ознаки із зазначенням тих з них, що збігаються з суттєвими ознаками винаходу (корисної моделі), що заявляється, та зазначають відомі заявнику причини, що перешкоджають одержанню очікуваного технічного результату.

Для виявлення та обґрунтування причин, що перешкоджають при використанні найближчого аналога одержанню очікуваного технічного результату, необхідно проаналізувати технічні властивості аналога, обумовлені сукупністю притаманних йому ознак, характер виявлення цих властивостей при його використанні і показати їх недостатність для досягнення очікуваного технічного результату.

При описуванні групи винаходів відомості про аналоги наводять для кожного винаходу.

*Суть винаходу (корисної моделі).* Суть винаходу (корисної моделі) виражається сукупністю суттєвих ознак, достатніх для досягнення технічного результату, який забезпечує винахід (корисна модель).

Ознаки належать до суттєвих, якщо вони впливають на технічний результат, якого можна досягти, тобто перебувають у причинно-наслідковому зв’язку із зазначеним результатом.

У цьому розділі детально розкривають технічну задачу, на вирішення якої направлений винахід (корисна модель) та технічний результат, якого можна досягти при здійсненні винаходу (корисної моделі).

Технічна задача, як правило, полягає у створенні об‘єкта, характеристики якого відповідають заданим вимогам. Цим об‘єктом може бути пристрій, спосіб тощо.

Під технічним результатом розуміють виявлення нових властивостей або покращання характеристик відомих властивостей об’єкта винаходу (корисної моделі), що можуть бути одержані при здійсненні винаходу (корисної моделі).
Технічний результат може бути виражений, наприклад у зменшенні чи збільшенні крутного моменту, у зниженні чи підвищенні коефіцієнта тертя, зменшенні чи збільшенні частоти або амплітуди коливань, у зменшенні спотворювань сигналу, у структурному перетворенні в процесі кристалізації, у поліпшенні контакту робочого органу із середовищем тощо.

Технічним результатом може бути розширення асортименту технічних засобів певного призначення або одержання таких засобів уперше. Рекомендується навести також й інші відомі заявнику види технічного результату, одержання яких забезпечує винахід (корисна модель), у тому числі і в конкретних формах його використання.

Для групи винаходів зазначені відомості, у тому числі і стосовно технічного результату, наводяться для кожного винаходу. У цьому розділі, якщо це можливо, обґрунтовують причинно-наслідковий зв‘язок між ознаками винаходу й очікуваним технічним результатом.

*Перелік фігур креслення.* У цьому розділі опису, крім переліку фігур, наводять стислі пояснення того, що зображено на кожній з них.
Якщо суть винаходу пояснюють інші ілюстративні матеріали (наприклад, фотографії), то наводять стисле пояснення їх змісту.
Таблиці нумерують окремо.

*Відомості, які підтверджують можливість здійснення винаходу (корисної моделі).* У цьому розділі розкривають можливість одержання зазначеного в розділі «Суть винаходу (корисної моделі)» технічного результату при здійсненні винаходу (корисної моделі).

Можливість здійснення винаходу, суть якого характеризують з використанням ознаки, яку подано загальним поняттям, зокрема, на рівні функціонального узагальнення, підтверджують або описом засобу для реалізації цієї ознаки безпосередньо в матеріалах заявки, або посиланням на відомість такого засобу чи методів його одержання.

Якщо для характеристики винаходу використовують виражені у вигляді інтервалу значень кількісні ознаки, то у прикладах здійснення винаходу мають бути наведені відомості, що підтверджують можливість одержання технічного результату у межах зазначеного інтервалу.

*Підпис.* Опис винаходу (корисної моделі) підписує заявник у тому самому порядку, що й заяву про видачу патенту (деклараційного патенту).

*Формула винаходу (корисної моделі)* призначена для визначення обсягу правової охорони, яка надається патентом (деклараційним патентом). Вона повинна стисло і ясно відображати суть винаходу (корисної моделі).

Формула винаходу (корисної моделі) визнається такою, що відображає суть винаходу (корисної моделі), якщо вона містить сукупність його (її) суттєвих ознак, достатню для досягнення зазначеного заявником технічного результату.

Формула винаходу (корисної моделі) повинна базуватися на описі й характеризувати винахід (корисну модель) тими самими поняттями, що містить опис винаходу (корисної моделі).

Ознаки винаходу (корисної моделі) у формулі винаходу (корисної моделі) викладають таким чином, щоб забезпечити можливість їх ідентифікації, тобто однозначного розуміння їх змісту фахівцем на основі відомого рівня техніки.

Якщо заявка містить креслення, то для кращого розуміння ознак, зазначених у формулі винаходу (корисної моделі), у їх взаємозв’язку з відповідними позиціями на кресленнях допускається після зазначення ознаки у формулі винаходу (корисної моделі) проставляти відповідні позиції в дужках. При цьому, зазначення позиції не обмежує обсяг правової охорони, що визначається формулою.

Характеристика ознаки винаходу (корисної моделі) у формулі винаходу (корисної моделі) не може бути замінена посиланням на опис чи креслення. Заміна допускається у виняткових випадках, коли неможливо виразити ознаку інакше. Заявник повинен показати, що така необхідність існує.

Ознаку винаходу (корисної моделі) доцільно характеризувати загальним поняттям (що виражає функцію, властивість тощо), яке охоплює різні окремі форми його реалізації, якщо саме ці характеристики, які містяться в загальному понятті, забезпечують у сукупності з іншими ознаками досягнення зазначеного заявником технічного результату.

Якщо таке поняття відсутнє або узагальнення неправомірне, то ознака винаходу (корисної моделі) може бути виражена як альтернатива.

Ознака винаходу (корисної моделі) може бути виражена як альтернатива за умови, що така ознака при будь-якому зазначеному в альтернативі виборі у сукупності з іншими ознаками забезпечує досягнення одного і того самого технічного результату.

*Структура формули винаходу (корисної моделі)*. Формула винаходу (корисної моделі) може бути одноланковою чи багатоланковою і включати відповідно один або декілька пунктів.

Одноланкову формулу винаходу (корисної моделі) застосовують для характеристики одного винаходу (корисної моделі) сукупністю суттєвих ознак, які не мають розвитку чи уточнення щодо окремих випадків його виконання або використання.

Багатоланкову формулу винаходу (корисної моделі) застосовують для характеристики одного винаходу (корисної моделі) з розвитком і(або) уточненням сукупності його (її) ознак стосовно деяких випадків виконання і використання винаходу (корисної моделі) або для характеристики групи винаходів.

Багатоланкова формула, що характеризує один винахід (корисну модель), має один незалежний пункт і наступний (наступні) за ним залежний (залежні) пункт (пункти).

Багатоланкова формула, що характеризує групу винаходів, має декілька незалежних пунктів, кожний з яких характеризує один з винаходів групи. При цьому кожний з винаходів групи може бути охарактеризований із залученням залежних пунктів, підпорядкованих відповідному незалежному пункту.

При складанні багатоланкової формули дотримуються таких правил:

– незалежні пункти, як правило, не повинні містити посилань на інші пункти формули, однак такі посилання допускаються, якщо вони дають змогу викласти даний незалежний пункт без повторення в ньому повністю змісту інших пунктів;

– залежні пункти формули групуються разом з тим незалежним пунктом, якому вони підпорядковані, у тому числі, коли для характеристики різних винаходів групи залучаються залежні пункти однакового змісту;

– пункти багатоланкової формули винаходу (корисної моделі) нумеруються арабськими цифрами, починаючи з 1 (у порядку їх викладення).

*Складання формули винаходу (корисної моделі)*. Пункт формули винаходу (корисної моделі) складається, як правило, з обмежувальної частини, яка включає ознаки винаходу, які збігаються з ознаками найближчого аналога, у тому числі родове поняття, що характеризує призначення об’єкта, та відмітної частини, яка включає ознаки, що відрізняють винахід від найближчого аналога.

Обмежувальна й відмітна частини пункту формули відокремлюються одна від одної виразом «який (яка, яке) відрізняється тим, що...”.

Без поділу на обмежувальну й відмітну частини, зокрема, складають формулу винаходу, яка характеризує:

– індивідуальну сполуку;

– штам мікроорганізму, культуру клітин рослин і тварин;

– застосування раніше відомого продукту чи способу за новим призначенням;

– винахід, що не має аналогів.

Формулу (або кожний пункт багатоланкової формули) викладають одним реченням.

Незалежний пункт формули винаходу (корисної моделі) повинен стосуватися лише одного винаходу (однієї корисної моделі).

У незалежний пункт формули винаходу чи корисної моделі (або в кожний незалежний пункт формули, що характеризує групу винаходів) включають сукупність ознак, достатніх для досягнення технічного результату. Зазначена сукупність ознак визначає обсяг правової охорони.

При складанні незалежного пункту формули слід ураховувати, що сукупність ознак, достатніх для досягнення технічного результату, повинна бути передана певним набором ознак, властивих цьому об'єкту.

Незалежний пункт формули винаходу не визнається таким, що стосується одного винаходу, якщо він містить:

– викладені як альтернатива ознаки, які не забезпечують одержання того самого технічного результату, або викладені як альтернатива групи ознак, причому кожна з альтернативних груп включає кілька функціонально самостійних ознак (вузол або деталь пристрою; операція способу, речовина, матеріал або прилад, застосовані в способі; інгредієнт композиції і т. ін.), у тому числі, коли вибір однієї з таких альтернативних ознак залежить від вибору, який зроблено щодо іншої (інших) ознаки (ознак);

– характеристику винаходів, які стосуються об'єктів різного виду чи сукупності засобів, кожний з яких має своє власне призначення, а в цілому зазначена сукупність не реалізує спільного призначення.

До залежного пункту формули винаходу (корисної моделі) включають ознаки, що розвивають чи уточнюють сукупність ознак, зазначену в незалежному пункті формули, у тому числі шляхом розвитку чи уточнення окремих ознак цієї сукупності, та необхідні лише в окремих випадках виконання винаходу (корисної моделі) або його (її) використання.

Обмежувальна частина залежного пункту формули включає родове поняття, що відображає призначення винаходу (корисної моделі), викладене, як правило, скорочено в порівнянні з наведеним у незалежному пункті, і містить посилання на незалежний пункт і/або залежний (залежні) пункт (пункти), якого (яких) він стосується.

Підпорядкованість залежних пунктів незалежному може бути безпосередньою і опосередкованою, тобто з посиланням на один або декілька залежних пунктів.

Безпосередню підпорядкованість залежного пункту застосовують тоді, коли для характеристики винаходу в окремому випадку його виконання чи використання поряд із ознаками цього пункту необхідні лише ознаки, зазначені в незалежному пункті формули.

Опосередковану підпорядкованість залежного пункту незалежному застосовують, якщо для зазначеної характеристики, окрім ознак незалежного пункту формули, необхідні ще й ознаки одного чи кількох інших залежних пунктів формули.

При підпорядкованості залежного пункту декільком пунктам формули посилання на них зазначають з використанням альтернативи.

У залежному пункті формули, що характеризує один об'єкт, в усіх випадках під поняттям «Пристрій за п.1» розуміють повний зміст першого пункту формули, а саме сукупність усіх без винятку ознак, наведених у його обмежувальній та відмітній частинах.

Якщо залежний пункт сформульовано таким чином, що має місце заміна або вилучення ознаки незалежного пункту формули, якому він підпорядкований, то залежний пункт не може бути визнаний таким, що разом із зазначеним незалежним пунктом характеризує один винахід.

Формулу винаходу (корисної моделі) підписує заявник у тому самому порядку, що й заяву про видачу патенту.

*Креслення.* Графічні зображення (власне креслення, схеми, діаграми тощо) оформлюють на окремому аркуші (окремих аркушах). У правому верхньому куті кожного аркуша зазначають назву винаходу (корисної моделі).

Для пояснення суті винаходу (корисної моделі) як додаток до інших графічних матеріалів можуть бути подані фотографії. У виняткових випадках фотографії можуть бути подані як основний вид ілюстративних матеріалів, наприклад для ілюстрації етапів виконання хірургічних операцій.

Формат фотографій повинен бути таким, щоб не виходив за розміри полів аркушів документів заявки. Фотографії малого формату слід наклеювати на аркуші встановленого формату з дотриманням вимог до якості аркуша.

*Реферат* є скороченим викладом змісту опису винаходу (корисної моделі), який включає назву винаходу (корисної моделі), характеристику галузі техніки, якої стосується винахід (корисна модель), і (або) галузь його (її) застосування, якщо це не зрозуміло з назви, характеристику суті винаходу (корисної моделі) із зазначенням технічного результату, якого мають досягти.

Суть винаходу (корисної моделі) в рефераті характеризують шляхом вільного викладу формули, переважно такого, при якому зберігаються всі суттєві ознаки кожного незалежного пункту.

Реферат складають лише з інформаційною метою. Він не може братися до уваги з іншою метою, зокрема для тлумачення формули винаходу (корисної моделі) і визначення рівня техніки.

Реферат складають таким чином, щоб він міг служити ефективним засобом пошуку у відповідній галузі техніки.

Рекомендований обсяг тексту реферату становить до 1000 знаків.

Текст реферату слід викладати окремими короткими реченнями і уникати складних у стилістичному плані зворотів.

Математичні та хімічні формули, а також креслення можуть бути включені до реферату, якщо без них скласти реферат неможливо. Креслення, наведені в рефераті, мають бути виконані на окремому аркуші і додаватися до реферату.

Креслень має бути стільки примірників, скільки примірників містить реферат.

Реферат може містити також деякі додаткові відомості, зокрема посилання на кількість незалежних і залежних пунктів формули винаходу (корисної моделі), графічних зображень, таблиць.

### 5.3.2 Приклади оформлення заявки на корисну модель і винахід

Винаходи і корисні моделі мають відповідати певним вимогам за винахідницьким рівнем, новизною, рівнем техніки, промислової придатності.

*Винахідницький рівень.* Патент на винахід повинен мати винахідницький рівень. Законодавством України вважається, що винахід має винахідницький рівень, якщо для фахівця він не є очевидним, тобто не випливає явно із рівня техніки. При оцінці винахідницького рівня зміст заявок, поданих, але ще не опублікованих, до уваги не береться. Ця вимога не стосується корисної моделі.

*Новизна.* Винахід (корисна модель) визнається новим, якщо він не є частиною рівня техніки.

Об'єкти, що є частиною рівня техніки, для визначення новизни винаходу повинні враховуватися лише окремо.

*Рівень техніки* включає всі відомості, які стали загальнодоступними у світі до дати подання заявки до Установи або, якщо заявлено пріоритет, до дати її пріоритету.

При перевірці винахідницького рівня встановлюють відомість з рівня техніки впливу сукупності ознак заявленого винаходу на досягнення зазначеного заявником технічного результату. Якщо така відомість не встановлена, то винахід визнається як такий, що відповідає умові винахідницького рівня.

*Промислова придатність.* Винахід чи корисна модель визнаються промислово придатними, якщо їх може бути використано у промисловості, сільському господарстві, медицині або в іншій сфері діяльності.

Тобто перевіряють, щоб було вказано, для використання у якій галузі призначено винахід, щоб була підтверджена можливість його здійснення за допомогою описаних у заявці або відомих до дати пріоритету засобів і методів та доведена можливість отримати вказаний технічний результат.

### 5.3.2.1 Заявка на корисну модель (пристрій)

МПК$^7$ : A 43 D65/00

*МАШИНА ДЛЯ ЛИТТЯ БАГАТОКОЛІРНОЇ ПІДОШВИ ВЗУТТЯ*

Корисна модель відноситься до взуттєвої промисловості, а саме стосується конструкції машини для лиття багатоколірної підошви взуття.
Відома машина для виготовлення гумотекстильного взуття [Альтзицер В. С., Красовский В. Д., Меерсон В. Д. Производство обуви из полимерных материалов / под ред. В. А. Берестнева. – Л. : Химия, 1987. – 232с., с.93], яка складається з поворотного супорта з закріпленими на ньому по колу матрицями та двох ливарних пристроїв.

Дана машина дозволяє отримати розплави полімерів для лиття підошви тільки одного або двох кольорів, що перешкоджає розширенню асортименту взуття, яке виробляється.

Відома також машина для лиття багатоколірної підошви взуття [патент СРСР № 1556528, МПК A 43 D65/00, бюл. № 13, 1990], що містить поворотний супорт з закріпленими на ньому по колу матрицями та ливарні пристрої, з соплами для упорскування розплавів полімерів різного кольору.

Крім того, ливарні пристрої встановлені попарно, утворюючи дві пари з відстанями між ливарними пристроями в кожній парі, рівними кроку між матрицями, при цьому пари ливарних пристроїв розташовані одна від одної на відстані, що відповідає проміжку, в якому розміщена парна кількість матриць. Дана машина не дозволяє виготовляти підошви з кількістю кольорів, більшою ніж чотири. Крім того, при послідовному упорскуванні розплавів полімерів різного кольору в одну матрицю температура одного з полімерів нижча ніж початкова температура розплаву, що призводить до низької міцності з’єднання

[Лапшин В. В. Основы переработки термопластов литьём под давлением. – М. : Химия, 1974. – 274 с., с.189].

В основу корисної моделі покладена задача створити таку машину для лиття багатоколірної підошви взуття, в якій шляхом зміни взаємного розташування та кількості елементів забезпечилось би розширення асортименту та підвищення міцності багатоколірних підошов.

Поставлена задача досягається тим, що в машині для лиття багатоколірної підошви, яка містить поворотний супорт із матрицями та ливарні пристрої з соплами для упорскування розплавів полімерів різного кольору, згідно з корисною моделлю, ливарні пристрої встановлені з можливістю одночасного упорскування з сопел розплавів полімерів різного кольору в одну матрицю.

Таке розташування ливарних пристроїв дозволить виготовляти підошви з кількістю кольорів, що дорівнює кількості ливарних пристроїв, а також одночасно упорскувати розплави полімерів різного кольору в одну матрицю, що призведе до підвищення міцності з’єднання між собою шарів полімерів різного кольору за рахунок підвищення адгезії внаслідок того, що розплави матимуть однаково високу температуру.

Машина для лиття багатоколірної підошви, наприклад, з п’ятьма ливарними пристроями представлена на рисунку 5.2.

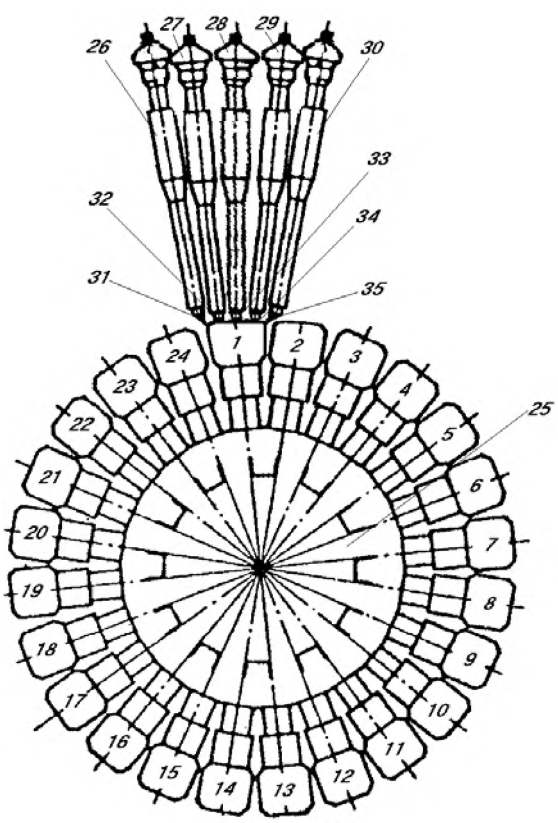



Рис. 5.2 – **Машина для лиття багатоколірної підошви взуття**

Машина для лиття багатоколірної підошви має множину матриць з *1* по *24*, закріплених навколо поворотного супорта *25*, а також ливарні пристрої з *26* по *30* з соплами з *31* по *35*. Ливарні пристрої з *26* по *30* встановлені навпроти супорта *25* з можливістю одночасного упорскування з сопел з *31* по *35* розплавів полімерів різного кольору в одну матрицю з *1* по *24*.

Машина працює наступним чином.

В матрицю *1* упорскуються розплави різного кольору одночасно з сопел з *31* по *35* ливарних пристроїв з *26* по *30*, після чого супорт *25* повертається на одну позицію і починається упорскування в наступну матрицю *2*.
Після охолодження і затвердіння полімеру багатоколірна підошва виймається з матриці.

*ФОРМУЛА КОРИСНОЇ МОДЕЛІ*

Машина для лиття багатоколірної підошви взуття, що містить поворотний супорт з закріпленими на ньому по колу матрицями та ливарні пристрої з соплами для упорскування розплавів полімерів різного кольору, яка відрізняється тим, що ливарні пристрої встановлені з можливістю одночасного упорскування з сопел розплавів полімерів різного кольору в одну матрицю.

### 5.3.2.2 Заявка на корисну модель (речовина)

МПК$^7$ C14C 9/00

*КОМПОЗИЦІЯ ДЛЯ НАПОВНЕННЯ ШКІРЯНОГО НАПІВФАБРИКАТУ*

Корисна модель відноситься до легкої промисловості, а саме до композицій для наповнення шкіряного напівфабрикату.

Відома композиція для наповнення шкіряного напівфабрикату на основі екзополісахариду поліакриламіду, описана в способі обробки шкіри [Патент на корисну модель № 51398А, Україна, МПК C14C 9/00, 2002]. Використання композиції призводить до зниження якості шкіри через низьку дифузійну здатність компонентів, що призводить до їх накопичення в поверхневих шарах шкіри – лицьовому і бахтарм’яному. При цьому залишається недостатньо ненаповненим сітчастий шар шкіряного напівфабрикату зі слабким його зв’язком з лицьовим шаром, що викликає надмірну пухкість шкіри та її жорсткість.

Відома композиція для наповнення шкіряного напівфабрикату [Патент на корисну модель № 20862, Україна, МПК C14C 9/00, 2007]. Композиція містить наступні компоненти, що взяті в розрахунку на технічний продукт, мас. %:

| | |
|---|---|
| жирова емульсія | 1,5 – 2,5 |

| | |
|---|---|
| кополімер ксантанакриламід | 3 – 5 |
| наповнювач на основі меламіну | 2 – 4 |
| диспергатор | 2 – 4 |
| таніди | 3 – 5 |
| вода | решта. |

Композиція містить водний розчин кополімеру ксантанакриламіду, який має низьку дифузійну здатність, що знижує рівномірність відкладання компонентів в структурі шкіряного напівфабрикату. Як наслідок підвищується жорсткість шкіри, яка знижує якість еластичного шкіряного матеріалу.

Відома також композиція для наповнення шкіряного напівфабрикату [Технологічна методика / ПАТ «Чинбар», 2003], що містить жирову емульсію, наповнювач на основі меламіну, диспергатор, таніди і воду. Відома композиція містить також акриловий наповнювач, а компоненти взяті в розрахунку на технічний продукт в такому співвідношенні, мас. %:

| | |
|---|---|
| жирова емульсія | 1,5 – 2,5 |
| акриловий наповнювач | 3 – 5 |
| наповнювач на основі меламіну | 2 – 4 |
| диспергатор | 2 – 4 |
| таніди | 3 – 5 |
| вода | решта. |

Відома композиція використовується при виготовленні широкого асортименту шкіри для верху і підкладки взуття, галантерейних виробів із шкур великої рогатої худоби та кінських. Акриловий наповнювач Трупотан RKM в композиції створює лужне середовище, що призводить до активної взаємодії з напівфабрикатом хромового дублення, його відкладання в поверхневих шарах і це затрудняє дифузійну здатність інших компонентів в об’єм напівфабрикату. Нерівномірний розподіл компонентів наповнювальної композиції призводить до появи жорсткості й дефектів лицьової поверхні – пухлинуватості та пухкості, що знижує якість еластичної шкіри.

В основу корисної моделі покладено задачу розробити таку композицію для наповнення шкіряного напівфабрикату, в якій зміною якісного та кількісного складу компонентів підвищилась би якість еластичної шкіри.

Поставлена задача вирішується тим, що композиція для наповнення шкіряного напівфабрикату, що містить жирову емульсію, наповнювач на основі меламіну, диспергатор, таніди і воду, згідно корисної моделі, додатково містить оксид кремнію (II), при цьому компоненти взяті в такому складі, мас. %:

| | |
|---|---|
| жирова емульсія | 1 – 1,5 |

| | |
|---|---|
| оксид кремнію (II) | 1 – 2 |
| наповнювач на основі меламіну | 1 – 2 |
| диспергатор | 2 – 3 |
| таніди | 4 – 5 |
| вода | решта. |

Оксид кремнію (II) є високодисперсним, зокрема марки А-300, має розмір проточастинок 1–2 нм, первинних частинок 4–50 нм. та питомою поверхнею 50–380 $м^2/г$ [Айлер Р. Химия кремнезема. М. : Мир, 1982. Ч. 1. – 416 с.]. Використання оксиду кремнію з жировою емульсією сприяє його легкій дифузії в об’єм шкіряного напівфабрикату, що сприяє рівномірному розподілу в об’ємі напівфабрикату інших компонентів, усуненню пухлинуватості, пухкості та жорсткості шкіри, що забезпечується підвищення якості еластичної шкіри.

Зменшення вмісту оксид кремнію (II) в композиції, що заявляється, менше 1 мас. % є недостатнім для рівномірного розподілу наповнювальних компонентів в об’ємі шкіри і, як наслідок, її структурні елементи недостатньо поділяються, що призводить до підвищення жорсткості шкіри. При збільшенні оксид кремнію (II) в композиції понад 2 мас. % – затрудняє дифузійні процеси інших компонентів, що подовжує технологічний процес наповнювання шкіряного напівфабрикату.

В таблиці 5.1 наведені приклади композиційного складу для наповнювання шкіряного напівфабрикату, що заявляється, а в таблиці 5.2 – основні властивості шкіри, наповненої цими композиціями.

Таблиця 5.1 – **Приклади композиції для наповнювання шкіряного напівфабрикату**

| Компонент | Вміст компоненту, мас. % за прикладами | | | | | Найближчий аналог*, мас. % |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Жирова емульсія Трупон DL | 1 | 1,25 | 1,5 | 0,5 | 2 | 2 |
| Оксид кремнію (II) – А-300 | 1 | 1,5 | 2 | 0,5 | 2,5 | – |
| Акриловий наповнювач – трупотан RKM | – | – | – | – | – | 4 |
| Наповнювач на основі меламіну – релуган D | 1 | 1,5 | 2 | 0,5 | 2,5 | 3 |
| Диспергатор трупотан G | 2 | 2,5 | 3 | 1,5 | 3,5 | 3 |
| Таніди квебрахо | 4 | 4,5 | 5 | 3,5 | 5,5 | 4 |
| Вода | 81 | 88,75 | 86,5 | 93,5 | 84,0 | 84 |

Примітка. * – матеріали наведені в розрахунку на технічний продукт

Приклади 1–3 визначають оптимальні співвідношення компонентів наповнювальної композиції в заявлених межах, а приклади 4 і 5 – за межами оптимального співвідношення компонентів.

Дані, наведені в таблицях, свідчать про те, що шкіри, отримані з використанням композиційного складу, що заявляється (приклади 1–3), сформовані з вищими структурними показниками порівняно з найближчим аналогом. Зокрема, вони мають пористість і вищі об'ємний вихід вищі, відповідно на 15–19 і до 9 %, а жорсткість нижчу на 25–28 % порівняно з найближчим аналогом, що свідчить про збереження високого ступеня поділу волокнистої структури шкіри після видалення з неї вологи і підвищені еластичні властивості щодо шкіряного матеріалу за найближчим аналогом.

Таблиця 5.2 – **Властивості наповненої шкіри**

| Показник | Приклад | | | | | Найближчий аналог |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Межа міцності при розтягуванні, МПа | 23 | 23 | 24 | 19 | 21 | 20 |
| Межа міцності лицьового шару, МПа | 23 | 23 | 23,5 | 19 | 19 | 20 |
| Об'ємний вихід, $см^3$/100 г ГР* | 235 | 237 | 241 | 198 | 213 | 221 |
| Пористість зразків з ділянки поли, % | 54 | 54 | 56 | 46 | 47 | 47 |
| Жорсткість шкіри на ПЖУ-12М, сН | 26 | 27 | 27 | 31 | 39 | 36 |

Примітка. * ГР – голинна речовина

Зменшення витрат композиції для наповнювання шкіряного напівфабрикату (приклад 4) веде до зниження всіх показників. При цьому особливо знижується об'ємний вихід і межа міцності шкіри. Підвищення витрат компонентів для наповнювання (приклад 5) супроводиться втратою еластичних властивостей шкір, на що вказує висока жорсткість і знижена межа міцності лицьового шару.

Використання композиції, що заявляється, для наповнення шкіряного напівфабрикату дозволяє отримувати еластичні шкіри підвищеної якості з добре наповненими периферійними ділянками.

*ФОРМУЛА КОРИСНОЇ МОДЕЛІ*

Композиція для наповнення шкіряного напівфабрикату, що містить жирову емульсію, наповнювач на основі меламіну, диспергатор, таніди і воду, яка відрізняється тим, що додатково містить оксид кремнію (II), при цьому компоненти взяті в такому складі, мас. %:

| | |
|---|---|
| жирова емульсія | 1 – 1,5 |
| оксид кремнію (II) | 1 – 2 |
| наповнювач на основі меламіну | 1 – 2 |
| диспергатор | 2 – 3 |
| таніди | 4 – 5 |
| вода | решта. |

### 5.3.2.3 Заявка на винахід (спосіб)

МПК$^{7}$ C 14 C 1/06

*СПОСІБ ОБРОБКИ ШКІРЯНОГО НАПІВФАБРИКАТУ ХРОМОВОГО ДУБЛЕННЯ*

Винахід відноситься до легкої промисловості, зокрема, до способів обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення і може бути використаний у виробництві еластичних шкір хромового дублення.

Відомий спосіб обробки голини ферментними препаратами [Технологія і матеріали виробництва шкіри / під ред. А. Г. Данилковича. – К. : Фенікс, 2009. – С. 456] при витраті панкреатину технічного активністю 600 од./г в кількості 0,015–0,03 % маси голини, що отримана з шкур свиней, чи протосубтиліну активністю 7 од./г в кількості 0,5–0,6 % маси голини в присутності 0,5 % поверхнево-активної речовини. Обробку виконують при температурі 36–38 °С. Через неповне використання потенціалу ферментного препарату при м’якшенні спосіб не дозволяє суттєво підвищити еластичність шкіри і ефективно використовувати шкіряну сировину.

Відомий спосіб обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення [Справочник кожевника (Технология) / Н. А. Балберова, А. Н. Михайлов, Е. И. Шуленкова, В. А. Кутьин; под ред. Н. А. Балберовой. – М. : Легпромбытиздат, 1986. – С. 23] з використанням ферментних препаратів: панкреатину активністю 600 од./г з витратою 0,015–0,03 % маси голини з сировини великої рогатої худоби або підшлункової залози до активності м’якшильної рідини 0,4–0,5 мл. 0,1 н. розчину гідроксиду натрію чи протосубтиліну Г-3Х активністю 7 од./г в кількості 0,2 % маси голини при температурі 35–37 °С. М’якшення напівфабрикату при низьких температурах не дозволяє повністю використовувати потенціал ферментних препаратів.

Відомий спосіб обробки рукавичної шкіри ферментними препаратами [Справочник кожевника (Технология) / Н. А. Балберова, А. Н. Михайлов, Е. И. Шуленкова, В. А. Кутьин; под ред. Н. А. Балберовой. – М. : Легпромбытиздат, 1986. – С. 169] після нейтралізації напівфабрикату при активності м’якшильної рідини 0,8–1,0 мл. 0,1 н. розчину гідроксиду натрію і температурі 50–55 °С протягом 4–5 год. з наступним промиванням та жируванням. Цей спосіб рекомендований тільки для рукавичної шкіри.

Відомий також спосіб обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення, що включає нейтралізацію, промивання, жирування та наповнювання органічними дубителями [Технологія і матеріали виробництва шкіри / під ред. А. Г. Данилковича. – Фенікс, 2009. – С. 374–376]. За відомим способом проводиться наповнювання шкіряного напівфабрикату органічними дубителями після жирування, що підвищує жорсткість шкіра і знижується вихід площі.

Таким чином, в основу винаходу поставлено задачу розробити такий спосіб обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення, в якому зміною умов виконання технологічних процесів, забезпечилося б підвищення еластичності та збільшення площі готової шкіри.

Поставлена задача вирішується тим, що в способі обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення, що включає нейтралізацію, промивання, жирування та наповнювання органічними дубителями, згідно з винаходом, після нейтралізації напівфабрикат піддають м’якшенню ферментним препаратом протеолітичної дії в присутності електролітостійких жирових речовин з витратою 0,5–0,7 % маси напівфабрикату, а після цього здійснюють наповнювання органічними дубителями.

При цьому напівфабрикат піддають м’якшенню при активності м’якшильної рідини 0,8–1,0 мл. 0,1 н. розчину гідроксиду натрію і температурі 50–56 °С протягом 45–90 хв.

Автору з патентної і науково-технічної літератури невідомо проведення процесу м’якшення напівфабрикату після його нейтралізації напівфабрикату в присутності електролітостійких жирових речовин з наступним наповненням органічними дубителями, з чого можна зробити висновок, що заявлений винахід відповідає критеріям «новизна» та «винахідницький рівень».

При зменшенні витрат жирових речовин зростає нерівномірність розподілу органічних дубителів у товщі шкіри і це викликає підвищення її жорсткості та зменшення виходу площі готової шкіри. Збільшення витрати жирових речовин перешкоджає ефективній дії ферментного препарату.

Зниження температури обробки напівфабрикату сповільнює ефективність впливу ферментних препаратів на його структуру при м’якшенні, а підвищення призводить до руйнування ферментів і відповідно зниження ефективності їх дії.

Для обробки використано напівфабрикат хромового методу дублення, що отриманий з сировини великої рогатої худоби підвищеної маси (ВРХ) і шкур свиней. Обробка напівфабрикату проводиться за нижченаведеною схемою:

Нейтралізація → Промивання → М’якшення → Наповнювання органічними дубителями → Фарбування (за необхідністю) → Жирування.

Ці процеси, крім м’якшення, виконуються однаково для всіх прикладів при нижченаведених режимах.

Нейтралізація проводиться при витраті води 150 % маси напівфабрикату, форміату натрію і гідрокарбонату натрію по 0,75 % маси напівфабрикату при температурі 35–40 °С протягом 60 хв.

Промивання напівфабрикату виконується на текучій воді протягом 10 хв. для підвищення температури технологічного розчину до температури м’якшення.

М’якшення виконується ферментним препаратом панкреатин з додаванням стійкого до дії електролітів препарату для жирування Трупол RA компанії Трумплер (ФРН) з вмістом активної речовини 70 % або Хеміпон VEG/N фірми Хеміпол (Польща) з вмістом активної речовини 60 % за прикладами таблиці.

Наповнювання органічними дубителями при температурі 35–40 °С проводиться на відпрацьованій рідині зі зниженням температури розчину шляхом додавання холодної води до 200 % маси напівфабрикату з використанням синтетичного дубителя БНС і рослинних танідів Квебрахо у співвідношенні 1:1 в розрахунку відповідно на дубильні речовини і таніди 5 % маси напівфабрикату протягом однієї год.

Фарбування проводиться за необхідності на відпрацьованому розчині.

Жирування виконується з використанням препарату Трупол RA чи Хеміпон VEG/N на відпрацьованому розчині при витраті жирувальних препаратів 6–7 % в розрахунку на 100 % жирові речовини протягом 50 хв. з наступним обробкою мурашиною кислотою з витратою 1 % маси напівфабрикату протягом 10 хв.

Промивання здійснюється проточною водою при температурі 18–22 °С протягом 10 хв.

У таблиці 5.3 наведені витрати ферменту панкреатину при м’якшенні напівфабрикату хромового дублення, жирувальних речовин і параметри обробки напівфабрикату ялівки важкої та шкур свиней за вказаним способом і властивості отриманої шкіри.

Таблиця 5.3 – **Приклади обробки та показники властивостей шкір**

| Параметри обробки та властивості напівфабрикату | Приклад | | | | | Найближчий аналог |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| М'якшення: фермент панкреатин технічний до активності м'якшильної рідини, мл. 0,1 н. розчину *NaOH* | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | — |
| Витрата електролітостійких жирових речовин, % маси напівфабрикату: | | | | | | |
| Трупол RA | 0,4 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 1,0 | — |
| або Хеміпон VEG/N | 0,3 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,9 | — |
| Температура м'якшення, °С | 37 | 50 | 54 | 56 | 58 | — |
| Тривалість обробки, хв., | | | | | | |
| напівфабрикату ВРХ | 100 | 90 | 60 | 45 | 40 | — |
| – шкур свиней | 100 | 90 | 90 | 45 | 40 | — |
| Жирування, % маси напівфабрикату: | | | | | | |
| Трупол RA або Хеміпон VEG/N | 6,6 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,1 | 7,0 |
| Межа міцності при розтягуванні, МПа | 19,4 / 17,3 | 19,8 / 18,2 | 19,5 / 18,4 | 19,1 / 18,0 | 18,5 / 17,7 | 18,3 / 17,5 |
| Видовження при напруженні 10 МПа, % | 28,3 / 30,2 | 30,2 / 37,5 | 33,9 / 38,0 | 33,2 / 35,4 | 35,0 / 29,0 | 27,8 / 29,6 |
| Відносне видовження при розриві, % | 59,0 / 51,0 | 71,0 / 56,0 | 76,0 / 58,0 | 73,0 / 56,0 | 69,0 / 53,0 | 58,0 / 49,0 |
| Жорсткість на приладі ПЖУ-12М, сН | 39,0 / 42,0 | 29,5 / 30,4 | 28,6 / 29,8 | 29,0 / 30,2 | 34,6 / 35,3 | 41,0 / 43,0 |
| Вихід площі готової шкіри, % | 100,5 / 100,2 | 105,6 / 105,0 | 107,0 / 106,7 | 105,0 / 104,9 | 102,0 / 101,3 | 100 / 100 |

Примітка. Чисельник і знаменник відповідно показники готової шкіри отриманої відповідно з шкур великої рогатої худоби і свиней.

Як видно з таблиці, шкіри отримані за прикладом 1, характеризуються зменшеним виходом площі й більшою жорсткістю, а виконання способу за прикладом 5 також знижує величину виходу шкіри за площею внаслідок неефективної дії ферменту. Параметри виконання способу за прикладами 2–4 відносяться до оптимальних, оскільки забезпечують отримання шкіри вищої еластичності за показником жорсткості з вищим видовженням при напруженні 10 МПа та відносним видовженням при розриві, ефективне використання шкіряної сировини, що характеризується найвищим виходом площі готової шкіри.

Для порівняльного аналізу шкіряний напівфабрикат ялівки важкої був оброблений за найближчим аналогом. При цьому додублювання органічними дубителями здійснювалось після жирування. Наведені в таблиці показники вказують, що при такій послідовності виконання процесів обробки напівфабрикату без використання ферментного препарату протеолітичної дії отримуються нижчі показники видовження при напруженні 10 МПа та відносного видовження при розриві. При цьому отримані шкіри є жорсткішими і мають менший вихід площі.

Позитивний ефект заявленого способу обробки полягає в:

– отриманні еластичної шкіри меншої жорсткості;

– підвищенні виходу готової шкіри за площею.

Таким чином, заявлений спосіб оброки напівфабрикату дозволяє отримувати шкіри високої еластичності. При оптимальній обробці шкіряного напівфабрикату досягається найвищий вихід площі готової шкіри, що на 5–7 % перевищує площу шкіри, отриманої за найближчим аналогом.

*ФОРМУЛА ВИНАХОДУ*

1. Спосіб обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення, що включає нейтралізацію, промивання, жирування та наповнювання органічними дубителями, який відрізняється тим, що після нейтралізації напівфабрикат піддають м’якшенню ферментним препаратом протеолітичної дії в присутності електролітостійких жирових речовин з витратою 0,5-0,7 % маси напівфабрикату, а після цього здійснюють наповнювання органічними дубителями.

2. Спосіб за п. 1, який відрізняється тим, що напівфабрикат піддають м’якшення при активності м’якшильної рідини 0,8-1,0 мл. 0,1 н. розчину гідроксиду натрію і температурі 50–56 °С протягом 45-90 хв.

*РЕФЕРАТ*

Об′єкт винаходу: спосіб обробки шкіряного напівфабрикату хромового дублення. Галузь застосування: шкіряне виробництво. Суть винаходу: спосіб включає нейтралізацію, промивання, жирування та наповнювання органічними дубителями, при якому після нейтралізації напівфабрикат піддають м’якшенню ферментним препаратом протеолітичної дії в присутності електролітостійких жирових речовин з витратою 0,5–0,7 % маси напівфабрикату, а після цього здійснюють наповнювання органічними дубителями. При цьому м’якшення здійснюють при активності м’якшильної рідини 0,8–1,0 мл. 0,1 н. розчину гідроксиду натрію і температурі 50–56 °С в присутності жирових речовин протягом 45–90 хв.

Технічний результат: підвищення еластичності та збільшення площі готової шкіри. 1 з.п. ф-ли, 1 табл.

### 5.3.3 Правова охорона промислових зразків

*Промисловий зразок* – результат творчої діяльності людини у галузі художнього конструювання, а саме: форма, малюнок чи розфарбування або їх поєднання, які визначають зовнішній вигляд промислового виробу і призначені для задоволення естетичних та ергономічних потреб (ст. 1 та ч. 3 ст. 6 закону «*Про охорону прав на промислові зразки*»). Це правовий захист результатів творчої праці дизайнерів.

Використання тільки художніх (наприклад, змінювання кольору) або конструкторських (наприклад, змінювання розмірів) засобів недостатньо, обов’язковою умовою є взаємодоповнення цих засобів.

Отже головна ознака промислового зразка – дизайнерське рішення, тобто визначення зовнішнього вигляду виробів, які задовольняють людські потреби, можуть сприйматися візуально та здатні зберігати свій зовнішній вигляд. Об’єкти дизайну – це промислові вироби (виробниче обладнання, побутова техніка, меблі, посуд, одяг тощо), елементи та системи середовища на виробництві, у місті, помешканнях, візуальна інформація та ін.

Об’єктами промислового зразка *не можуть бути* пропозиції, які за своїм змістом суперечать суспільним інтересам, принципам гуманності і моралі як за своїм призначенням (наприклад, знаряддя катування), так і за зовнішнім оформленням (наприклад, малюнки або написи порнографічного чи образливого характеру).

*Не визнаються патентоздатними* промисловими зразками:

– рішення виробів, зовнішній вигляд яких зумовлений їхньою технічною функцією (наприклад, гвинти, за винятком декоративних);

– об’єкти архітектури (окрім малих архітектурних форм), промислові гідротехнічні та інші стаціонарні споруди. До малих архітектурних форм відносять зовнішній вигляд кіосків, транспортних зупинок, телефонних будок тощо. Об’єкти архітектури охороняються авторським правом;

– друкована продукція - книги, газети, проспекти, буклети, які охороняються нормами авторського права;

– об’єкти, які не мають сталої форми, тобто є рідкими, газоподібними, сипкими і тому подібними речовинами.

Промислові зразки можуть бути:

– об’ємні − об’ємнопросторові структури, наприклад, зовнішній вигляд верстата, меблів, тощо;

– площинні − композиції, в основі яких елементи, які не мають об’єму: наприклад, зовнішній вигляд хустки чи килима, малюнки;

– комбіновані − це поєднання елементів. Наприклад, зовнішній вигляд інформаційного табло, циферблату годинника, будівельної оздоблювальної плитки;

– однооб’єктні − це окремий виріб (одиничний), або частина виробу, якщо вона має завершену композицію, функціонально самостійна, може бути використана з іншими виробами (наприклад, фари з різними моделями автомобілів, ручки і т.п.)

– багатооб’єктні, наприклад, комплект виробів, які складають ціле у сукупності: всі складові виконують різні функції, відрізняються одна від одної, але спрямовані на виконання однієї задачі комплектом в цілому.

Захищають також варіанти виробів: художньо-конструкторське рішення одного й того ж виробу, які мають різні суттєві ознаки при одних і тих же естетичних і ергономічних особливостях виробу. Наприклад, декілька автомобілів, які відрізняються один від одного формою ручок, фар, обличкуванням: декілька стільців, що відрізняються фактурою та кольором оббивочної тканини.

Принципова відмінність промислового зразка – у характері задач, які вирішуються. У конструктивному рішенні пристрою охороняється не зовнішній вигляд, а технічна сутність, яка може полягати в особливій формі, своєрідному розташуванні чи сполученні окремих частин, вузлів, деталей. Промисловий зразок, навпаки, вирішує задачу зовнішнього вигляду виробу за допомогою конструкторських та художніх засобів.

Промислові зразки повинні відповдати певним вимогам.

Основна вимога до промислового зразка – щоб він був новим та оригінальним, тобто мав індивідуальні характеристики зумовлені творчим внеском автора у формування зовнішнього вигляду промислового виробу.

Промисловий зразок визнається новим, якщо сукупність його суттєвих ознак не стала загальнодоступною у світі до дати подання заявки до Установи або, якщо заявлено пріоритет, до дати її пріоритету. Крім того, у процесі встановлення новизни промислового зразка береться до уваги зміст усіх раніше одержаних Установою заявок, за винятком тих, що на зазначену дату вважаються відкликаними, відкликані або за ними Установою прийняті рішення про відмову у видачі патентів і вичерпані можливості оскарження таких рішень.

### 5.3.4 Правова охорона засобів індивідуалізації учасників цивільного обігу, товарів та послуг

До об’єктів ІВ, як засобів індивідуалізації учасників цивільного обігу, товарів та послуг (або комерційних позначень) відносяться:

– комерційне (фірмове) найменування;

– торговельна марка (згідно з ЦКУ) або знак товарів і послуг (згідно із Законом України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг»);

– географічне зазначення походження товарів.

Охоронним документом стосовно торговельних марок та географічних зазначень походження є свідоцтво, яке видається державою в особі Державної служби.

*Комерційне* (*фірмове*) *найменування.* Тут принциповим є розмежування таких понять, як офіційне *найменування юридичної особи* і *комерційне* (*фірмове*) *найменуванням* цієї особи.

Так, офіційним найменуванням юридичної особи вважається назва, яка індивідуалізує юридичну особу в сукупності його прав і обов'язків як самостійного суб'єкта права. Таке найменування є для юридичної особи тим же, чим є для фізичної особи його ім'я, тобто особистим (моральним) правом, яке не може бути предметом обороту.

Комерційним (фірмовим) найменуванням є назва, якою фізична або юридична особа позначає підприємство, яке він використовує для ідентифікації своїх господарських (комерційних) відносин. Тому фірмове найменування, як об'єкт промислової власності, може передаватися, тобто бути предметом обороту, але тільки разом з з цілісним майновим комплексом або його частиною, яке воно позначає.

*Комерційне найменування* отримує охорону з моменту першого використання без обов’язкової реєстрації, але може бути внесено до реєстру.

З 1.07.2004 набув чинності закон «Про державну реєстрацію юридичних та фізичних осіб-підприємців», за яким передбачено внесення до Єдиного державного реєстру підприємств та організацій України (ЄДРПОУ) всіх учасників підприємницької діяльності. Саме тут накопичується найповніша інформація про комерційні найменування.

Право інтелектуальної власності на комерційне найменування є чинним з моменту першого використання цього найменування та охороняється без обов'язкового подання заявки на нього чи його реєстрації.

*Торговельна марка (знак для товарів і послуг)* – будь-яке позначення або будь-яка комбінація позначень, які придатні для вирізнення товарів (послуг), що виробляються (надаються) різними особами.

*Об'єктом торговельної марки* є слова, літери, цифри, зображувальні елементи, комбінації кольорів.

*Торговельна марка* засвідчується свідоцтвом.

R або ® або Reg TM (від англ. Registered trademark) – означає реєстрацію як позначення знака для товарів і послуг. Використовують також скорочення M (Mark), TM (Trade Mark) MR (Mark Registered), SM (service mark – марка обслуговування), слова Trademark, Registered Trademark (Зареєстрований знак «Велика Британія»), «Mark Registered» й іноді літера L (від англійського Logo – логотип).

Відносини, які виникають у зв'язку з набуттям і здійсненням права власності на знаки для товарів і послуг в Україні регулюються Законом України *«Про охорону прав на знаки для товарів і послуг»*.

Право власності на знак засвідчується свідоцтвом. Свідоцтво України на знак для товарів і послуг є офіційним охоронним документом, який видається від імені держави уповноваженим на це органом – Державною службою інтелектуальної власності України (ДСІВ).

Свідоцтво України на знак для товарів і послуг надає його власнику право використовувати знак, а також виключне право забороняти іншим особам використовувати без його згоди зареєстрований знак, виключне право розпоряджатися правом на знак в порядку, встановленому статтею 16 Закону України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг», та інші права, визначені цим Законом.

Права, які випливають із свідоцтва, діють від дати подання заявки.

Право на одержання свідоцтва має будь-яка фізична або юридична особа, об`єднання осіб або їх правонаступники.

Обсяг правової охорони, який надається, визначається зображенням знака та переліком товарів і послуг, внесеними до Державного реєстру свідоцтв України на знаки для товарів і послуг, і засвідчується свідоцтвом з наведеними в ньому копією внесеного до Реєстру зображення знака та переліком товарів і послуг.

Строк дії свідоцтва становить 10 років від дати подання заявки й продовжується за клопотанням власника свідоцтва щоразу на 10 років, за умови сплати збору в порядку, встановленому пунктом 2 статті 18 Закону. Порядок продовження строку дії свідоцтва встановлюється Положенням про Державний реєстр свідоцтв України на знаки для товарів і послуг, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки № 10 від 10.01.2002 та зареєстрованим у Міністерстві юстиції України за № 64/6352 від 28.01.2002.

Після припинення дії свідоцтва згідно з пунктами 1 – 3 статті 18 Закону ніхто іншій, крім колишнього власника, не має права на повторну реєстрацію знака протягом трьох років.

*Знак для товарів і послуг* – це позначення, яке вирізняє товари та послуги одних осіб серед таких самих або споріднених з ними товарів і послуг інших осіб. Цей термін зафіксований в Законі України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг».

У повсякденному житті в якості визначення для торговельних марок можна зустріти й інші назви: логотип, емблема, корпоративна або фірмова марка, бренд, торговельна марка, товарна марка, торговий знак, слоган, фірмовий знак. З'ясуємо, що мається на увазі під цими назвами.

*Trade mark* (торговельна марка, товарна марка, торговий знак, ТМ) – різні переклади «trade mark». Власне, це те ж саме, що й знак для товарів і послуг, тобто позначення, яке здатне відрізняти товари одних юридичних або фізичних осіб від подібних товарів інших юридичних або фізичних осіб.

*Фірмовий знак* – це унікальний графічний елемент, який зазвичай розташований поряд з назвою компанії. Може використовуватися й окремо без назви.

*Логотип* – спеціально розроблена, індивідуально стилізована форма назви підприємства, часто в оригінальному дизайнерському образі.

*Знак обслуговування* – це торгова марка, що використовується по відношенню до послуг, а не до товарів.

*Слоган* – короткі фрази, що підкреслюють деякі якості товару і характеристику товару або підприємства в цілому.

*Бренд* – зазвичай називають вже відому торгову марку, яка вже має репутацію серед споживачів і завоювала певний сегмент ринку.

*Види знаків для товарів і послуг.* Закон передбачає використання таких видів знаків для товарів і послуг:

*Словесні* (слова та абревіатури) – це знаки у вигляді сполучень літер, слів чи фраз.

Основна вимога до цього виду знаків – легка вимова на різних мовах. Вони набули найбільшої популярності, оскільки легко запам'ятовуються і зручні у рекламі.

Серед словесних марок можна виділити два різновиди: у першому випадку охороняється саме слово, у другому – словесне позначення, виконане у особливій шрифтовій манері, тобто охороні підлягає шрифт, характер розташування букв, їх відносний розмір, фон та інші візуальні інформативні елементи.

*Зображувальні* (композиція ліній, плям, фігур, форм на площині) – це позначення у вигляді графічних композицій будь-яких форм на площині. Сама назва свідчить про те, що вони втілюються у малюнку, кресленні тощо. У цьому випадку можуть бути використані як існуючі об'єкти, так і абстрактні зображення та інші символи. Для найбільшої ефективності зображувальний знак не повинен бути складним і перевантаженим деталями, а навпаки відрізнятися простотою і помітністю, щоб забезпечити успіх реклами, можливість використовувати зображення на різних матеріалах.

*Об'ємні* – це знаки у вигляді фігур або їх композицій у трьох вимірах – довжині, висоті і ширині.

Зазвичай, об'ємні товарні знаки являють собою сам товар або його пакування (пляшки, флакони, туби, коробки). Проте, об'ємні знаки не повинні просто повторювати зовнішній вигляд відомого предмета, а мають бути новими і оригінальними, Оскільки знак повинен виділяти виріб конкретного виробника з ряду інших товарів, то форма виробу не повинна визначатися винятково його функціональним призначенням.

*Комбіновані знаки* являють собою різноманітні комбінації слів та зображень.

*Нетрадиційні* – це світлові, звукові, ароматичні та інші знаки для товарів і послуг.

*Звукові* товарні знаки можуть бути представлені фрагментами музичних творів або короткими оригінальними звуками. Останнім часом цей вид товарного знака використовують все частіше. Часто звукові товарні знаки називають «джинглами». Джингл являє собою коротку, закінчену музичну фразу з вокальним проспівом, що може містити назву бренду або слоган. Прикладами звукових товарних знаків є позивні радіостанцій, радіопрограм, мелодії і заставки популярних телепередач тощо. Всесвітньо відомими прикладами звукових торгових марок можна назвати рингтон мобільних телефонів.

*Ароматичні* товарні знаки представлені запахами, зазвичай, не властивими певним товарам. Такі товарні знаки є вкрай рідкісними не лише в Україні, а й в у всьому світі. Вони практично не реєструються, оскільки досить важко представити їх на реєстрацію, а також оповістити споживачів про те, що даний аромат є товарним знаком.

Правила складання, подання та розгляду заявки на видачу свідоцтва України на знак для товарів і послуг передбачають, що зазначені знаки реєструються патентним відомством при наявності технічної можливості внесення їх до реєстру та оприлюднення інформації стосовно їх реєстрації. Так, якщо на реєстрацію як знак заявляється звукове позначення, то таке позначення надається у вигляді фонограми, зазначається вид звуку (музичний твір або його частина, шуми будь-якого походження та інше), а у випадку використання музичного твору – в описі наводиться його нотний запис. Якщо на реєстрацію як знак заявляється світлове позначення, то воно надається у вигляді відеозапису, наводиться характеристика світлових символів (сигналів), їх послідовність, тривалість світіння та інші особливості.

Зареєстрований знак для товарів та послуг відноситься до нематеріальних активів та є важливим елементом маркетингу.

Товарний знак – це своєрідна ланка між виробником товару чи послуги та їх споживачем. Він привертає увагу покупця до товарів, що ним маркуються, дозволяючи споживачеві вибрати необхідний йому товар певного виробника.

Товарні знаки виконують в основному чотири функції:

*Виділяють товар або послугу* серед інших подібних, що знаходяться у обігу. Це допомагає власникові товарного знака у продажу товару або наданні послуг, а покупцеві – у виборі потрібного товару чи послуги серед аналогічних.

*Вказують на походження товару або послуги.* При цьому під джерелом походження мається на увазі не географічна область, не ім'я та місцезнаходження його власника, а саме приналежність товару чи послуги деякому виробнику, бренду, оператору тощо.

*Вказують на певну якість товарів та послуг.* Як правило, власники товарних знаків підтримують їхню репутацію, стверджуючи, що товари і послуги з цими товарними знаками відповідають певному рівню стандарту якості. Проте споживач може і не знати назву фірми, що виготовляє товар, тобто різні товарні знаки можуть характеризувати різні товари, що виготовляються одним підприємством. Наприклад, на нашому ринку не кожному споживачеві відома назва компанії «Юнілевер», але кожному відомі товарні марки, які вона пропонує: Dove, Rexona, AXE, Timotei, Sunsilk, CLEAR, Domestos, CIF, Lipton, Knorr, Calve та інші – всього понад 400 торгових марок.

*Рекламують певний товар чи послугу.* Ця функція є однією з основних функцій товарного знака. Товарні знаки фактично є рекламними засобами. Функція рекламування є психологічним впливом на споживача, який здійснюється шляхом розміщення знака в пресі, на радіо і телебаченні. Після того, як товарний знак здобув добру репутацію, товару набагато легше поширюватися на нові ринки і тим самим стимулювати експорт.

Сукупність зазначених функцій визначає економічне значення товарного знака (торгової марки) для підприємства та всієї економіки. У товарних знаках (торгових марках) зацікавлені як виробники та продавці, так і споживачі, і державні органи, і взагалі уся економіка.

Ефективна система товарних знаків сприяє захисту споживачів від недобросовісної торгівлі та конкуренції (наприклад, використання оманливих або схожих товарних знаків.

Товарні знаки потрібні і для державних органів, відповідальних за перевірку якості товарів і послуг. Вони допомагають розпізнати товари та послуги, які не відповідають вимогам закону, що було виявлено у результаті скарг або лабораторних перевірок. Реєстрація товарних знаків є корисним джерелом статистичної та економічної інформації для державних органів.

Таким чином, вся країна повинна бути зацікавлена в ефективній правовій системі, яка забезпечує охорону товарних знаків і їх використання в інтересах виробників і споживачів.

Правова охорона надається знаку, який не суперечить публічному порядку, принципам гуманності та моралі й на який не поширюються підстави для відмови в наданні правової охорони, встановлені статтею 6 Закону України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг».

Не можуть одержати правову охорону позначення, які зображують або імітують:

– державні герби, прапори та інші державні символи (емблеми);

– офіційні назви держав;

– емблеми, скорочені або повні найменування міжнародних міжурядових організацій;

– офіційні контрольні, гарантійні та пробірні клейма, печатки;

– нагороди та інші відзнаки.

Такі позначення можуть бути включені до знака як елементи, що не охороняються, якщо на це є згода відповідного компетентного органу держави, символіка якої використовується як елемент знака, або компетентного органу власника (зокрема міжнародних міжурядових організацій).

Також не можуть одержати правову охорону, але можуть бути внесені до знака як елементи, що не охороняються, якщо вони не займають домінуючого положення в зображенні знака, позначення:

– які звичайно не мають розрізняльної здатності та не набули такої внаслідок їх використання;

– які складаються лише з позначень, що є загальновживаними як позначення товарів і послуг певного виду;

– які складаються лише з позначень чи даних, що є описовими в разі використання їх по відношенню до зазначених у заявці товарів і послуг або у зв'язку з ними, зокрема вказують на вид, якість, склад, кількість, властивості, призначення, цінність товарів і послуг, місце та час виготовлення чи збуту товарів чи надання послуг;

– які складаються лише з позначень, що є загальновживаними символами й термінами.

Не можуть одержати правову охорону такі позначення:

– які є оманливими або такими, що можуть ввести в оману щодо товару, послуги або особи, яка виробляє товар або надає послугу;

– які відображають лише форму, зумовлену природним станом товару чи необхідністю отримання технічного результату, або яка надає товару істотної цінності.

Не можуть бути зареєстровані як знаки позначення, які є тотожними або схожими настільки, що їх можна сплутати:

– із знаками, раніше зареєстрованими чи заявленими на реєстрацію в Україні на ім'я іншої особи для таких самих або споріднених з ними товарів і послуг;

– із знаками інших осіб, якщо ці знаки охороняються без реєстрації на підставі міжнародних договорів, учасником яких є Україна, зокрема знаками, визнаними добре відомими відповідно до статті 6 bis Паризької конвенції про охорону промислової власності;

– з фірмовими найменуваннями, які відомі в Україні й належать іншим особам, які одержали право на них до дати подання до ДСІВ заявки щодо таких самих або споріднених з ними товарів і послуг;

– з кваліфікованими зазначеннями походження товарів (у тому числі спиртів та алкогольних напоїв), які охороняються відповідно до Закону України «Про охорону прав на зазначення походження товарів». Такі позначення можуть бути лише елементами, що не охороняються, знаків осіб, які мають право користуватися вказаними зазначеннями;

– із знаками відповідності (сертифікаційними знаками), зареєстрованими у встановленому порядку.

Не реєструються як знаки позначення, які відтворюють:

– промислові зразки, права на які належать в Україні іншим особам;

– назви відомих в Україні творів науки, літератури й мистецтва або цитати й персонажі з них, твори мистецтва та їх фрагменти без згоди власників авторського права або їх правонаступників;

– прізвища, імена, псевдоніми та похідні від них, портрети і факсиміле відомих в Україні осіб без їх згоди.

Вимоги до заявки встановлені статтею 7 Закону України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг» та виданими на його основі Правилами складання, подання та розгляду заявки на видачу свідоцтва на знак для товарів і послуг, затвердженими наказом Державного патентного відомства України № 72 від 20.08.97 та зареєстрованими у Міністерстві юстиції України за № 416/2220 від 22.09.1997.

Заявка подається до Державного підприємства «Український інститут інтелектуальної власності» (Укрпатент) безпосередньо особою, яка бажає одержати свідоцтво, або за дорученням заявника заявка через представника в справах інтелектуальної власності (патентного повіреного), зареєстрованого відповідно до Положення про представника у справах інтелектуальної власності (патентного повіреного), або іншу довірену особу.

Заявка повинна складатися українською мовою, стосуватися одного знака та містити:

– заяву про реєстрацію знака, у якій обов'язково зазначаються відомості про заявника та його адреса;

– зображення знака, який заявляється;

– перелік товарів і послуг, для яких заявник просить зареєструвати знак, згрупованих за Міжнародною класифікацією товарів і послуг для реєстрації знаків (МКТП).

Якщо заявник просить про охорону кольору чи поєднання кольорів як відрізняльної ознаки свого знака, то він повинен:

– заявити про це та вказати в заяві колір чи поєднання кольорів;

– подати в заявці кольорові зображення знака.

Експертиза заявки проводиться відповідно до статті 10 Закону України «Про охорону прав на знаки для товарів і послуг» та Правил і складається з формальної експертизи та кваліфікаційної експертизи (експертизи по суті).

Після проведення формальної експертизи, під час якої заявка перевіряється на відповідність формальним вимогам статті 7 Закону та встановлюється дата її подання, проводиться кваліфікаційна експертиза заявки, під час якої перевіряється відповідність заявленого позначення умовам надання правової охорони.

Кінцеві результати експертизи заявки, яка не відкликана й не вважається такою, відображаються в обґрунтованому висновку експертизи за заявкою, що набирає чинності після затвердження його ДСІВ. На підставі такого висновку

ДСІВ приймає рішення про реєстрацію знака для всіх зазначених у заявці товарів і послуг або про відмову в реєстрації знака для всіх зазначених у заявці товарів і послуг, або про реєстрацію знака щодо частини зазначених у заявці товарів і послуг та відмову в реєстрації знака для іншої частини зазначених у заявці товарів і послуг. Рішення за заявкою надсилається заявнику.

На підставі рішення про реєстрацію знака для товарів і послуг та за наявності документа про сплату державного мита за видачу свідоцтва й збору за публікацію про його видачу відомості про видачу свідоцтва, визначені в установленому порядку, публікуються в офіційному бюлетені «Промислова власність». Зазначені мито та збір сплачуються після надходження до заявника рішення про реєстрацію знака.

Одночасно з публікацією відомостей про видачу свідоцтва ДСІВ здійснює державну реєстрацію знака, для чого вносить до Державного реєстру свідоцтв України на знаки для товарів і послуг відповідні відомості.

Власник свідоцтва на знак для товарів та послуг має право:

– використовувати торговий знак

– проставляти попереджувальне маркування

– забороняти іншим особам без його згоди

– вимагати припинен- ня порушення своїх прав та відшкодуван- ня заподіяних збитків

– видавати ліцензії на використання

– передавати право власності на знак

Термін охорони прав 10 років, з правом продовження щоразу на 10 років

*Географічні зазначення* відповідно до закону «*Про охорону прав на зазначення походження товарів*» охоплюють:

– просте зазначення походження товарів.

– кваліфіковане зазначення походження товарів.

*Просте зазначення* походження товарів – будь-яке словесне або зображувальне (графічне) позначення, що прямо або опосередковано вказує на географічне місце походження товару.

Реєстрації не підлягає, охорона надається на підставі використання. *Кваліфіковане зазначення* місця походження товару – це назва географічного місця, яка вживається для позначення товару, що походить саме з цього географічного місця, та має певні особливості (якості, властивості, репутацію тощо), виключно або головним чином зумовлені характерними для цього місця природними умовами та/або людським фактором. Охоплює *географічне зазначення походження* (ГЗП) та *назву місця походження* (НМП) товару.

*ГЗП* – це географічна назва певного регіону, яка вказує на особливі якості товару, але не зобов’язує цей товар виробляти саме у цій місцевості. Наприклад, твори декоративно-прикладного мистецтва, які зумовлені технологією, що виникла у певній місцині, та людьми, які її використовують, але виробництво цього товару може бути зосереджено зовсім в іншому місці.

*НМП* передбачає певні особливості товару, які можуть бути забезпечені лише у конкретній місцевості (тобто дотримання технології та наявність людей, які нею володіють – умови необхідні, але недостатні). Найчастіше це стосується сільськогосподарських та природних продуктів (вина, мінеральна вода конкретного виду

*Географічне зазначення* також повинно відповідати певним вимогам:

– охорона надається лише кваліфікованому зазначенню походження товарів;

– застосовується тільки до товарів і не застосовується до послуг;

– зазначення містить назву місця походження товару або місця, де виробляється або перероблюється сировина; Об’єктивно в цьому місці існують особливі умови та фактори, що спричинюють особливі властивості та якості

– виробництво (видобування) і переробка позначуваного цією назвою товару або хоча б основної складової здійснюється в межах зазначеного географічного місця (в першому випадку це НМП, а в другому – ГЗП).

Для попереджувального маркування кваліфікованого зазначення походження товару використовують обведену овалом абревіатуру ГЗП або НМП. Замість маркування або додатково до нього – текст «Зареєстроване в Україні географічне зазначення походження товару» або «Зареєстрована в Україні назва місця походження товару».

Реєстрація географічного зазначення безстрокова, за умови збереження характеристик товару, позначеного цим зазначенням. Свідоцтво на право використання діє 10 років з правом продовження щоразу на 10 років.

Власник свідоцтва на право використання *кваліфікованого зазначення походження товару* також має право використовувати зареєстроване зазначення походження, забороняти таке використання особам, які не мають на це права та вимагати припинення цих порушень і відшкодування матеріальної і моральної шкоди, має право наносити попереджувальне маркування. Розпорядження географічним зазначенням неможливе. Ці права не є виключними (монопольними), бо відносяться до кола суб’єктів права: реєстрація прав на використання кваліфікованого зазначення походження товару не обмежує прав інших осіб на реєстрацію їх прав на його використання.

### 5.3.5 Правова охорона нетрадиційних об'єктів інтелектуальної власності

*Правова охорона компонування інтегральної мікросхеми.* Топографія ІМС – зафіксоване на матеріальному носієві просторово-геометричне розміщення сукупності елементів інтегральної мікросхеми та з'єднань між ними.

Держава здійснює правову охорону топографії ІМС шляхом її реєстрації у Державному департаменті ІВ та засвідчує це свідоцтвом. Обсяг правової охорони визначається зображенням компонування ІМС на матеріальному носієві.

Охорона не поширюється на ідеї, способи, системи, технології, закодовану інформацію, які можуть бути втілені у топографії ІМС.

Умова охороноздатності топографії ІМС: оригінальність.

*Правова охорона комерційної таємниці.* ЦКУ дає визначення комерційної таємниці як відомостей технічного, організаційного, комерційного, виробничого та іншого характеру, за винятком тих, що за законом не можуть бути внесені до комерційної таємниці. Ця інформація є секретною в тому розумінні що є невідомою та не є легкодоступною для третіх осіб, а особа, що її контролює, вживає заходи щодо збереження її секретності.

Тобто ЦКУ визначає критерії, яким повинна відповідати комерційна таємниця:

– відомості, що становлять комерційну таємницю, подані у формі інформації;

– секретність інформації (недоступність для ознайомлення без дозволу невизначеному колу осіб);

– комерційна цінність;

– забезпечення адекватних засобів охорони з боку особи, яка законно контролює цю інформацію.

Тільки за виконання цих умов підприємець має право на судовий захист своїх інтересів.

У понятті комерційної таємниці поєднують умовно:

– ділову інформацію;

– службову таємницю;

– торговельний секрет (Trade secrets);

– нерозкриту інформацію – ноу-хау (від англ. know-how – «знати як»);

– конфіденційну інформацію.

Охорона комерційної таємниці має бути частиною системи управління підприємством і системи безпеки. Система безпеки безпосередньо пов'язана з маркетингом, патентуванням, інформаційним забезпеченням. Особливо важлива система безпеки для підприємств-експортерів.

Обов'язки працівника щодо збереження комерційної таємниці оговорюють у трудовому контракті. У багатьох країнах передбачено підписання робітником договору про нерозголошення: зобов'язання не розголошувати відому інформацію як під час роботи у компанії, так і протягом певного строку після звільнення.

*Ноу-хау*. Одна із складових комерційної таємниці, яка зазвичай відноситься до промислової власності. Маються на увазі технічні знання, досвід, секрети виробництва, які є необхідними для вирішення виробничої задачі і належать до конфіденціальної інформації, тобто є цінними лише тому, що невідомі третім особам.

Можливі об'єкти ноу-хау:

– патентоспроможні але не заявлені об'єкти промислової власності або заявлені, але ще офіційно не опубліковані;

– винаходи патентоспроможні, але не заявлені навмисно, наприклад, через неможливість легального виявлення порушення прав патентовласника ( способи діагностики і лікування, виміру фізичних та хімічних величин без зв'язку із приладами, способи перетворення енергії поза зв'язком з апаратними засобами);

– непатентоспроможні винаходи (алгоритми, комп'ютерні програми, способи організації планування виробництва та збуту товарів, керування виробництвом і збутом товарів, способи бухгалтерського обліку;

– інформація текстової та графічної технічної документації (креслення, рецептура матеріалів, технологічні процеси, технологічні карти, ін- струкції, бізнес-плани, звіти про НДКР тощо).

*Правова охорона наукових відкриттів.* Відкриття – це встановлення невідомих раніше, але об'єктивно існуючих закономірностей, властивостей та явищ матеріального світу, які вносять докорінні зміни у рівень наукового пізнання.

Відкриттями у цьому розумінні не визнаються географічні, археологічні, палеонтологічні відкриття, а також відкриття родовищ корисних копалин та відкриття в галузі суспільних наук.

Право на відкриття засвідчується дипломом.

Автор відкриття має особисті немайнові права:

– право авторства – право вважатися першовідкривачем певних знань;

– право на ім'я – право надати відкриттю своє ім'я або спеціальну назву.

*Правова охорона раціоналізаторських пропозицій.* Раціоналізаторською пропозицією є визначена юридичною особою пропозиція, яка містить технологічне (технічне) або організаційне рішення в будь-якій сфері її діяльності.

Об'єкт раціоналізаторської пропозиції – матеріальний об'єкт або процес. Критерії визначення пропозиції раціоналізаторською:

– технічне або організаційне рішення;

– місцева новизна (невідомість на конкретному підприємстві);

– корисність.

Автор отримує свідоцтво на раціоналізаторську пропозицію, яка діє безстроково у межах того підприємства, яке його видало.

*Правова охорона селекційних досягнень.* Селекційними досягненнями є результати науково-практичної діяльності по створенню сортів і гібридів рослин та пород тварин із заданими ознаками.

*Сорт рослин* – це окрема група рослин (клон, лінія, гібрид першого покоління, популяція), яка:

– може бути виділена у групі рослин, споріднених між собою спільними ознаками та властивостями (у межах ботанічного таксону);

– має хоча б одну відмінність від відомої групи рослин, яка характеризується спадковістю;

– придатна для відтворення рослин сорту в незмінному вигляді.

*Порода тварин* – це створена внаслідок творчої діяльності група тварин (лінія, сім'я, породний тип), яка має стійкі генетичні ознаки, що передаються їхнім нащадкам.

Майнові права на селекційні досягнення (на сорт рослин та породу тварин) засвідчуються патентом на сорт рослин, породу тварин, строк чинності якого 30 років; на дерева, виноград – 35 років (з 1 січня року, наступного за роком реєстрації прав).

### 5.3.6 Управління і захист промислового права

*Суб'єкти патентного права.*

*Автори (винахідники)* – фізичні особи, інтелектуальною працею яких створено об'єкти права ІВ. Мають право на надання свого імені або спеціальної назви створеному об'єкту.

Якщо авторів кілька, тобто вони співавтори, то відносини між ними і розподіл часток у правах, що їм належать, визначає договір між ними. Можуть діяти спільно, або доручити ведення прав патентному повіреному або надати повноваження одному із співавторів. Суперечки між співавторами вирішує суд.

Автор може передати право на патент іншій особі згідно договору або заповіту.

*Власники патентів* – фізичні або юридичні особи, які володіють патентом та відповідними виключними правами на їх використання.

Патентовласником може бути автор (винахідник чи автор промислового зразка), його роботодавець, замовник чи їх правонаступник.

Патентовласниками можуть бути кілька осіб одночасно (взаємини між ними регулюються угодою), а також іноземні фізичні чи юридичні особи. Якщо іноземні патентовласники є громадянами країн – учасниць Паризької конвенції або мають у цих країнах постійне місцезнаходження чи дійсне підприємство, то користуються тими самими правами, що й національні патентовласники.

*Правонаступники* – фізичні або юридичні особи яким патентовлас- ник передає свої права на патент згідно договору.

Особа, яка одержує права по використанню винаходу за плату – ліцензіат, а комерційний договір, що визначає обсяг переданих прав – це ліцензія.

У разі смерті автора або патентовласника його майнові права успадковують спадкоємці – згідно закону або за заповітом. Спадкоємець має право передати права зацікавленим особам.

Права правонаступників повинні бути відповідним чином оформленні (свідоцтвом про спадщину, рішенням суду або договором тощо).

Особи, які не є суб'єктами патентного права, але відіграють важли- ву роль в набутті правової охорони, – представники в справах інтелектуальної власності *(патентні повірені)*. Це атестовані спеціалісти, які за дорученням фізичних та юридичних осіб виконують замість них дії по отриманню охоронних документів на об'єкти права ІВ, представляють їх інтереси у патентних установах, судах тощо, надають консультації.

*Права патентовласника.* Патентовласник має право:

– самостійно використовувати винахід, патент на який йому нале- жить;

– надати право на його використання іншим особам (можливо декіль- ком одночасно);

– передати всі свої виключні права стосовно даного винаходу - відступлення патенту.

Якщо патент належить кільком особам, то їх стосунки визначаються угодою між ними. За відсутності такої угоди кожен із співвласників може використовувати ОПВ на свій розсуд, але не має права надати на нього ліцензію або передати патент іншій особі без згоди інших співвласників.

*Використанням винаходу* (*корисної моделі*) в Україні визнається:

– виготовлення продукту із застосуванням запатентованого винаходу (корисної моделі),

– застосування такого продукту,

– пропонування для продажу, в тому числі через Інтернет,

– продаж,

– імпорт (ввезення) та

– інше введення його в цивільний оборот або

– зберігання такого продукту в зазначених цілях;

– застосування процесу, що охороняється патентом, або

– пропонування його для застосування в Україні, якщо особа, яка пропонує цей процес, знає про те, що його застосування забороняється без згоди власника патенту або, виходячи з обставин, це і так є очевидним.

*Використанням промислового зразка визнається*:

– виготовлення виробу із застосуванням запатентованого промислового зразка,

– застосування такого виробу,

– пропонування для продажу, в тому числі через Інтернет,

– продаж,

– імпорт (ввезення) та інше введення його в цивільний оборот або

– зберігання такого виробу в зазначених цілях.

Продукт визнається виготовленим із застосуванням запатентованого винаходу (корисної моделі), якщо при цьому використано кожну ознаку, включену до незалежного пункту формули винаходу (корисної моделі), або ознаку, еквівалентну їй.

Процес, що охороняється патентом, визнається застосованим, якщо використано кожну ознаку, включену до незалежного пункту формули винаходу, або ознаку, еквівалентну їй.

Будь-який продукт, процес виготовлення якого охороняється патентом, за відсутністю доказів протилежного вважається виготовленим із застосуванням цього процесу за умови виконання принаймні однієї з двох вимог:

– продукт, виготовлений із застосуванням процесу, що охороняється патентом, є новим;

– існують підстави вважати, що зазначений продукт виготовлено із застосуванням даного процесу і власник патенту не в змозі шляхом прийнятних зусиль визначити процес, що застосовувався при виготовленні цього продукту.

В такому разі обов'язок доведення того, що процес виготовлення продукту, ідентичного тому, що виготовляється із застосуванням процесу, який охороняється патентом, відрізняється від останнього, покладається на особу, щодо якої є достатні підстави вважати, що вона порушує права власника патенту.

Право патентовласника забороняти використання винаходу іншим особам називають виключним. Виключне право дозволяє попередити порушення (несанкціоноване використання запатентованого винаходу) та отримати прибуток від передачі (повної чи часткової) прав на винахід.

Право на використання винаходу передається іншим зацікавленим особам згідно ліцензії. Ліцензія – це дозвіл, згідно якого особа, яка володіє виключним правом на винахід (ліцензіар), дозволяє іншій особі (ліцензіату) за узгоджену винагороду і у певних межах використовувати об'єкт цього права.

Ліцензійний договір – це вид комерційної угоди, особлива форма угоди купівлі-продажу ОПВ,зокрема, передачі технологій (трансфер технологій).

Види ліцензійних виплат (ліцензійних винагород).

Паушальні виплати – виплата ліцензіару зафіксованої в угоді певної суми до початку масового випуску продукції, одноразово або частинами.

Роялті – це виплати, які ліцензіат виплачує ліцензіару протягом всього строку дії угоди. Частка ліцензіара у прибутку ліцензіата визначається відрахуваннями від кожної одиниці продукції, що виготовлена за ліцензією.

Комбіновані ліцензійні виплати поєднують одноразові виплати та періодичні відрахування.

Комерційна передача технологій може здійснюватися за комерційною концесією або за договором про комерційне посередництво у розповсюдженні товарів та послуг.

Право власності на патент (тобто всі виключні права) можна передати будь-якій фізичній чи юридичній особі згідно угодам купівлі-продажу, послуг, міни, дарування тощо. Передача виключних прав на запатентований об'єкт може бути вкладом особи у статутний фонд спільного підприємства, що відображується в договорі про спільне підприємство. Договори про відступлення патентного права обов'язково реєструються у національних патентних установах.

## 5.4 Правова охорона об'єктів авторського і суміжного права

Законодавство Украни про авторське право і суміжні права базується на Конституції України і складається з відповідних норм ЦКУ (гл. 36, гл. 37), закону «Про авторське право та суміжні права». Окремі положення щодо охорони і захисту авторських та суміжних прав містять закони України «Про кінематографію», «Про телебачення і радіомовлення», «Про видавничу справу», «Про розповсюдження примірників аудіовізуальних творів, фонограм, відеограм, комп'ютерних програм, баз даних», «Про особливості державного регулювання діяльності суб'єктів господарювання, пов'язаної з виробництвом, експортом, імпортом дисків для лазерних систем зчитування», «Про рекламу» тощо.

### 5.4.1 Авторське право

Об'єктами авторського права є твори у галузі науки, літератури і мистецтва, а саме:

– літературні письмові твори белетристичного, публіцистичного, наукового, технічного або іншого характеру (книги, брошури, статті тощо);

– виступи, лекції, промови, проповіді та інші усні твори;

– комп'ютерні програми;

– бази даних;

– музичні твори з текстом і без тексту;

– драматичні, музично-драматичні твори, пантоміми, хореографічні та інші твори, створені для сценічного показу, та їх постановки;

– аудіовізуальні твори;

– твори образотворчого мистецтва;

– твори архітектури, містобудування і садово-паркового мистецтва;

– фотографічні твори, у тому числі твори, виконані способами, подібними до фотографії;

– твори ужиткового мистецтва, у тому числі твори декоративного мистецтва, ткацтва, кераміки, різьблення, ливарства з художнього скла, ювелірні вироби тощо, якщо вони не охороняються законами України про правову охорону об'єктів промислової власності;

– ілюстрації, карти, плани, креслення, ескізи, пластичні твори, що стосуються географії, геології, топографії, техніки, архітектури та інших сфер діяльності;

– сценічні обробки творів, зазначених у пункті 1 цієї частини, і об- робки фольклору, придатні для сценічного показу;

– похідні твори;

– збірники творів, збірники обробок фольклору, енциклопедії та антології, збірники звичайних даних, інші складені твори за умови, що вони є результатом творчої праці за добором, координацією або упорядкуванням змісту без порушення авторських прав на твори, що входять до них як складові частини;

– тексти перекладів для дублювання, озвучення, субтитрування українською та іншими мовами іноземних аудіовізуальних творів;

– інші твори.

*Виникнення авторських прав та підстави для охорони.* ОАП є твори без виконання будь-яких формальностей щодо них та незалежно від їх завершеності, призначення, цінності, обсягу, способу чи форми їх вираження та мети (освіта, інформація, реклама, пропаганда, розваги тощо). Охорона поширюється як на оприлюдненні, так і на не оприлюдненні твори.

Твір не може бути опублікований, якщо порушує права людини на таємницю її особистого і сімейного життя, завдає шкоди громадському порядку, здоров'ю та моралі населення.

Охорона стосується творів, що мають матеріальну форму (наприклад, ненадруковані, але записані), але у деяких випадках і ця умова не є обов'язковою (наприклад, промови, лекції, проповіді – в усній формі), але у цьому разі важко довести авторство.

Охороняється також і частина твору, яка може використовуватися самостійно, зокрема, оригінальна назва.

Критерії охорони творів (для захисту прав у суді):

– новизна (іноді оригінальність, це не синонім новизни, може забезпечити охорону схожих творів), тобто мається на увазі те, щоб твір не був плагіатом. Новизна може стосуватися як змісту, так і форми.

– вираження у матеріальній формі. Трактується згідно національних законодавств.

Не є об'єктами АП і не охороняються:

– повідомлення про новини дня або поточні події (прес-інформація);

– твори народної творчості (фольклор), але охороняються обробки фольклору – похідні твори;

– офіційні документи політичного, законодавчого, адміністративного характеру (закони, укази, постанови, державні стандарти) та їх офіційні переклади;

– державні символи України, державні нагороди, символи і знаки органів державної влади та військових формувань, підприємств, установ, організацій, територіальних громад;

– грошові знаки;

– розклади руху транспорту, розклади телерадіопередач, телефонні довідники, бази даних, що не відповідають критерію оригінальності і на які поширюються право sui-generis (своєрідне, особливого роду право)

Але проекти офіційних символів і знаків, зокрема грошових, до їх офіційного затвердження розглядаються як твори.

Не охороняються, наприклад, фотографії, отримані за допомогою спеціальних технічних пристроїв без участі людини (супутникові, метеорологічні), бо вони не є об’єктом творчої праці, тобто не є об’єктом авторського права. Але фотографії є власністю організацій, що здійснили фотографування.

*Суб’єкти авторського права.*

Автор твору – первинний суб’єкт авторського права, за відсутністю доказів іншого – фізична особа, зазначена як автор на оригіналі або примірнику твору (презумпція авторства), навіть якщо твір опубліковано під псевдонімом (за умови, що він ідентифікує автора) – тобто УААСП не перевіряє дійсне авторство. Суб’єктами авторського права можуть бути як громадяни України, так і іноземці. Іноземні громадяни-автори користуються захистом авторського законодавства в Україні, якщо створені ними твори знаходяться в якійсь об’єктивній формі на території України, а якщо ні - то відповідно до міжнародних договорів України і спільних конвенцій по авторському праву (Женевської, Бернської). Суб’єктами авторського права можуть бути співавтори, якщо твір створений спільною творчою працею двох або більше осіб.

Спадкоємці. Успадковують лише майнові права, право авторства, (право на авторське ім’я) не успадковується. (Виняток: До спадкоємців може переходити і особисте немайнове право «протидіяти будь-якому перекрученню, спотворенню чи іншій зміні твору або будь-якому іншому посяганню на твір, що може зашкодити честі і репутації автора»).

Правонаступники – особи, які за законом або договором набули авторського права, зокрема, юридичні особи (театри, видавництва тощо), які займаються використанням творів.

Організації колективного управління, не є самостійними суб’єктами авторського права, а діють від імені автора та на підставі договору з ним, управляють майновими правами авторів на колективній основі, зокрема збирають винагороду за використання творів.

*Особливі випадки авторських прав.*

*Твори, створені у співавторстві.* Авторське право належить всім співавторам незалежно від того, чи є твір одним цілим, чи складається із самостійних частин. Відносини між співавторами визначаються угодою між ними, зокрема це стосується час- тини винагороди.

Якщо твір є одним цілим, то жоден із співавторів не може без достатніх підстав відмовити іншим у дозволі на використання або зміну твору.

Якщо твір складається з окремих самостійних частин, то кожен має право використовувати свою частину на власний розсуд, якщо спільна угода не передбачає інше. Автор кожної частини зберігає своє авторське право.

Наприклад, аудіовізуальний твір, авторами якого є митці різних жанрів – режисер, сценарист, автор пісень, композитор, художник, оператор-постановник. Як співавторство можуть розглядатись ще й замовлені твори, наприклад, музичне супроводження, створене для конкретного фільму.

Співавторством є авторське право на інтерв'ю (особа, що дала інтерв'ю і особа, що взяла). Опублікування інтерв'ю допускається лише за згодою особи, що його дала.

Якщо угода про співавторство відсутня, винагорода за використання твору належить всім співавторам у рівних частинах.

*Складені твори.* Це різного роду збірники, антології, збірники обробок фольклору тощо за умови, що вони є результатом творчої праці по добору, упорядкуванню змісту без порушення охорони прав творів, які входять до них. Автори мають право використовувати свої твори незалежно від складеного

твору, якщо інше не передбачене договором. Упорядник має авторське право на підбір та розташування творів.

*Колективні твори.* Енциклопедії, енциклопедичні довідники, періодичні збірники, збірники наукових праць, газети, журнали тощо. Особи, що організовують створення таких творів, не визнаються авторами, але їм належать виключні права на використання таких творів в цілому, а авторам – на використання своїх частин.

Відмінність між колективним та складеним твором: при використанні колективного твору повинен укладатися один договір з усіма авторами, а при використанні складеного – окремий договір на кожний твір, що входить до нього.

*Службові твори* можуть бути створені у зв'язку із трудовим договором та за замовленням. В обох випадках передбачено, що:

– немайнові права належать авторові;

– окремі особисті немайнові права можуть належати юридичній чи фізичній особі, у якої працює автор, або замовникові;

– майнові права на ОПІВ належать працівникові, який створив об'єкт (авторові) та роботодавцеві спільно, якщо інше не встановлено договором (контрактом) або законом. Ці договори між автором і роботодавцем встановлюють розмір і порядок виплати авторської винагороди за створення і використання службового твору.

Розрізняють активне комерційне використання продукту творчої діяльності – безпосередній продаж матеріального носія (книг, відеокасет тощо) або публічний показ (кінофільм і т.п.) та пасивне – видача ліцензій на використання частин творів у комерційному обороті. Саме таким пасивним використанням є використання відомих персонажів як брендів, крилатих висловів, окремих кадрів мультиплікаційних фільмів, елементів одягу персонажів, оригінальних речей тощо.

*Персонажі.* Права на персонаж належать автору першого твору, де він з'явився. Наприклад, в багатьох випадках персонажі мультиплікаційних або художніх фільмів створені авторами книг або сценарію і саме їм належать права на персонаж. Наступне їх використання є адаптацією або іншою переробкою, яка дає право на захист авторським правом, але за умов дотримання прав первинного автора.

Ст. 9 закону «Про авторське право і суміжні права» передбачає використання частини твору, в тому числі і оригінальної назви, самостійно. В цьому разі вони розглядаються як твір і охороняються авторським правом. Охороняється форма вираження твору, а не теорії, принципи, концепції і т.п., навіть якщо вони описані і проілюстровані у творі. Графічний персонаж має певну фізичну форму, а літературний існує в уяві читача. Була навіть ідея захисту форми вираження частини твору як образу, що виникає в людській уяві, шляхом проведення експертизи, щоб виявити ступінь схожості між даним персонажем і іншими, які можуть його імітувати.

В Україні графічний або намальований персонаж захищається авторським правом як твір образотворчого мистецтва, як твір ужиткового мистецтва, як ілюстрація тощо (невичерпний перелік).

Захищається тільки форма вираження. Наприклад, якщо використовується мультфільм, то охороняється кожна окрема поза персонажа і його вислови як частина сценарію.

*Реклама.* Одним з об'єктів авторського права може бути рекламне повідомлення, якщо воно виражене в оригінальній формі і є результатом творчої діяльності. (Якщо це інформаційне повідомлення, наприклад, про переваги товару, то авторським правом не охороняється). Про творчий характер свідчать оригінальність та неповторність.

Реклама є одним з видів творів, зазначених у закону «Про авторське право і суміжні права», або містить їх. Наприклад:

– літературні твори (оригінальні рекламні повідомлення, сценарії рекламних роликів тощо);

– музичні твори (музичний ряд, що супроводжує всі рекламні повідомлення про певний товар, є його візитною карткою);

– аудіовізуальні твори (рекламні відеоролики);

– твори живопису, скульптури, графіки (зовнішня реклама, форма та дизайн пакування);

– фотографії (фотографії товару у друкованих рекламних виданнях тощо).

Даний перелік не є вичерпним. У авторському договорі передбачають можливість анонімного використання, тобто без імені автора, бо інакше буде мати місце порушення одного з немайнових прав автора.

Правовласником за звичай є рекламодавець. Йому належать майнові права на використання реклами в будь-якій формі та будь-яким способом. Однак для цього треба, щоб автор рекламного твору (для аудіовізуальних творів – це режисер-постановник, автор сценарію, автор музики, художник та ін.) був працівником рекламодавця з відповідними службовими обов’язками або з ним був укладений авторський договір.

*Фотографії.* Українське законодавство передбачає охорону фотографій авторським правом (ст. 8 закону «Про авторське право і суміжні права»). Але закон не містить визначення терміну «фотографія», що зумовлює неоднозначні рішення, наприклад, у суді щодо того, чи вважати фотографією зображення, зафіксоване на мікроплівці або слайдові плівці, тобто чи розповсюджується правова охорона на подібні зображення. Можна навести кілька визначень терміну «фотографія». Фотографічний твір – зображення реальних об’єктів, яке отримано на поверхнях, які є чутливими до світла або іншого випромінювання. Фотографіями треба вважати нерухомі зображення, які отримують на поверхнях, які є чутливими до світлового або іншого випромінювання, незалежно від технічного здійснення процесу, яким отримано зображення (хімічного, електронного або якогось іншого) – за принципами охорони фотографічних творів, які розроблені спеціалістами ВОІВ.

Слайдфільми та діафільми також по суті є фотографічними творами, бо містять дискретно надану інформацію та нерухомі образи – на відміну від аудіовізуальних творів.

Якщо фотожурналіст робить фотографію з власної ініціативи, то йому належать всі авторські права на неї.

Якщо фотожурналіст є співробітником газети, часопису тощо, то його фотографію можна розглядати як службовий твір у разі виконання певних умов:

– журналіст є співробітником за наймом(трудовий договір), а не позаштатним співробітником або незалежним працівником, який надає свої послуги згідно з цивільно-правовим договором;

– твір створено журналістом саме як співробітником, що працює за наймом – як виконання своїх службових обов'язків, і саме з метою публікації у газеті, часописі тощо;

– розмір авторської винагороди за кожний вид використання службового твору обов'язково встановлено в договорі між автором та роботодавцем;

– роботодавець має право використовувати створений журналістом твір лише в період, коли автор має з ним трудові стосунки.

*Твори архітектури.* Згідно закону «Про авторське право і суміжні права» твір архітектури – це твір у галузі мистецтва спорудження будівель і ландшафтних утворень (креслення, ескізи, моделі, збудовані будівлі та споруди, парки, плани населених пунктів тощо).

За законом України «Про архітектурну діяльність» об'єктами авторського права на твори архітектури є архітектурні рішення об'єктів архітектури чи містобудівництва (творів архітектури) на всіх стадіях їх проектування та будівництва.

Співавторами твору архітектури вважаються особи, результатом творчості яких є архітектурні рішення окремих самостійних розділів проекту (інтер'єри приміщень, окремі будинки чи споруди архітектурних комплексів, благоустрій території тощо).

Співавторами не можуть бути особи, які надають автору технічну, консультативну чи організаційну допомогу або здійснюють організацію проектування і будівництва та контроль за виконанням цих робіт (реконструкція, реставрація, капітальний ремонт).

Авторам твору архітектури належать всі немайнові та майнові права визначені закону «Про авторське право і суміжні права».

Особливі немайнові права автора архітектурного твору – безперешкодне фотографування власного твору архітектури та зазначення на об'єкті архітектури власного імені.

Майнові права автора архітектурного твору можуть стосуватися не лише проекту об'єкту, а і створеної за ним робочої документації та розповсюджуються на збудований об'єкт архітектури.

Автор проекту твору архітектури, створеного на замовлення, має виключне право на:

– участь у подальшій його реалізації, якщо інше не передбачено умовами договору із замовником (авторський нагляд);

– внесення змін до об'єкту архітектури у разі зміни його функціонального призначення або реконструкції;

– авторський гонорар за створення твору архітектури та його використання.

Використання архітектурного проекту для реалізації є одноразовим, якщо інше не передбачене договором на створення проекту. Повторне застосування проекту та його робочої документації можливе виключно за згодою автора із виплатою авторської винагороди.

Майнові права автора щодо проекту та збудованого об’єкту архітектури зберігаються за автором у разі зміни власника або користувача об’єкта.

Припускається вільне використання зображення творів архітектури, які постійно знаходяться у місці, відкритому для вільного відвідування, крім випадків, коли зображення твору є основним об’єктом відтворення з комерційною метою.

*Картографічні твори.* Картографічними творами є всі види карт, атласів, планів, незалежно від їх форми та виду носія інформації: аерокосмофотокарти, аерокосмофотоплани, їх похідна продукція; цифрові карти і схеми (цифрові моделі місцевості), їх програмне забезпечення; картографічний зміст глобусів; рекламна картографічна продукція; ескізи ілюстрації, що стосується географії, топографії, картографії тощо.

Об’єктами авторського права при створенні картографічних творів є творчі роботи:

– розробка проекту картографічного твору або серії взаємозв’язаних творів – форма твору, призначення, зміст, спосіб картографічного зображення, методика передачі інформації тощо;

– розробка авторського оригіналу твору – тематичний зміст, система умовних позначень, художнє оформлення, переклад тощо;

– розробка нових геоінформаційних технологій, програмних комплексів для створення обробки і збереження цифрової картографічної інформації;

– розробка нових технологій при створенні глобусів, рель’єфних карт і планів.

Авторським правом охороняються також твори картографічної тематики: методи створення або оновлення картографічних творів; створення нових каталогів, довідників картографічної інформації; публікації та нау- кові розробки цієї тематики.

*Музейні експонати.* Авторські права відносяться також до предметів мистецтва, які експонують у музеях. Великі музеї найчастіше експонують твори, на які скінчився строк дії авторського права: мається на увазі не строк дії майнового права на матеріальні носії – скульптури, полотно тощо, а авторське майнове право на результат творчості. В цьому випадку ніхто не має виключного права дозволяти чи забороняти відтворення та розповсюдження відповідної картини.

Якщо строк дії авторського права не скінчився, то музей зберігає матеріальний носій і цим вичерпуються його повноваження, якщо інше не передбачено договором.

Але музей має право заборонити доступ до експонатів, які як матеріальна власність належать в його особі державі. Музей повинен також, як особа уповноважена державою, піклуватися про збереження експонатів і, наприклад, заборонити фотографування у разі, коли це завдає шкоди мистецькому твору (використання магнієвого спалаху). Вхідний білет до музею є матеріальним відображенням наданих послуг – доступу до експонатів.

Виготовлення мистецької, друкованої, сувенірної та іншої тиражова- ної продукції та товарів народного споживання із зображення музейних експонатів, будинків музеїв і використанням їх назв та символіки здійснюється лише за дозволом керівництва музею.

Якщо репродукція (фотографія) експонату вже існує, то надалі діють права автора цієї копії і на її відтворення. Але необхідно виконання певних умов: відтворення (копія) мало творчий характер і доведення того факту, що саме ця копія (репродукція) використана для подальшого відтворення. Дозвіл музею на таке відтворення та розповсюдження не потрібно.

*Здійснення авторського права.* Термін «авторське право на твір” у ЦКУ включає всі права, які надаються авторові: як особисті немайнові, так і майнові.

Особисті немайнові права:

– вимагати зазначення свого імені у зв’язку з використанням твору, якщо це практично можливо (зазначення імені на примірниках твору та у разі публічного виконання);

– забороняти зазначення свого імені, якщо бажає залишитися анонімом;

– обирати псевдонім і вимагати його зазначення замість справжньо- го імені автору;

– забезпечення недоторканості твору (протидіяти перекрученню, спотворенню або будь-якому посяганню на твір, що може зашкодити честі і репутації автора);

– супроводження твору ілюстраціями, передмовами, післямовами, коментарями тощо – лише за згодою автора.

Право на дотримання цілосності твору полягає в тому, що зміни вносяться у зв’язку з виробничим процесом у різних сферах творчої діяльності (аудіовізуальні твори, комп’ютерні програми, концепція зовнішнього вигляду предметів щоденного вжитку тощо).

Треба відрізняти від права на зміну, яке є частиною майнових прав і є способом використання (адаптація, переклад тощо).

Автор має право у будь-який момент заборонити використання своїх творів, якщо це шкодить його честі та репутації.

У разі смерті автора недоторканість твору охороняється особою, уповноваженою автором, за відсутністю такого уповноваженого недоторканність охороняється спадкоємцями або іншими зацікавленими особами.

Якщо твір переходить у суспільне надбання, то будь-які зміни в ньому можуть бути зроблені вільно, але за умови зазначення того, що мова йде про змінений варіант (наприклад, кінофільм за мотивами відомого твору).

До немайнових прав відносять також:

– невідчужуваність прав;

– право на оприлюднення, яке полягає в тому, що автор має юридич- ну можливість винести твір на публічний розсуд.

Особисті немайнові права не можуть бути передані (відчужені) іншим особам. Майнове право на твір (ст.440 ЦКУ, ст. 15 закону «Про авторське право і суміжні права»):

– право на використання твору;

– виключне право дозволити використання твору;

– право перешкоджати неправомірному використанню, в тому числі і заборонити його, тобто право перешкоджати несанкціонованому копіюванню, продажу, виконанню, демонстрації, або створенню похідних версій авторської роботи іншими особами.

Ст. 441 ЦКУ визначає, що вважається використанням твору:

– опублікування;

– відтворення будь-якими способами та у будь-якій формі;

– переклад;

– переробка, адаптація, аранжування тощо;

– включення складовою частиною до збірників, баз даних, антологій, енциклопедій тощо;

– публічне виконання;

– продаж, передання в найм (оренду) або прокат тощо; імпорт його примірників, примірників його перекладів, переробок тощо.

Використанням є також інші дії, передбачені законом.

Твір вважається опублікованим (випущеним у світ), якщо він будь-яким способом повідомлений невизначеному колу осіб, у тому числі виданий, публічно виконаний, публічно показаний, переданий по радіо чи телебаченню, відображений у загальнодоступних електронних системах інформації. Детальніше випадки використання розглянуті у ЗУ «Про авторське право та суміжні права».

Якщо твір випущено у світ, автор не може заборонити приватний або безоплатний його показ у колі сім'ї (тобто некомерційне використання).

Законодавством більшості країн припускається можливість відмовитися від рішення про оприлюднення (право на відзив) або вилучення твору з обігу. Погляди автора переважають над принципом обов'язкової сили договорів та поваги до прав набутих третіми особами (має право розірвати договір про використання навіть після видання твору з виплатою відшкодування). В Україні такі дії не передбачені.

Якщо матеріальним об'єктом, в якому втілено твір (твори образотворчого мистецтва: скульптури, картини тощо), володіє інша особа, вона не може перешкоджати автору в реєстрації авторського права, бо власник має право на матеріальний носій як об'єкт права власності, а автор – на художній зміст твору. Автор має додаткові права, якщо його твір став власністю третьої особи:

– право доступу – можливість відтворювати свої твори;

– право слідування – право у разі перепродажу твору на винагороду від продавця у вигляді визначеного відсотка від перепродажної ціни (в Україні це 5 %).

Власник оригіналу твору образотворчого мистецтва чи архітектури не має права руйнувати цей об'єкт без попереднього пропонування авторові за ціну, що не перевищує вартості витратних матеріалів або дозволяє авторові зробити копію твору, а для архітектурної споруди – фотографію.

Цей перелік не є вичерпним, зокрема виключні права авторів на використання творів архітектури, містобудування, садово-паркового мистецтва містять у собі і право участі в практичній реалізації проектів цих творів.

Майнові права можуть бути передані повністю або частково будь-якій іншій особі згідно авторського договору.

Право автора на одержання справедливої винагороди за будь-яке використання створеного ним твору не може бути предметом передачі чи відмови. Це право не стосується майнових прав, не відчужується.

Особа, яка має авторське право (автор або особа, якій на законних підставах передано майнове право на твір) може сповістити про свої права знаком охорони авторських прав (незалежно від наявності реєстрації).

Використання знаку охорони авторського права не означає вимоги виконання формальностей як умови виникнення охорони. Правова охорона авторського права надається автоматично як творам із знаком охорони, так і без нього.

Знак охорони авторських прав містить:

– латинська літера «С”, обведена колом – ©;

– ім’я особи, яка має авторське право;

– рік першої публікації твору.

*Порядок реєстрації авторського права.* Реєстрація та будь-яке спеціальне оформлення авторського права не обов’язкові, але суб’єкт АП (автор або власник майнових прав) для засвідчення авторського права на твір, факту і дати опублікування твору або договорів, що стосуються права автора на твір, може зареєструвати у відповідних державних реєстрах своє авторське право в будь-який час протягом строку охорони авторського права. Факт реєстрації може бути використаний на користь автора в ситуаціях, коли має місце суперечка про встановлення авторства.

Здійснюється реєстрація:

– авторського права авторів на твір;

– авторського права роботодавців на службовий твір;

– авторських договорів про передачу (відчуження) майнових прав на твір;

– авторських договорів про передачу виключного або невиключного права на використання твору.

При реєстрації авторського права на твір можуть бути зазначені відомості про факт і дату оприлюднення, якщо вони наявні.

Рекомендують на всіх роботах ставити повідомлення про захист прав (© або copyright, дата першої публікації, ім’я), навіть коли немає реєстрації (вона не є обов’язковою умовою).

Порядок реєстрації авторських прав в Україні визначає постанова Кабінету Міністрів № 1756 (2001 р.) «Про державну реєстрацію авторських прав і договорів, які стосуються права автора на твір». Здійснює реєстрацію Державна служба інтелектуальної власності України. Куди і треба подавати відповідну заявку.

При поданні в заявці повинні міститися наступні обов’язкові матеріали:

– заява на реєстрацію авторського права;

– примірник твору.

Крім цього, повинен бути сплачений державний збір за подання заявки у встановленому розмірі.

Подати заявку на реєстрацію авторського права може автор, його спадкоємець або їхній правонаступник, як фізична, так і юридична особа, як самостійно, так і через довірену особу. В останньому випадку до матеріалів заявки додається довіреність, видана заявником на ведення діловодства.

У випадку, якщо авторське право оформляється на особу, що не є автором (на твір, створений у результаті службового завдання), то необхідно надати документ, що підтверджує належність майнових прав цій особі.

Розгляд заявки на реєстрацію авторського права передбачає тільки перевірку наявності й правильності оформлення всіх необхідних документів.

Після одержання позитивного рішення за заявкою заявник повинен оплатити державне мито за видачу свідоцтва у встановленому розмірі.

Після оплати відомості про видачу свідоцтва на авторське право публікуються в офіційному бюлетені Департаменту інтелектуальної власності, заносяться у відповідний Державний реєстр, а заявник одержує свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. Процедура реєстрації авторського права в Україні займає 2 місяці.

Про реєстрацію договорів, які стосуються права автора на твір, видється рішення Державної служби. Ведеться Державний реєстр договорів, які стосуються права автора на твір.

Відомості про реєстрацію публікуються у офіційному бюлетені Державної служби з питань охорони авторського права і суміжних прав «Авторське право і суміжні права» та в «Каталозі державної реєстрації», що періодично видається.

За державну реєстрацію сплачуються збори, розмір яких встановлено Кабінетом Міністрів України.

Свідоцтво про авторське право та рішення про реєстрацію договору видається у місячний строк від дати державної реєстрації безпосередньо заявнику або його довіреній особі.

*Винагорода за використання авторського права.* Автор може отримати свою винагороду:

– згідно договору, який конкретизує цю винагороду після обговорен- ня контрагентами (авторський договір);

– завдяки діям організації колективного управління.

*Авторський договір.* Авторські договори бувають:

– про передачу (відчуження) майнових прав;

– про передачу виключного або невиключного права на використання творів;

– договори замовлення;

За договором про передачу прав на використання твору суб’єкт авторського права дає дозвіл на використання твору будь-яким відомим способом або якимось певним способом третій особі, яка не є суб’єктом АП. Використання твору допускається виключно на підставі авторського договору за винятком випадків, передбачених законом.

За авторським договором замовлення автор зобов'язується створити у майбутньому твір згідно умов договору і передати його замовникові.

Передача виключного права передбачає передачу права використовувати твір певним способом і у встановлених межах тільки одній особі, яка має право дозволити чи заборонити подібне використання твору іншим особам.

За договором про передачу невиключного права на використання твору іншій особі передається право використовувати твір певним способом і у встановлених межах за умови, що за особою, яка передає невиключне право, зберігається право на використання твору і передачу невиключного права використання іншим особам (наприклад, дозвіл здійснювати театральну постановку за п'єсою надається драматургом кільком театрам).

Авторські договори укладаються у письмовій формі. Виняток: договір про опублікування твору в періодичних виданнях (газетах, журналах тощо) може укладатися в усній формі.

У договорі обов'язково визначено, які саме права на використання твору передаються і чи є ці права виключними.

Майнові права, не зазначені у договорі як передані, зберігаються за суб'єктом авторського права. Якщо не зазначено інше, передані права вважаються не виключними.

У договорі вказано істотні умови:

– строк дії договору;

– спосіб використання твору;

– територія, на яку поширюється передане право;

– розмір та порядок виплати авторської винагороди; За вимогою однієї з сторін можуть бути і інші умови.

Авторська винагорода визначається:

– у відсотках від доходу, отриманого від використання твору (роялті);

– у вигляді фіксованої суми (паушальний платіж);

– іншим чином.

Мінімальна ставка авторської винагороди встановлена Кабінетом Міністрів України.

Законодавством передбачена авторська винагорода у наступних випадках:

– за право використання твору (виплачується автору або його спадкоємцям за видання, публікацію, виконання твору науки, літератури або мистецтва, що вважається використанням твору; авторський гонорар не виплачується за видання робіт, виконаних в порядку службового завдання, за наукові планові видання (за виключенням підручників, навчальних посібників);

– за створення твору згідно договору замовлення (авторський гонорар);

– за створення та використання службового твору.

В усіх випадках розмір та порядок виплати винагороди зумовлюється договором.

Договір замовлення може передбачати виплату замовником авторові авансу як частини авторської винагороди.

У ліцензійних угодах переважно застосовується паушальний платіж (lump payment), тобто виплата винагороди у вигляді зафіксованої у ліцензійній угоді суми повністю або в розстрочку.

Роялті встановлюють як відсоток від роздрібної ціни опублікованого твору або від загальної касової виручки театру. Виплата роялті – періодична, відповідно до кількості проданих примірників або виконань.

Відповідальність за невиконання авторського договору – відшкодування іншій стороні всіх збитків, враховуючи й втрачену вигоду. Спори щодо відповідальності за невиконання умов авторських договорів вирішуються у суді.

*Обмеження авторських прав.* Закон дозволяє в деяких випадках вільно використовувати твір без згоди автора чи відтворювати примірники твору бібліотекам або архівам, для навчання та в особистих цілях.

Закон дозволяє вільно використовувати твір без згоди автора, але з обов'язковим зазначенням імені автора і джерела запозичення у разі:

– використання цитат, в тому числі в формі оглядів преси, включення уривків з виступів і творів до фонограм, відеограм, програм мовлення;

– як ілюстрацій у виданнях, передачах мовлення чи передачах навчального характеру;

– відтворення в пресі (передрукування) чи публічне виконання опублікованих в газетах чи журналах статей з поточних економічних, політичних, релігійних та соціальних питань чи творів такого ж характеру, якщо це спеціально не заборонено автором (немає примітки: передрук без дозволу заборонено);

– відтворення у каталогах творів, виставлених на доступних публіці виставках, у колекціях тощо;

– видання опублікованих творів рельєфно-крапковим шрифтом для сліпих;

– публічне виконання музичних творів під час офіційних та релігійних церемоній, а також похоронів;

Без згоди автора дозволяється:

– відтворення бібліотеками і архівами примірників твору

– репрографічне відтворення навчальними закладами для аудиторних занять або як ілюстрації для навчання;

– відтворення виключно в особистих цілях або для звичайного кола сім'ї (за винятком архітектурних споруд, комп'ютерних програм, репрографічного відтворення книг, нотних текстів, творів образотворчого мистецтва).

*Строк дії авторського права.* Авторське право починає діяти з дня створення твору. Строки охорони прав авторів встановлені законодавчо (ст. 446 ЦКУ, ст. 28 закону «Про авторське право і суміжні права»). Охорона, надана цим законом, діє протягом життя автора та 70 років після його смерті.

Винятки:

– для творів, оприлюднених анонімно або під псевдонімом, який не викликає сумнів щодо особи автора – 70 років після оприлюднення твору;

– на твори, створені у співавторстві – протягом життя співавторів та 70 років після смерті останнього співавтора;

– на твори посмертно реабілітованих авторів – 70 років після реабілітації;

– на твір, що публікується вперше протягом 30 років після смерті ав- тора – 70 років після дати правомірного опублікування;

– якщо твір опубліковано (оприлюднено) вперше після закінчення строку охорони авторського права, то особа, що здійснила оприлюднення, користується правами, рівноцінними майновим правам автора протягом 25 років з часу першого оприлюднення.

Закінчення строку охорони авторського права – 1 січня року, наступного за роком, в якому мали місце вказані юридичні факти. Особисті немайнові права охороняються безстроково.

У спадщину переходять тільки майнові права, але спадкоємці мають право протидіяти зміні твору і посяганню на твір, що може завдати шкоди честі ті репутації автора. По закінченні строку дії авторського права твори переходять у суспільне надбання, тобто можуть вільно без виплати винагороди використовуватись будь-якою особою за умови дотримання немайнових прав автора.

### 5.4.2 Суміжні права

Незалежно від призначення, змісту, оцінки, способу і форми вираження, це (ст. 449 ЦКУ, ст. 35 закону «Про авторське право і суміжні права»):

– виконання (літературних, драматичних, музичних, музично-драматичних, хореографічних, фольклорних та інших творів);

– фонограми (відеограми);

– передачі (програми) організацій мовлення.

Суб’єкти суміжних прав є одночасно користувачами авторських прав, або авторських та суміжних прав інших осіб (наприклад, організації мовлення використовують фонограми із фіксованими виконаннями).

Суб’єкт «виробники відеограм» з’явився в Україні, де вперше відеограму формалізовано як окремий об’єкт ІВ. Не всі відзняті рухомі зображення можна назвати аудіовізуальним твором. Аналогічна ситуація у театрі: не кожна постановка є авторським (режисерським) витвором. Тобто існують певні умови (критерії).

*Виникнення і здійснення суміжних прав.* Суміжні права виникають внаслідок факту виникнення твору, виробництва відеограми чи фонограми, оприлюднення передачі організації мовлення. Особа, яка має суміжні права, для сповіщення про свої права може на всіх примірниках фонограм та відеограм або їх упаковках використовувати спеціальний знак, встановлений законом, який містить:

– латинська літера Р, обведена колом –℗;

– ім’я (назва) особи, якій належить суміжне право;

– зазначення року першої публікації фонограми (відеограми).

За відсутності доказів іншого, виконавцем, виробником фонограми чи відеограми вважаються особи, імена (назви) яких зазначені на фонограмі, відеограмі чи їх упаковці.

Особисті немайнові права.

Виконавців творів:

– вимагати визнання виконавцем;

– вимагати, щоб ім’я або псевдонім зазначалися або повідомлялися у зв’язку з кожним виступом, записом, виконанням;

– вимагати забезпечення належної якості запису виконання та протидіяти будь-якому перекрученню, спотворенню, суттєвій зміні, що може завдати шкоди його честі і репутації.

Виробників фонограм (відеограм):

– зазначити своє ім’я (назву) на кожному носії запису або упаковці поряд із зазначенням авторів, виконавців і назв творів;

– вимагати згадування у процесі використання фонограми (відеограми).

Організацій мовлення:

– вимагати згадування своєї назви у зв’язку із записом, відтворенням, розповсюдженням своєї передачі і публічним повторним сповіщенням її іншою організацією мовлення.

Закон охоплює всі аспекти пов’язані з музичними творами: від виконання на сцені до виробництва ком пакт-дисків, караоке, мобільних телефонів. Тобто музичний твір захищений не тільки за формою, а й по суті, захищені всі ідеї музичного твору. Факт незаконного використання ідеї музичного твору можна легко перевірити.

*Обмеження майнових прав виконавців, виробників фонограм та відеограм, та організацій мовлення.* Закон допускає вільне використання об'єктів суміжних прав, їх фіксацію, відтворення і доведення до загального відома за умов:

– відтворення зазначених об'єктів з метою навчання чи наукових досліджень без дозволу експорту за межі України;

– збереження за суб'єктами суміжних прав права на справедливу винагороду з урахуванням кількості відтворених примірників;

– дотримання особистих немайнових прав суб'єктів суміжних прав.

Допускається вільне відтворення в домашніх умовах виключно в особистих цілях творів і виконань, зафіксованих у фонограмах та відеограмах. Виплата винагороди власникам авторського і/або суміжних прав за це відтворення здійснюється у формі відрахувань 5 % від вартості обладнання і матеріальних носіїв, із застосуванням яких можна здійснити відтворення в особистих цілях. Винятками є обладнання та матеріальні носії, призначені для професійного використання, такі, що експортуються з України або ввозяться на митну територію без комерційної мети.

Розмір відрахувань визначає Кабінет Міністрів, а перераховують їх виробники та імпортери обладнання і матеріальних носіїв (магнітофонів, відеокамер, флеш-карт, чистих компакт-дисків) визначеним Установою організаціям колективного управління з метою виплати суб'єктам авторських та суміжних прав.

За публічне використання виплачують: 1 % доходів, одержаних з того виду діяльності, в процесі якої здійснюється використання об'єктів суміжних прав, або 2,5 % загальної суми витрат на зазначений вид використання у разі відсутності доходів (наприклад, супроводження музикою та піснями святкових заходів, які відбуваються на вулицях та майданах).

За публічне сповіщення шляхом трансляції і ретрансляції зафіксованих у фонограмах виконань та фонограм, опублікованих з комерційною метою у передачах ефірного та супутникового радіомовлення та телеба- чення – 2 % доходів, одержаних з виду діяльності, в процесі якої здійснюється використання ОПІВ, а за публічне сповіщення через Інтернет – 5 % доходів. У письмовій формі надають відомості про використані фонограми та зафіксовані в них виконання для розподілу винагороди.

Розподіл винагороди між суб’єктами прав: виконавцям – 50 %, виробникам фонограм та відеограм – 50 % винагороди.

Розподіляють порівну: по 50 % між українськими та іноземними виконавцями.

При організації концертів, фестивалів та ін., де планується використання фонограм, надають інформацію за 5 днів до події.

У ст. 1 закону «Про авторське право і суміжні права» визначено, що організація кабельного мовлення – це телерадіоорганізація, яка здійснює публічне сповіщення радіо- та телевізійних передач і програм мовлення (своїх та чужих).

Публічне сповіщення – це доведення до загального відома, передача за згодою суб’єктів авторського права і/або суміжних прав в ефір за допомо- гою радіохвиль (лазерних променів, гамма-променів тощо), у тому числі – з використанням супутників або передача на віддаль за допомогою різних видів наземного, підземного чи підводного кабелю (провідникового, оптоволоконного чи іншого виду), виконань творів, будь-яких звуків, їх записів у фонограмах та відеограмах, програм організацій мовлення). Умова: передачу може сприйняти необмежена кількість осіб у різних місцях, віддаленість яких від місця передачі така, що без зазначеної передачі зображення чи звуки не можуть бути сприйняті.

Постанова Кабінету Міністрів (від 18.01.09 № 72, додаток І) за публічне сповіщення або ретрансляцію (за Римською конвенцією – це одночасна або повторна передача іншою організацією мовлення) передбачає мінімальну ставку винагороди за використання творів науки, літератури і мистецтва (в т. ч. комп’ютерних програм та баз даних) – 5 % доходу, одержаного з того виду діяльності, у процесі якої відбувається публічне сповіщення (кабельне телебачення, радіомовлення, через Інтернет). Ця винагорода (роялті) нараховується і виплачується залежно від тривалості публічного сповіщення (у певних випадках може бути зменшена).

Ст. 179 Господарського кодексу України регулює укладання договору оператором кабельного мовлення з організацією мовлення, що надає програми для ретрансляції.

Зміст договору вільно визначають сторони. Винагорода визначається як % доходів, які є джерелом для виплати. Ст. 44 ЗУ «Про телебачення та радіомовлення» встановлено, що джерела фінансування телерадіоорганізацій – це бюджетні асигнування, абонентська плата, кошти за виробництво та трансляцію реклами, передач на замовлення тощо. Для операторів кабельного мовлення доходи – це насамперед абонентська плата. В принципі, в платежі за послуги кабельного телеба- чення повинна передбачатись плата за використання ОПІВ.

Обов'язковою умовою є надання інформації про використання ОПІВ операторами кабельного мовлення.

*Строк дії суміжних прав.* Згідно національного законодавства України, права виконавців, виробників фонограм та відеограм та організацій мовлення охороняються 50 років від дати першого запису виконання, опублікування фонограми чи публічного сповіщення передачі.

Строк охорони закінчується 1 січня року, наступного за тим, в якому закінчуються передбачені строки охорони.

### 5.4.3 Управління і захист авторського та суміжних прав

*Способи управління майновими правами:*

– особисто;

– через свого повіреного;

– через організацію колективного управління (ОКУ).

Організації колективного управління створюються суб'єктами авторського і/або суміжних прав. Мають статус юридичної особи. Не є комерційними організаціями. Не мають права використовувати ОПІВ, довірені їм для управління.

Повноваження на управління майновими правами отримують на основі договорів, укладених письмово. Мають право управ- ляти на території України майновими правами іноземних суб'єктів АП та СП згідно договорів з аналогічними іноземними організаціями. Організації колективного управління укладають договори про використання прав, переданих в управління, погоджують розмір винагороди та збирають, розподіляють та виплачують зібрану винагороду за використання об'єктів АП і/або СП.

Найчастіше ОКУ охороняють права:

– на публічне виконання (музика, що її виконують в ресторанах,на дискотеках, в інших громадських місцях);

– на ефірне мовлення («живі» або записані виконання по радіо та телебаченню);

– на відтворення музичних творів (на касетах, компакт-дисках, платівках та інших матеріальних носіях);

– на виконання драматичних творів;

– на репрографічне відтворення літературних і музичних творів (фотокопіювання);

– виконавців і виробників фонограм на винагороду за ефірне мовлення або використання фонограм.

ОКУ ведуть справи з користувачами – кінотеатрами, радіостанціями, ресторанами і надає їм ліцензії на використання творів авторів, з якими має договори про ведення справ. Отриману авторську винагороду ОКУ розподіляє серед своїх членів згідно встановлених правил розподілу.

Стосовно драматичних творів, до яких відносять також кіносценарії, пантоміму, опери тощо, ОКУ діє як агент, що представляє автора і погоджує контракт з умовами використання творів.

В галузі літературних творів, тобто творів друкованих незалежно від жанру, ОКУ займається правами на фотокопіювання бібліотеками, навчальними закладами, громадськими організаціями і також розподіляє винагороду.

У 2004 р. започатковано збір та розподіл винагороди за відтворення в домашніх умовах творів та виконань, зафіксованих у фонограмах, відеограмах (постанова Кабміну 992 від 27.06.2003) – як збір відрахувань (відсотків від вартості) з імпортерів та виробників обладнання та носіїв. З 2004 р. винагороду за використання об’єктів АСП сплачують теле- та радіоорганізації та провайдери програмної послуги.

За постановою Кабміну за ретрансляцію музики та кліпів у передачах кабельного телебачення оператори тепер повинні перераховувати право-власникові 5 % свого річного доходу.

Кабельні оператори зараз платять роялті безпосередньо телерадіокомпаніям за використання їхніх фонограм та передач, а вже телерадіокомпанії зобов’язані вирішувати питання авторської винагороди.

Захист авторського права та суміжних прав. ЗУ визначає, які дії вважаються порушеннями авторського права та/або суміжних прав:

– будь-які дії, що порушують немайнові та майнові права суб’єктів авторського права та/або суміжних прав.

– піратство – опублікування, відтворення, ввезення на митну терито- рію України та вивезення, розповсюдження контрафактних примірників творів (в тому числі – комп’ютерних програм і баз даних).

– плагіат – опублікування, повністю або частково, чужого твору під іменем особи, яка не є його автором. Плагіат є порушенням як немайнових прав (право вважатися автором) так і майнових (використання твору без дозволу та виплати винагороди);

– будь-які дії для свідомого обходу технічних засобів захисту АП та СП

Останнім часом визначилося 2 напрями захисту авторського права – копірайт та копілефт.

Копірайт – це класичний напрям захисту творів, який не вимагає документального підтвердження від держави. Це зручний універсальний захист, визнаний в усьому світі. Термін захисту прав значний і призводить до того, що великі обсяги інформації стають недоступними до використання, навіть тоді, коли сам автор їх не використовує. Зокрема, це стосується похідних творів.

Починаючи з 80-х років XX ст. активно заявив про себе інший підхід до захисту IВ – копілефт. (Copy Left) – ліва копія або забута копія, легка копія. Спочатку термін означав, що частина програмного коду може використовуватись довільно. Зараз це поняття поширилось на літературні твори. За цією системою майнові права зберігаються за автором не більш за 14 років, а інші особи можуть одночасно використовувати твори, дотримуючись певних правил.

Суб'єкти авторського права та суміжних прав мають право:

– вимагати визнання та поновлення своїх прав і забороняти дії, що їх порушують чи створюють таку загрозу;

– подавати позови про відшкодування збитків, включаючи упущену вигоду, та моральної шкоди;

– вимагати припинення підготовчих дій до порушення авторського права та суміжних прав, в тому числі митних процедур;

– вимагати від порушників інформацію про осіб, задіяних у виробництві, та при розповсюдженні контрафактної продукції та канали її розповсюдження.

Суд має право ухвалити рішення про відшкодування моральної шкоди та збитків, про стягнення з порушника доходу, отриманого внаслідок по- рушення, про виплату компенсації (від 10 до 50000 мінімальних заробітних плат), про заборону опублікування творів, виконань постановок, випуску фонограм, припинення їх розповсюдження, конфіскацію контрафактних примірників та обладнання і матеріалів, призначених для їх виготовлення з можливою передачею позивачеві, публікацію в пресі інформації про порушення та рішення суду тощо.

Суд може накласти на порушника додатковий штраф в розмірі 10 % суми, присудженої на користь позивача. Сума штрафу передається до Державного бюджету України.

Розрізняють наступне:

– контрафактна продукція – продукція, що відтворена і/або розповсюджена з порушенням авторського права і/або суміжних прав;

– піратство – незаконне тиражування легітимно записаних музичних або аудіовізуальних творів, зокрема, компіляція фонограм у збірки (характеризується низькою якістю та поліграфією вкладок і дисків, що відрізняються від оригіналу);

– підробка – незаконне виготовлення CD-дисків з максимальним наближенням до оригіналу, з використанням підроблених торговельних знаків, логотипів рекордингових компаній.

Ознаки підроблених CD та DVD-дисків – відсутність регіонального коду, що вказує зону розповсюдження даного диска (всього – 6 зон, Україна – у 5 зоні), який вказують у правому нижньому куті на зображенні земної кулі. Ліцензійні диски не можуть мати регіональний код "ALL". Існують ще спеціальні коди та ідентифікаційні знаки, що вказують місце запису фонограми, завод-виробник, номер у каталозі тощо.

*Авторське право та суміжні права в інформаційному суспільстві*. Розвиток комп'ютерних мереж суттєво змінює умови передачі інформації і, відповідно, умови відтворення, розповсюдження та управління інтелектуальною власністю. Використання класичного законодавства часто неможливе, а спеціальне – відсутнє і на міжнародному, і на національному рівнях. Треба мати зовсім іншу концепцію розповсюдження ІВ, яка б супроводжувалася організаційними і технічними нормами.

У мережі Інтернет відбувається умовне розширення об'єктів ІВ. Будь-яке представлення інформації в мережі Інтернет – творча праця. Навіть об'єкти, які не є охороноздатними згідно авторського права, наприклад, які-небудь нормативні державні документи, трансформуються і стають об'єктами інтелектуальної праці.

В Інтернеті зібрані великі ресурси комерційної інформації, створено новий механізм глобального маркетингу з використанням дешевої дистриб'юторської мережі. Стрімке зростання використання Інтернет для цілей електронної торгівлі та обміну інформацією робить наявність надійної системи охорони ІВ важливою складовою розвитку світового «цифрового» суспільства.

Розвиток Інтернет створив певні проблеми для бібліотек. Єдина можливість зберегти роль бібліотеки як осередку розповсюдження знань у суспільстві – це встановити надійний зв'язок між бібліотеками та глобальною інформаційною мережею. Для цього можливі наступні шляхи:

– розширення номенклатури інформаційних ресурсів, до яких забезпечено доступ. Бібліотека формує свій фонд, складає бібліографії та каталоги і надає доступ користувачу до Інтернет;

– надання доступу до своїх інформаційних ресурсів віддаленим користувачам через мережу Інтернет.

Окремим питанням є електронне копіювання інформації з Інтернет, її роздруковування, створення гіпертекстових посилань тощо. Ці питання виникають як наслідок інтеграції бібліотечно-інформаційного сервісу та Інтернет.

Практично всі об’єкти АП можуть бути використані у Інтернеті, тобто до них відкривається вільний доступ, отже можливість брати плату за доступ для правовласника різко скорочується.

Традиційна схема надання доступу до твору:

– відкрити безпосередній доступ до твору: наприклад, виконати його;

– виготовити певну кількість екземплярів твору та розповсюдити їх;

– передавати твір в ефір або по кабелю.

Характерним є те, що саме автор виконує певні дії, спрямовані на те, щоб твір сприймали глядачі, читачі або слухачі.

З метою опублікування матеріалу в Інтернеті виконують наступні дії:

– переведення твору в цифрову форму, закомпоновану у комп’ютерний файл;

– пересилка такого файлу на сервер, який є доступним для широкого кола користувачів.

Ці дії може виконати стороння особа.

З точки зору авторського права переведення твору в цифрову форму є переробкою твору або його перетворенням. Законодавство більшості країн (і в Україні також) передбачає, що переробка творів без згоди авторів і без виплати гонорару є порушенням авторських прав за винятком випадку, коли таке використання здійснюється виключно в особистих цілях.

Офіційний глосарій ВОІВ трактує «особисте використання» як одноразове перетворення, переклад, переробку, аранжування або ще якесь перероблення виключно в цілях свого особистого використання, у таких випадках, як: власні дослідження, освіта чи розвага.

Як правило, на сайтах, на яких розміщені об’єкти авторського права, вказуються умови, на яких ці твори можуть використовуватись третіми особами.

*Запитання і завдання для самоконтролю*

1. Що є правами інтелектуальної власності у відповідності до Цивільного кодексу України?

3. Що являє собою немайнове право?

4. Які права інтелектуальної власності відносяться до немайнових?

5. Які права інтелектуальної власності відносяться до майнових?

6. З яких інститутів складається право інтелектуальної власності?

7. З яких інститутів складається право інтелектуальної власності?

8. Які об’єкти відносяться до промислової власності?

9. Які об’єкти інтелектуальної власності відносяться до нетрадиційних?

10. Які об’єкти відносяться до авторського і суміжних рправ?

11. З чого складається законодавча база інтелектуальної власності?

12. Які організації мають відношення до сфери інтелектуальної власності?

14. Які функції виконує Всесвітня організація інтелектуальної власності?

15. Які функції виконує Державна служба інтелектуальної власності України?

16. Хто є суб’єктами промислового права інтелектуальної власності?

17. Що таке винахід?

18. Що таке торговельна марка?

19. Як використовується позначення ©?

20. Як використовується позначення ®?

21. Хто є ліцензіаром?

22. Що таке паушальна виплата?

23. Що таке патент ?

24. Що таке роялті?

25. Які бувають ліцензійні угоди?

26. Хто є ліцензіатом?

27. Кому належать майнові права інтелектуальної власності на винахід, корисну модель, промисловий зразок?

28. Які об’єкти відносяться до авторського та суміжних прав?

29. Хто є суб’єктами авторського та суміжних прав?

30. Що являє собою авторський договір?

# 6 ОФОРМЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ

Оформлення результатів творчої праці у вигляді наукової роботи – докладу, статті, кваліфікаційної магістерської, дисертації, звіту тощо передбачає знання і дотримання деяких вимог, що пред’являються до змісту наукового рукопису. Особливо важлива ясність у розташуванні матеріалу, що стосується систематичності та послідовності його викладання.

## 6.1 Загальні вимоги до наукового рукопису

Під час написання наукової праці текст рукопису необхідно ділити на абзаци. Правильне розбивання на абзаци полегшує читання і засвоєння змісту написаного. Критерієм такого поділу є зміст написаного – кожний абзац містить самостійну думку, що формулюється кількома реченнями.

У рукопису необхідно уникати повторів, не допускати переходу до нової думки, поки перша не отримала повного закінченого вираження. Писати необхідно, за можливістю, короткими і виразними для розуміння реченнями. У тексті бажано менше робити посилань на себе, але якщо це необхідно, то застосовувати висловлення у третій особі: автор вважає, чи на нашу думку тощо.

Не рекомендується перевантажувати рукопис цитатами, цифрами, ілюстраціями, бо це відвертає увагу читача і утруднює розуміння змісту. Однак для технічного матеріалу це необхідно тому, що за ним читачі можуть перевірити результати, отримані у дослідженні. Місця, що цитуються у рукопису, мають мати точні посилання на джерела інформації.

Скорочення слів, що допускаються, мають відповідати діючим стандартам. Якщо використовуються скорочення нестандартні, то їх доцільно наводити на початку.

Під час написання докладу, статті, наукового звіту доцільно дотримуватись наступного загального плану викладання.

*Заголовок праці*, тобто назва роботи, за можливістю, має бути короткою, визначеною, відповідати змісту й суті наукового завдання, вказувати на завершеність дослідження, так як за ним наведена наукова праця буде класифікована у предметному каталозі. Назва праці викладається у називному відмінку.

*Зміст* може бути розташованим на початку чи в кінці. У «Змісті» наводять такі структурні елементи: «Скорочення та умовні познаки», «Передмова», «Вступ», послідовно перелічено назви всіх розділів, підрозділів і пунктів змістовної частини звіту, «Висновки», «Рекомендації», «Перелік джерел посилання», «Додатки» з їх назвою та зазначенням номера сторінки початку структурного елемента. Розривати слова знаком переносу у «Змісті» не рекомендовано.

У короткому *вступі* автор вводить читача у проблему, що ставиться, та показує її зв'язок із важливими практичними завданнями, розкриває актуальність і дає постановку основних запитань дослідження, щоб підготувати читача до сприйняття і засвоєння викладеного матеріалу.

*Актуальність роботи* обґрунтовують кількома реченнями на підставі критичного аналізу вирішення відомої проблеми чи завдань й доводять доцільність роботи для розвитку того чи іншого виробництва, особливо на користь нашої держави. При цьому не можна порушувати факти і висновки, що розташовуються у наступних розділах праці.

Далі формулюють *мету роботи та завдання*, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети. При цьому мету дослідження не можна формулювати як «Дослідження…», «Вивчення…», тому що ці слова вказують на засіб досягнення мети, а не на саму мету.

Складовою частиною мети є *об'єкт і предмет* дослідження як категорії наукового процесу, які співвідносяться між собою як загальне та часткове. Необхідно пам'ятати, що предмет дослідження міститься в межах об'єкта (1.3).

У роботі обов'язково має бути присутня *новизна дослідження*, що передбачає використання поряд з відомими підходами нових або вдосконалених методів аналізу дослідницьких методик, як то планування експерименту з оптимізацією складу чи технології, алгоритмів та програм для ЕОМ, або одного з методів сучасних досліджень, як то спектроскопічного, мікроскопічного, термогравіметричного тощо.

*Методи дослідження* наводяться у вигляді переліку використаних методів для досягнення поставленої в роботі мети. Перераховують їх не відірвано від змісту роботи, а коротко та змістовно визначаючи, що саме досліджувалось певним методом.

Відомості про *наукову новизну чи практичну значимість* одержаних результатів у вступі наводять у вигляді короткої анотації запропонованих наукових положень та відомостей про практичне застосування одержаних даних чи рекомендацій, як їх можна використати.

*Апробація результатів* дослідження, що належать автору, визначається посиланнями на статті у наукових журналах, збірниках наукових праць, матеріали і тези конференцій, патенти, де оприлюднені ці результати.

*Достовірність* отриманих результатів і *обґрунтованість* висновків та рекомендацій забезпечується:

– виконанням досліджень на фактичному матеріалі конкретного підприємства;

– використанням сучасних точних методів дослідження;

– розв'язанням оптимізаційних задач;

– достатнім обсягом експериментально-розрахункової частини роботи;

– апробацією висновків та рекомендацій на матеріалах відповідного виробництва;

– використанням комп'ютерної техніки для розв'язання поставленої задачі.

За вступом наводиться критичний аналіз останніх досліджень і публікацій науково-технічної та патентної літератури, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які опирався автор під час розробки теми, виділяються невирішені раніше частини загальної проблеми. Літературний огляд повинен мати загальну назву і складатись з підрозділів. При цьому важливо відокремити найважливіші джерела від менш суттєвих і критично їх проаналізувати. Це дає можливість читачам визначити положення праці у загальній структурі праць за даною темою. Стисло і критично висвітлюючи сучасний стан наукової розробки, автор визначає й обґрунтовує напрям власного дослідження. *В постановці* формулюється мета рукопису.

Загальний обсяг літературного огляду тексту, що складає опис джерел інформації рукопису не повинен перевищувати 20–25 % обсягу основної частини наукової роботи, в тому числі магістерської, а перелік використаних джерел для дипломної роботи має включати не менше, ніж 35–40 найменувань.

Основний матеріал дослідження наводиться у відповідних розділах експериментальної частини, яка повинна містити такі підрозділи:

- вибір та характеристика об'єкту і предмету дослідження;
- методи проведення дослідження;

- обґрунтування та визначення показників дослідження;
- методи обробки результатів експерименту;
- результати експерименту та їх обговорення;
- загальні висновки.

*В експериментальній частині* наводяться методи вирішення поставлених задач, розробляється загальна методологія проведення досліджень, аналізуються особливості методик обробки показників (чи властивостей), застосовуваних хімічних матеріалів, напівфабрикату чи готової продукції, дається оцінка достовірності одержаних даних.

Викладання матеріалу підпорядковується одній провідній темі завдання, обґрунтованій критичним аналізом науково-технічної та патентної літератури.

При виборі *об'єкта та предмета дослідження* необхідно враховувати його мету, наприклад, для вдосконалення дублення шкіри з сировини великої рогатої худоби в присутності жирувальних матеріалів об'єктом дослідження є процес дублення..., а предметом – дослідження закономірностей зміни шкіряного напівфабрикату і отриманого матеріалу та відповідних фізико-хімічних показників під впливом застосовуваних дубильних й жирувальних речовин в процесі дублення, тобто сама технологія дублення. У випадку розробки технології, наприклад модифікованих поліпропіленових волокон, об'єктом дослідження може бути явище специфічного волокноутворення в полімерних сумішах, а предметом – технологія одержання модифікованих поліпропіленових волокон тощо.

Через нерівномірність товщини і щільності топографічних ділянок шкури з метою виключення їх впливу на показники напівфабрикату (шкіри чи хутра), тобто для одержання об'єктивних, достовірних даних, виконують *добір проб* сировини і напівфабрикату для дослідних робіт: за методом асиметричної бахроми чи симетричних смуг – якщо досліди проводяться в лабораторних умовах, або за методом половинок, що чергуються, – під час напіввиробничих та виробничих випробовувань. Відповідний метод описують у підрозділі, в якому викладаються методи і методики дослідження.

Для різних матеріалів шкіряного чи хутрового підприємства кількість упаковок, які виділяються з партії для відбирання зразків, визначається відповідним стандартом або технічними умовами на ці матеріали. Враховуючи це, у даному підрозділі необхідно зробити посилання на відповідну нормативно-технічну документацію. Якщо на даний матеріал відсутній стандарт чи технічні умови або ж у стандарті немає спеціальних вказівок на правило відбирання проби для аналізу, під час відбирання проб необхідно дотримуватись правил, зазначених у єдиних методах аналізу.

Для досягнення поставленої мети в роботі наводиться перелік методів дослідження, але не відірвано від змісту. При цьому коротко та змістовно необхідно викладати, що саме досліджувалось тим чи іншим методом. Після обґрунтування вибору певного методу, наводять його характеристику чи принцип дії, особливості застосованого приладу (апаратури) та основний результат їх застосування у науковій роботі. Зокрема, при дослідженні процесу хромового дублення наводяться методики обробки дослідних і контрольної груп зразків. При цьому за контрольний (базовий варіант) обирають методику типову чи діючу в умовах передового підприємства галузі або ту, певні переваги (чи, навпаки, недоліки) якої порівняно з дослідними варіантами витікають з опису в першоджерелі.

Для визначення характеру взаємодії досліджуваних матеріалів з колагеном застосовують як хімічні методи аналізу, наприклад, кількісного визначення вмісту оксиду хрому чи жирувальних речовин в технологічних розчинах та дермі, так і інструментальні методи, зокрема, ІЧ-спектроскопії, мас-спектроскопії тощо.

*Показниками дослідження* обирають ті, аналіз яких дає достатньо повне уявлення про об’єкт і предмет. Зокрема, *для технологічних дубильних розчинів* такими показниками можуть бути pH, вміст оксиду металу, основність, ступінь використання дубителів тощо. У випадку дослідження волокон – їх середній діаметр, мас. % неперервних і коротких волокон, частинок, плівок тощо.

Для характеристики технологічних процесів, напівфабрикату, готового матеріалу рекомендується вибирати показники хімічного складу та фізико-механічних випробувань, передбачені, насамперед, нормативно-технічною документацією або поширені у практиці відповідного виробництва. Так, для визначення ефекту дублення найчастіше обирають гідротермічну стійкість напівфабрикату, об’ємний вихід дерми та вихід готового матеріалу за площею.

Під час дослідження будь-якого хімічного реагенту чи матеріалу посилаються на показники, що об’єктивно описують їх ознаки чи властивості, дозволяючи виявити придатність для обробки відповідного напівфабрикату.

При застосуванні у роботі відомих методів аналізу обраних показників посилаються на літературні джерела, а у разі використання малопоширених чи оригінальних методів наводять більш-менш повний їх опис.

З метою розв'язання таких складних та трудомістких завдань як попереднє дослідження об'єкта, пошук найкращого режиму проведення технологічного процесу (оптимізація), побудова та дослідження залежності «склад-властивість» чи «технологія-властивість» у дослідній роботі застосовують різноманітні методи планування експерименту.

Для одержання достовірних, відтворюваних результатів виконують статистичну обробку отриманих даних. Крім того, математичний апарат у науково-дослідній роботі застосовують для встановлення певних закономірностей досліджуваних процесів (явищ) у вигляді математичних чи графічних залежностей. Враховуючи це, у *методах обробки результатів експерименту* викладають короткий опис застосовуваних у роботі методів з наведенням окремих прикладів розрахунків.

Основний матеріал дослідження викладається у розділі «*Результати та їх обговорення»*. Тут наводяться експериментальні дані у вигляді таблиць або ілюстрацій (рисунків, графіків, схем, діаграм, фотознімків тощо), текстовий коментар яких дозволяє спочатку, шляхом аналізу здобутого матеріалу, виявити певні закономірності, а потім – зробити чіткі висновки щодо впливу окремих факторів або їх комплексу на досліджувані об'єкт та предмет.

Особливу увагу необхідно звертати на точність слів, що використовуються у тексті й висновках, не допускати двозначного їх тлумачення. Нові терміни чи поняття необхідно детально пояснювати. Загальновідомі й навіть спеціальні терміни і поняття розкривати не обов'язково, тому що наукова робота призначена для підготовлених читачів.

У подальшому на підставі наведених вище міркувань робляться прогнозні припущення про розвиток об'єкта дослідження, розраховується економічний ефект від впровадження одержаних результатів у виробництво.

*Висновки* мають відповідати тільки тому матеріалу, що викладений у роботі. Розташовують їх в кінці у вигляді коротко сформульованих і пронумерованих окремих тезисів. У висновках потрібно йти від часткових до більш загальних і важливих положень, що неочевидні, але зв'язані з текстом роботи.

Характерною помилкою написання висновків є те, що замість формулювання результатів досліджень пишуть про те, що робилось у даній праці й уже згадувалось в основній частині. При цьому спостерігається повторення матеріалу і в той же час утворюється суттєвий пропуск – відсутність акценту на результатах праці.

У *завершенні* наводиться узагальнення найсуттєвіших положень наукового дослідження, підводяться його підсумки, показується справедливість висунутих автором нових положень, а також висуваються запитання, що необхідно ще вирішувати. Завершення не має повторювати висновки. Воно, звичайно, невелике за розміром, але ємне за тією інформацією, що у ньому має міститись. Добре написане завершення характеризується тим, що особа, знайома з дослідженнями у даному напрямку, може чітко уявити якісну суть даної роботи (без її методичних і конкретних кількісних аспектів) і зробити певні висновки та можливі подальші напрямки дослідження.

Праця закінчується списком використаних літературних джерел, порядкові номери яких помічені в тексті в квадратних дужках за списком літератури. Список цитованих джерел мають бути наведені відповідно до вимог діючого Державного стандарту. Літературні джерела найзручніше складати за порядком посилання на них у даній роботі.

У *додатку* розташовують результати патентних досліджень, патенти, допоміжний матеріал: проміжні математичні викладки, формули і розрахунки, допоміжні таблиці та ілюстрації, інструкції і методики, алгоритми і програми, опис апаратури і приладів, протоколи і акти випробовувань та впровадження у виробництво результатів досліджень тощо.

До тексту праці готують анотацію чи реферат.

*Анотація* – це коротка характеристика звіту чи іншої роботи з точки зору змісту, призначення, форми чи інших особливостей. Вона перш за все виконує сигнальні функції й має відповідати на запитання: про що йдеться в первинному документі? Тому анотація включає в себе переважно фрази, в яких присудок виражено дієсловом зворотної форми – «розглядається», «досліджується», «доказується» тощо, або пасивною дієслівною формою – «розглянуто», «досліджено», «доказано» тощо. Анотація має містити: прізвище та ініціали авторів, назву роботи, основні ідеї, результати та висновки. Її поміщують у книгах, брошурах, рекламних матеріалах тощо обсягом ~ 600 друк. знаків.

*Реферат* являє собою скорочений виклад змісту первинного документу чи його частини з основними фактичними відомостями і висновками. Реферат на відміну від анотації виконує не сигнальну, а пізнавальну функцію. При цьому він відповідає на запитання: що говориться в первинному документі? Тому реферат може включати фрази, виражені будь-якою граматичною формою. Реферат розташовують у реферативних журналах і збірниках, інформаційних картках тощо.

Реферат повинен містити назву (зазвичай, що співпадає з назвою первинного документа) і текст реферату, що включає: прізвище та ініціали авторів, тему, мету роботи, об'єкт, предмет, методи, конкретні результати, висновки.

Згідно ДСТУ 3008:2015 реферат має містити:

– відомості про обсяг роботи, кількість його частин, рисунків, таблиць, додатків, джерел згідно з переліком посилань (наводять усі відомості, зокрема дані додатків);

– перелік ключових слів;

– стислий опис тексту роботи.

Опис тексту роботи в рефераті має відбивати наведену в ній інформацію в наступній послідовності:

– об'єкт дослідження або розроблення;

– ціль роботи;

– методи дослідження й перелік апаратури;

– результати та їх новизна;

– основні конструктивні, технологічні й техніко-експлуатаційні показники та характеристики;

– інформація щодо впровадження;

– взаємозв'язок з іншими роботами;

– рекомендації щодо використання результатів роботи;

– сфера застосування;

– економічна чи соціально-економічна ефективність роботи;

– значимість роботи;

– висновки, пропозиції щодо розвитку об'єкта дослідження (розроблення) й доцільності продовження досліджень.

Якщо деякі із зазначених вище відомостей цього переліку відсутні, усі інші відомості наводять, зберігаючи послідовність викладення інформації.

Реферат рекомендовано розташовувати на одній сторінці формату А4, а *ключові слова* (5–15 словосполучень) перед текстом реферату великими літерами в рядок із прямим порядком слів у називному відмінку однини, розташованих за абеткою використаної мови та розділених комами.

## 6.2 Правила оформлення науково-дослідної роботи

**Загальні положення**

Процес оформлення результатів творчої роботи у завершеному вигляді передбачає знання і дотримання деяких вимог, що висуваються до змісту наукового рукопису. Особливо важлива ясність у розташуванні матеріалу стосується його викладання, систематичності та послідовності. При оформленні наукової роботи необхідно дотримуватись ДСТУ 3008:2015.

Науково-дослідну роботу пишуть машинним способом з використанням комп'ютерної техніки через 1,5 інтервали на одному боці аркуша білого паперу формату А4 (210×297 мм). За необхідності допускається використання аркушів формату А3 (297×420 мм). Дипломні та дисертаційні роботи пишуть 14 шрифтом з розрахунку до 30 рядків на сторінці по 57–60 знаків у кожному рядку, а звіти з науково-дослідної роботи повинні містити не більше 40 рядків на сторінці. При цьому висота літер та цифр має бути не менш, ніж 1,8 мм.

Текст наукової роботи рекомендовано використовувати береги наступних розмірів, мм: верхній і нижній – не менше ніж 20, лівий – не менше ніж 25 мм, правий – не менше ніж 10.

Виявлені граматичні помилки, описки, графічні неточності можна виправляти підчищенням або зафарбуванням білою фарбою та нанесенням на тому ж місці виправленого тексту (фрагменту рисунку) чорним чорнилом, тушшю чи пастою.

Наукову працю складають у вигляді сполучень тексту, ілюстрацій та таблиць. Текст дипломної чи дисертаційної роботи тощо необхідно поділяти на розділи, підрозділи, пункти і підпункти. Такі структурні елементи науково-дослідної роботи як «Список авторів», «Реферат», «Зміст», «Скорочення та умовні позначки», «Передмова», «Вступ», «Висновки», «Рекомендації», «Перелік джерел посилання», – не нумерують, а їхні назви є заголовками структурних елементів.

Розділи і підрозділи повинні мати заголовки. Пункти і підпункти можуть мати заголовки. Заголовки структурних елементів роботи та заголовки розділів треба друкувати з абзацного відступу великими літерами напівжирним шрифтом без крапки в кінці. Дозволено їх розміщувати посередині рядка. Заголовки підрозділів, пунктів і підпунктів необхідно починати з абзацного відступу і писати маленькими літерами (крім першої великої) без крапки в кінці. Абзацний відступ має бути однаковий упродовж усього тексту роботи й дорівнювати п'яти знакам.

Якщо заголовок складається з двох і більше речень, їх розділяють крапкою. Перенесення слів у заголовку не допускається.

Відстань між заголовком, приміткою, прикладом і подальшим чи попереднім текстом має бути не менше ніж два міжрядкових інтервали. Не допускається розміщувати назву розділу (підрозділу, пункту і підпункту) в нижній частині сторінки, якщо після неї розміщено лише один рядок тексту. Кожну структурну частину науково-дослідної роботи необхідно починати з нової сторінки.

**Нумерація**

Сторінки науково-дослідної роботи нумерують арабськими цифрами, разом із додатками. При цьому використовують наскрізну нумерацію. Номер сторінки проставляють у правому верхньому куті аркуша без крапки в кінці.

Титульний аркуш включають до загальної нумерації сторінок, але номер на ньому не проставляють.

Ілюстрації й таблиці, розміщені на окремих сторінках, включають до загальної нумерації сторінок науково-дослідної роботи.

Розділи, підрозділи, пункти і підпункти пояснювальної записки необхідно нумерувати арабськими цифрами. При цьому крапка після номера не ставиться. Розділи повинні мати порядкову нумерацію в межах викладення суті роботи і позначатися арабськими цифрами.

Підрозділи повинні мати порядкову нумерацію в межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу і порядкового номера підрозділу, відокремленого крапкою, наприклад, 1.1, 1.2 і т.д.

Пункти нумерують арабськими цифрами в межах кожного розділу або підрозділу. Номер пункту складається з номера розділу та порядкового номера пункту, або з номера розділу, порядкового номера підрозділу та порядкового номера пункту, які відокремлюють крапкою. Після номера пункту крапку не ставлять, наприклад, 1.1, 1.2 або 1.1.1, 1.1.2 тощо.

Якщо розділ або підрозділ складається з одного пункту, або пункт складається з одного підпункту, його не нумерують.

**Рисунки**

Графічні матеріали науково-дослідної роботи (ескізи, діаграми, графіки, схеми, фотографії, рисунки, креслении тощо) повинні мати однаковий підпис «Рисунок», які необхідно розміщувати безпосередньо після тексту, де вони згадуються вперше, або на наступній сторінці, а за потреби – в додатках роботи. На всі ілюстрації мають бути посилання.

Графічні матеріали роботи доцільно виконувати із застосуванням обчислювальної техніки (комп’ютер, сканер, ксерокс тощо та їх поєднання) та розташовувати на аркушах формату А4 у чорно-білому чи кольоровому зображенні.

Для рисунків використовують наскрізну нумерацію арабськими цифрами, крім рисунків у додатках. Нумерувати рисунки дозволено в межах кожного розділу. У цьому разі номер рисунка складається з номера розділу та порядкового номера рисунка в цьому розділі, які відокремлюють крапкою. Назву рисунка друкують з великої літери та розміщують під ним посередині рядка, наприклад, «Рисунок 2.1 – Схема установки».

Рисунки кожного додатка нумерують окремо. Номер рисунка додатка складається з познаки додатка та порядкового номера рисунка в додатку, відокремлених крапкою. Наприклад, «Рисунок В.1 – ___», тобто перший рисунок додатка В.

Якщо в тексті роботи лише один рисунок, його також нумерують згідно до порядкової нумерації ілюстрацій в межах розділу..

Рисунок розташовують на одній сторінці аркуша. Якщо він не вміщується на одній сторінці, його можна переносити на наступні сторінки. У такому разі назву рисунка зазначають лише на першій сторінці, пояснювальні дані – на наступних сторінках, яких вони стосуються, і під ними друкують: «Рисунок___, а р ку ш ___».

**Таблиці**

Цифрові дані роботи треба оформлювати як таблицю відповідно до форми, наведеної на рисунку 6.1.

Горизонтальні та вертикальні лінії, що розмежовують рядки таблиці, можна не наводити, якщо це не ускладнює користування таблицею.

Таблицю розташовують безпосередньо після тексту, у якому вона згадується вперше, або на наступній сторінці. На всі таблиці мають бути посилання в тексті.

Таблиці нумерують арабськими цифрами порядковою нумерацією в межах розділу, за винятком таблиць у додатках. Номер таблиці складається з номера розділу і порядкового номера таблиці, відокремлених крапкою, наприклад, таблиця 2.5 – п’ята таблиця другого розділу. Якщо у роботі одна таблиця, її нумерують порядковою нумерацією в межах розділу.

Таблиці кожного додатка нумерують окремо. Номер таблиці додатка складається з позначення додатка та порядкового номера таблиці в додатку, відокремлених крапкою. Наприклад, «Таблиця В.1 – ______________», тобто перша таблиця додатка В.

Таблиця 6.1 – **Оптимальні умови знежирювання напівфабрикату**
(*номер*) ( *назва таблиці*)

*Головка*

*Заголовок граф*

*Підзаголовок граф*

*Рядки* (*горизонтальні рядки*)

| Сировина | Темпера-тура, °С | Трива-лість, хв. | Склад розчину, г/л | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ПАР | | карбонат натрію | форма-лін |
| | | | неіоно-генна | іоно-генна | | |
| Овчина:<br>– хутрова | 40–42 | 45 | – | 3,5 | 0,5 | 0,5 |
| – шубна | 42 | 60 | – | 3,0 | 0,5 | 1,0 |
| Лямка | 40 | 45 | – | 3,0–4,0 | – | 0,5 |
| Лисиця | 40 | 60 | 0,5 | 3,0 | – | – |
| Нутрія | 38 | 45 | | 2,0 | – | 0,5 |
| Ондатра | 35 | 40–60 | 1,0–2,0 | – | 0,5 | – |
| Байбак | 40 | 40 | – | 2,0–3,0 | 1,0 | 0,5 |

*Боковик* (*графа для заголовків рядків*)

*Колонки*

Рисунок 6.1 – **Приклад побудови таблиці**

Таблиця має назву, яку пишуть малими літерами (крім першої великої) і вміщують над таблицею. Назва має бути стислою і відбивати зміст таблиці. Якщо рядки або графи таблиці виходять за межі формату сторінки, таблицю поділяють на частини, розміщуючи одну частину під одною, або поруч, або переносячи частину таблиці на наступну сторінку, повторюючи в кожній частині таблиці її головку та боковик.

При поділі таблиці на частини допускається її головку і боковик заміняти відповідно номерами граф чи рядків, нумеруючи їх арабськими цифрами у першій частині таблиці.

Слово «Таблиця ___» вказують один раз зліва над першою частиною таблиці, над іншими частинами пишуть: «Продовження таблиці ___» із зазначенням її номера.

Заголовки граф таблиці починають з великої літери, а підзаголовки – з малої, якщо вони складають одне речення з заголовком. Підзаголовки, що мають самостійне значення, пишуть з великої літери. В кінці заголовків і підзаголовків таблиці крапку не ставлять. Заголовки і підзаголовки граф указують в однині.

**Примітки**

Пояснення до тексту, таблиць, рисунків за необхідності наводять у примітках. Примітки розташовують безпосередньо за текстом. Одну примітку не нумерують.

Слово «Примітка» друкують кеглем 12 через один міжрядковий інтервал з абзацного відступу з великої літери з крапкою в кінці. У тому самому рядку через проміжок з великої літери друкують текст примітки тим самим шрифтом.

*Приклад*

**П р и м ітка.**________________________________________________

Якщо приміток дві та більше, їх розташовують після тексту, якого вони стосуються, оформлюють і нумерують арабськими цифрами.

*Приклад*

**Примітка 1.**_________________________________________________

**Примітка 2.** ________________________________________________

**Виноски**

Пояснення до окремих даних, наведених у тексті або таблиці, можна оформлювати як виноски, які необхідно нумерувати у межах кожної сторінки і позначати над рядком арабськими цифрами з круглою дужкою, наприклад[1)]. Дозволено виноску позначати зірочкою (*). Знак виноски проставляють безпосередньо після слова, числа, символу або речення, до якого дають пояснення. На одній сторінці тексту дозволено застосовувати не більше ніж чотири виноски. Текст виноски друкують кеглем 12 через один міжрядковий інтервал.

Пояснювальний текст виноски пишуть з абзацного відступу:

– у кінці сторінки, на якій зазначено виноску;

– у таблиці – під основною частиною таблиці.

Виноску відокремлюють від основного тексту звіту чи таблиці тонкою горизонтальною лінією завдовжки від 30 мм до 40 мм з лівого берега.

**Формули та рівняння**

Формули та рівняння розташовують безпосередньо після тексту, в якому вони згадуються, посередині сторінки симетрично тексту. Вище і нижче кожної формули чи рівняння від попереднього і наступного тексту має бути залишено не менше одного вільного рядка.

Формули та рівняння у науково-дослідній роботі (крім тих, що наведені у додатках) нумерують наскрізними арабськими цифрами. Дозволено їх нумерувати в межах кожного розділу. При цьому нумерують лише ті формули та/чи рівняння, на які є посилання в тексті роботи чи додатка.

Номер формули чи рівняння друкують на їх рівні праворуч у крайньому положенні в круглих дужках. У багаторядкових формулах або рівняннях їхній номер проставляють на рівні останнього рядка.

У кожному додатку номер формули чи рівняння складається з великої літери, що позначає додаток, і порядкового номера формули або рівняння в цьому додатку, відокремлених крапкою, наприклад (А.3). Якщо в тексті звіту чи додатка лише одна формула або рівняння, їх також нумерують.

Пояснення позначень, які входять до формули чи рівняння, треба наводити безпосередньо під формулою чи рівнянням без абзацного відступу з нового рядка, починаючи зі слова «де» без двокрапки. Позначення, яким встановлюють визначення чи пояснення, рекомендовано вирівнювати у вертикальному напрямку.

*Приклад оформлення математичної формули*

Відомо (3.19), що

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}, \tag{6.1}$$

де $x$– випадкова величина;

$\mu$ – математичне очікування;

$\sigma$ – середнє квадратичне відхилення.

Фізичні формули наводять аналогічно математичним формулам з обов’язковим записом у поясненні познаки одиниці виміру відповідної фізичної величини. Між останньою цифрою та одиницею виміру залишають проміжок (крім позначення одиниць плоского кута, наприклад кутових градусів, які пишуть безпосередньо біля числа вгорі).

*Приклад*

Масу твердого тіла в кілограмах обчислюють за формулою:

$$m = \frac{F}{a}, \tag{6.2}$$

де $F$ – сила, що діє на тіло, Н;

$a$ – пришвидшення тіла, м/с$^2$.

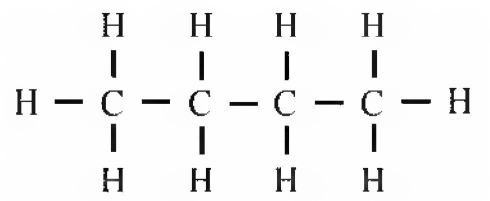
Хімічні формули та рівняння записують буквами латинської абетки. Пояснення познак, що входять до формули чи рівняння, наводять за потреби. Під формулою хімічної сполуки може бути розміщено її назву.

*Приклад оформлення хімічної формули*

$$\underset{\text{берилат натрію}}{Be + 2NaOH = Na_2BeO_2 + H_2} \tag{6.3}$$

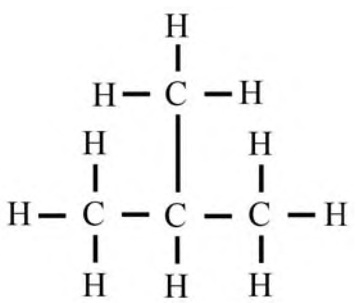
Структурні хімічні формули можна розташовувати як у горизонтальному, так і вертикальному напрямку. Знаки зв'язку в цих формулах мають бути однакової довжини. Довші знаки зв'язку виправдані у тих випадках, коли це спричинено особливостями побудови формули.

*Приклади*



(6.4)

бутан



(6.5)

ізобутан

Переносити формули чи рівняння на наступний рядок допускається лише на знаках виконуваних операцій, які повторюють на початку наступного рядка.

У разі перенесення формули чи рівняння на знакові операції множення застосовують знак «×». Перенесення на знаку ділення «:» слід уникати.

Якщо у науково-дослідній роботі лише одна формула чи рівняння, їх нумерують порядковою нумерацією в межах розділу. Формули, що йдуть одна за одною й не розділені текстом, відокремлюють комою.

*Приклад*

$$f_1\ (x,\ y)\ = S_1 \text{ і } S_1 \le S_{1\ \max}\ , \tag{6.6}$$

$$f_2\ (x,\ y)\ = S_2 \text{ і } S_2 \le S_{2\ \max}. \tag{6.7}$$

*Числові значення величин*

Числові значення величин з допусками наводять так:

(65 ± 3) %;

80 мм ± 2 мм або (80 ± 2) мм.

Діапазон чисел фізичних величин наводять, використовуючи прикметники «від» і «до».

*Приклад*

Від 1 мм до 5 мм (а не від 1 до 5 мм).

Якщо треба зазначити два чи три виміри, їх наводять так: 80 мм × 25 мм × 50 мм (а не 80 × 25 × 50 мм).

**Посилання**

При посиланнях у тексті науково-дослідної роботи на структурні елементи раніше написаного тексту зазначають відповідно розділи, підрозділи, пункти, підпункти, ілюстрації, таблиці, формули, рівняння, додатки зазначають їх номери. При посиланні необхідно писати: «у розділі 4», «див. 2.1», «відповідно до 1.2.7.2», «рисунок 2.9», «у таблиці 3.8», «див. 4.1», «згідно з формулою (2.3)», «у рівняннях (1.15) – (1.18)», «додаток Д» тощо. Дозволено в посиланні використовувати загальноприйняті та застандартовані скорочення «згідно з рис. 10», «див. табл. 3.3» тощо

Посилання на літературні джерела рекомендовано наводити порядковим номером за переліком джерел посилання, виділених двома квадратними дужками, наприклад, «у роботах [4]–[6]». При цьому оформлення посилань має відповідати його бібліографічному опису за переліком посилань із зазначенням номера.

Наприклад, цитата в тексті: «зміщується ізоелектрична точка колагену під час дублення аніонними комплексами з pH 5 до pH 3,8–4,8, а під час дублення катіонними – з pH 5 до pH 6 [16]», де 16 відповідне літературне джерело інформації.

*Список літературних джерел* – елемент бібліографічного апарату, що містить бібліографічні описи використаних джерел, у науково-дослідній роботі розміщують після висновків. Бібліографічний опис складають безпосередньо за друкованим твором. При цьому враховують його відповідність вимогам чинного міждержавного стандарту ДСТУ 8302: 2015.

*Прикладами* оформлення бібліографічного опису в списку літературних джерел може бути список літератури до даного підручника.

**Титульний аркуш**

Інформацію на титульному аркуші можна наводити, застосовуючи шрифти різних розмірів і накреслень, які виконавець вважає інформативними та естетичними.

**Додатки**

Додатки оформлюють як продовження науково-дослідної роботи на наступних її сторінках, розташовуючи їх у порядку появи посилань у тексті. Кожний такий додаток має починатися з нової сторінки.

Додатки позначають послідовно великими літерами української абетки, крім літер Ґ, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ь, наприклад, ДОДАТОК А, ДОДАТОК Б. Дозволено позначати додатки літерами латинської абетки, крім літер I та O. У разі повного використання літер української і/або латинської абеток дозволено позначати додатки арабськими цифрами. Один додаток позначають як ДОДАТОК А.

За потреби текст додатків можна поділити на розділи, підрозділи, пункти й підпункти, які треба нумерувати в межах кожного додатка. У цьому разі перед кожним номером ставлять позначення додатка (літеру) і крапку, наприклад, А.2 – другий розділ додатка А; Г.3.1 – підрозділ 3.1 додатка Г; Д.4.1.2 – пункт 4.1.2 додатка Д; Ж .1.3.3.4 – підпункт 1.3.3.4 додатка Ж.

Рисунки, таблиці, формули та рівняння в тексті додатків треба нумерувати в межах кожного додатка, починаючи з літери, що позначає додаток, наприклад, рисунок Г.3 – третій рисунок додатка Г; таблиця А.2 – друга таблиця додатка А; формула (А.1) – перша формула додатка А. Якщо в додатку один рисунок, одна таблиця, одна формула чи одне рівняння, їх нумерують, наприклад, рисунок А.1, таблиця Г.1, формула (В.1).

### 6.3 Підготовка наукових праць до друку

До наукових друкованих праць відносяться монографії, брошури, статті. *Монографія* – науковий твір, що містить викладені усесторонні дослідження визначеної теми чи проблеми, виконаної автором (співавторами). В *статті* викладаються результати, отримані з конкретного питання, що має визначене наукове і практичне значення. Підручники і навчальні посібники відносяться до навчальних видань.

Підготовку матеріалів рукопису до друку необхідно проводити в наступній послідовності, починаючи зі складання план-проспекту і систематизування матеріалу дослідження.

Викладають матеріал в науковому стилі, котрому характерна ясність викладання, точність використання слів, лаконізм; строге використання наукової термінології, що дозволяє в можливо короткій і ефективній формі давати чіткі визначення і характеристики наукових фактів, понять, процесів і явищ. Послідовність викладання понять теоретичної позиції, логічність, глибокий взаємозв'язок теоретичних положень, виразність мови – характерні риси наукового стилю.

Після того як рукопис складена, уточнюють її зміст, одночасно здійснюють ретельне редагування.

*Редагування рукопису* праці (від латинського redactus – приведення у порядок) насамперед здійснюється автором (авторський етап видавничого процесу), а потім редактором (редакційний етап). Основа редагування – це критичний аналіз призначеної до видання праці з метою правильної її оцінки і вдосконалення змісту і форми. При редагуванні особливу увагу звертають на суттєвість і повноту наведених факторів, їх новизну, достовірність, точність, переконливість, логічність, форму тексту.

Автор має дублювати редактора (перша ступінь обробки рукопису). Тут необхідно примиритись з багаторазовими переробками, скороченнями і доповненнями. Бажано після деякого проміжку часу знову прочитати свій рукопис і спробувати оцінити його у цілому і по частинах, як би з точки зору читача (друга ступінь). Третя ступінь – прочитання для виявлення помилок у тексті, відповідності ілюстрацій, однаковості термінології, позначень тощо. Тільки після цього рукопис можна здати у видавництво.

*Наукова стаття* повинна мати такі необхідні елементи:

• *Вступ* – постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями;

• *Об'єкт та методи дослідження* – аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується дана стаття;

• *Постановка завдання* – формулювання мети статті;

• *Результати та їх обговорення* – виклад основного матеріалу досліджень з обґрунтуванням отриманих наукових результатів;

• *Висновки* з проведених досліджень і перспективи подальших розвідок у даному напрямі;

• *Література.*

Стаття має бути відправленою у редакцію в закінченому вигляді відповідно до вимог, котрі публікуються у відповідних номерах журналів як пам'ятка для автора. Рукопис статті має містити повну назву роботи, прізвище та ініціали автора (співавторів), анотацію українською, російською і англійською мовами (на окремому аркуші). В редакцію подається комп'ютерний варіант статті та роздрукований примірник статті, підписаний автором чи всіма співавторами. Вимоги до оформлення рукопису статті залежать від редакції журналу.

*Депонування* передбачає зберігання, організацію інформування, копіювання рукописів за запитом споживача науково-технічних матеріалів (статті, звіти тощо). Матеріали для депонування оформляють за тими ж правилами, що і статті для публікації. За автором депонованого рукопису зберігається авторське право, у подальшому стаття може бути опублікованою.

Усі роботи, призначені до опублікування, проходять попереднє рецензування. *Рецензія* (відгук про наукову працю) – це праця, в якій критично оцінено основні положення і результати рукопису.

## 6.4 Усне подання інформації

Значну частину наукових даних спеціалісти отримують із усних джерел і повідомлень на семінарах, симпозіумах, конференціях, нарадах, бесідах при зустрічах тощо. Самою поширеною формою обміну інформацією є конференція. Одна частина учасників – доповідачі, інша, значно більша частина – слухачі, вони можуть задавати запитання і приймати участь в дискусіях. Інколи організуються стендові доповіді – у визначених місцях вивішується ілюстративний матеріал до докладу і доповідач одразу відповідає на запитання. З основним змістом стендової доповіді ознайомлюються учасники конференції завчасно, прочитавши збірник анотацій доповідей, що включені в програму конференції.

Найвідповідальніша задача у вищеназваних заходах випадає на долю доповідача. Доповідь забезпечує можливість апробації результатів наукового дослідження в думках інших осіб, перевірити зроблені висновки через різні оцінки спеціалістів. Особливо корисні у цьому сенсі виступи слухачів і наукові дискусії.

Перед виступом з доповіддю необхідно підготувати короткий план викладу і детальний конспект так, щоб на початку доповіді коротко повідомити основні запитання, які будуть викладені. Під час доповіді можна користуватись записами, щоб не пропустити важливого.

Перед докладом необхідно підготувати тези. Це стислі, коротко сформульовані основні положення доповіді, повідомлення тощо. Вони включають викладання основних положень всієї наукової роботи. Тези є розгорненими висновками, з вступною пояснювальною частиною, а також завершенням. У тезах у короткій формі обґрунтовано розкривається теми, характеристика історії питання, викладаються методика дослідження і отримані результати. Тези можуть бути короткими і розверненими, але вони завжди відрізняються від повного тексту доповіді чи повідомлення тим, що в них відсутні деталі, пояснення, ілюстрації.

*Контрольні питання для самоперевірки*

1 Якого стандарту необхідно дотримуватись при оформленні наукової роботи?
2 Як текст рукопису ділиться на абзаци?
3 Якого загального плану викладання необхідно дотримуватись при написанні звіту, докладу, статті?
4 Що подається у вступі наукової роботи?
5 Які джерела науково-технічної літератури аналізуються в роботі?
6 Який матеріал і як необхідно розташовувати в основній частині роботи?
7 Як наводиться в науковій роботі цифровий матеріал?
8 Як формулюються висновки до наукової роботи?
9 Який матеріал має розташовуватись у додатках і як вони нумеруються?
10 Що являють собою анотація і реферат?
11 Як і ким редагується рукопис наукової роботи?
12 Де і як подається інформація усно?
13 Що являють собою тези доповіді та якими вони бувають?

Додаток А

**Співвідношення одиниць Міжнародної системи інтернаціональної (СІ) з одиницями вимірювання інших систем**

| Вимірювана величина | Одиниця вимірювання | | | Коефіцієнт для приведення до одиниць СІ |
|---|---|---|---|---|
| | Найменування у системі СІ | Позначення | | |
| | | у системі СІ | в різних системах | |
| *Основні одиниці* | | | | |
| Довжина | метр | м | см | $10^{-2}$ |
| Маса | кілограм | кг | г | $10^{-3}$ |
| Час | секунда | с | с | 1 |
| Сила струму | ампер | А | – | – |
| Температура | градус Кельвіна | К | – | – |
| Сила світла | кандела | кд | – | – |
| *Похідні одиниці* | | | | |
| Сила, вага | ньютон | Н | кгс<br>дин | 9,81<br>$10^{-5}$ |
| В'язкості:<br>динамічна | ньютон-секунда на квадратний метр | Н·с/м$^2$<br>Па·с | кгс·с/м$^2$<br>пз<br>спз | 9,81<br>$10^{-1}$<br>$10^{-3}$ |
| кінематична | квадратний метр в секунду | м$^2$/с | Ст<br>сСт | $10^{-4}$<br>$10^{-6}$ |
| Густина | кілограм на кубічний метр | кг/м$^3$ | г/см$^3$ | $10^{-3}$ |
| Довжина | метр | м | мм<br>мкм<br>Å | $10^{-3}$<br>$10^{-6}$<br>$10^{-10}$ |
| Напруженість механічна | Паскаль | Па (Н/м$^2$) | кгс/мм$^2$ | $9{,}81 \cdot 10^{6}$ |
| Натяг поверхневий | ньютон на метр (чи джоуль на квадратний метр) | Н/м<br>(Дж/м$^2$) | кгс/м<br>дин/см<br>(ерг/см$^2$) | 9,81<br>$10^{-3}$ |

Продовження додатку А

| Вимірювана величина | Одиниця вимірювання | | | Коефіцієнт для приведення до одиниць СІ |
|---|---|---|---|---|
| | Найменування у системі СІ | Позначення | | |
| | | у системі СІ | в різних системах | |
| Об’єм | кубічний метр | $м^3$ | $дм^3$ (л) | $10^{-3}$ |
| | | | $см^3$ | $10^{-6}$ |
| Площа | квадратний метр | $м^2$ | $см^2$ | $10^{-4}$ |
| Потужність, тепловий потік | ват | Вт | кгс·м/с | 9,81 |
| | | | кал/с | 4,187 |
| | | | ккал/год | 1,163 |
| Робота, енергія, кількість теплоти | джоуль | Дж | кгс·м | 9,81 |
| | | | кВт·год | $3{,}6\cdot10^6$ |
| | | | ккал | 4187 |
| Температур різниця (Δt) | градус Кельвіна | К | К (°С) | 1 |
| | | | °F | 0,556 |
| Теплоємність питома | джоуль на кілограм-градус | Дж/кг·град | ккал/кг·град | 4187 |
| Тиск | ньютон на метр квадратний | $Н/м^2$ | $кгс/см^2$ (ат) | $9{,}81\cdot10^4$ |
| | | | $кгс/м^2$ | 9,81 |
| | | | мм рт.ст. | 133,3 |
| | | | мм вод.ст. | 9,81 |
| | | | $дин/см^2$ | $10^{-1}$ |
| | | | атм | $10{,}1\cdot10^4$ |
| | | | бар | $10^5$ |

# ДОДАТОК Б
# РОЗРАХУНКИ ЗА ДОПОМОГОЮ MS EXCEL

*Основні поняття.* Кожна клітина у *MS Excel* має свою унікальну адресу[1]: *колонка*, що позначається латинською літерою і *рядок*, що позначається арабською цифрою, наприклад, A1, A2, B10, … .

У будь-яку клітину є можливість поміщати:

– числову інформацію, тобто константи, так наприклад в клітини А1…А10 необхідно помістити[2] від 0 до 0,9 із кроком 0,1. Для цього в клітині А1 пишемо 0, а в А2 – 0,1, виділяємо[3] клітини А1 і А4 лівою кнопкою миші і курсор наводимо на правий нижній кут виділених клітин. З появою + протягуємо мишкою (зверху донизу) в напрямку інших клітин А3-А10 і таким чином розраховуємо аргументи функції. Цей фрагмент наведено на рисунку.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **…** |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | | | |
| **2** | 0,1 | 0,0998 | | | |
| **3** | 0,2 | 0,197 | | | |
| **4** | 0,3 | 0,296 | | | |
| **⋮** | ⋮ | ⋮ | | | |
| **10** | 0,9 | 0,783327 | | | |

– зв'язок між деякими клітинами у виді функції [4] в позначеннях MS Excel. Так, наприклад, якщо необхідно в клітинах В1…В10 розрахувати функцію *sin* від поточного аргументу Аі (і = 1÷10), то для цього, скористаємось *майстром функцій*[5], що призначений для підрахунку значення функції, яка задається користувачем для конкретної клітини. Для цього в клітині В1 пишемо[6]: =sin(A1) і при натисканні на клавішу Enter в ній показується результат розрахунку (sin 0 = 0), тобто залишається 0. Підводимо курсор мишки в правий нижній кут клітини В1 і з появою +протягуємо[7] в напрямку клітин В2-В10. Таким чином, розраховуються значення функції *sin* в клітинах В1-В10 при заданих аргументах А1-10, як це показано вище

---

[1] Меню „Сервис" \ Параметры… \ закладка „Общие" \ зняти галочку „Стиль ссылок R1C1". Знак \ означає: шукайте далі.
[2] Автоматично, не вписуючи в кожну окрему клітину число.
[3] Для того, щоб MS Exsel вказати крок зміни значень в клітинах.
[4] Сінус – *sin*(*x*), косінус – *cos*(*x*), натуральний логарифм *lnx* – *log*(*x*), експоненту $\ell^x$ – *exp*(*x*), степінь $x^y$ – *x^y* та ін. (див. «Вставка \ $f_x$ Функция \ Математические…»).
[5] «Вид \ Строка формул».
[6] Можна написати: =sin(\ мишкою вказати потрібну клітину, в нашому випадку А1, де стоїть 0 \ утримуючи Shift натиснути клавішу ")" \ Enter. Отже потрібні клітини можна вибирати мишкою.
[7] Чи подвійне клацання лівою кнопкою миші.

на рисунку. За отриманими даними далі є можливість побудувати графік[8], чи використовувати їх для подальших розрахунків.

В клітини так само можна вводити іншу інформацію: *текстову* – для супроводу коментарями розрахунків, графіків тощо, *графічну* – прикрасити клітину, за допомогою функції *формат клітини*, ввести символьні математичні формули за допомогою редактора[9] *Microsoft Equation* та ін.

*Приклад* Б.1 За наведеними результатами досліджень випадкової величини $x$ в прикладі 3.3

| $x$ | 3,10 | 3,15 | 3,20 | 3,25 | 3,30 | 3,35 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 50 | 16 | 10 | 4 |

розрахувати числові характеристики: математичне очікування $\overline{x}$, виправлену дисперсію $s^2$ і середнє квадратичне відхилення $s$.

*Розв'язок*. В клітини A2-A7 і B2-B7 помістимо відповідно значення випадкової величини $x_i$ та кількість їх повторів $n_i$. В клітині B8 підраховуємо загальну кількість дослідів $n$ за допомогою функції[10]: =СУММ(B2:B7).

В клітину C2 вписуємо формулу: =B2/$B$8 (значок $ означає фіксування клітини, наприклад, колонки $B і рядка $8), значення в інших клітинах C3-C7 отримуємо протягуванням.

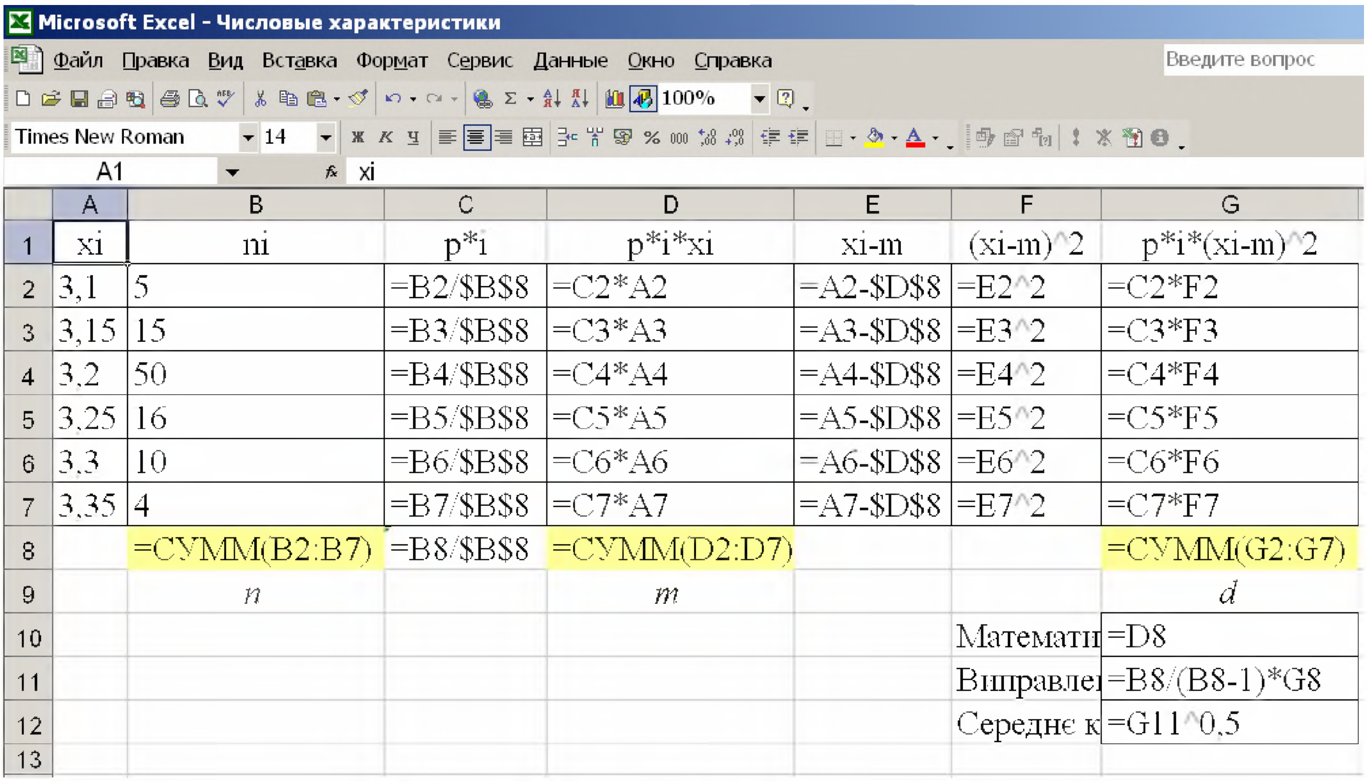
Аналогічним чином проводяться розрахунки в колонках D, E, F, G за формулами в позначеннях MS Excel, що наведені на рисунку Б.1, а результати – в таблиці 3.6.

---

[8] Виділити необхідні колонки \ «меню „Вставка" \ Диаграмма...\ Тип: точечная, Вид: точечная диаграма со значениями, соединёнными сглаживающими линиями, кнопка „Далее" \ автоматично.

[9] Програма, яка створює формули.

[10] =СУММ(\ утримуючи натиснену ліву клавішу миші, виділити клітини B2-B7 \ натиснути „Shift" і „)" \ Enter; або в меню Вставка \ Функция… \ категория Математические \ СУММ \ кнопка ОК \ натиснути \ вибрати клітини B2-B7, утримуючи ліву кнопку миші \ натиснути \ОК; чи за допомогою значка ∑ Автосумма.





| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | xi | ni | p*i | p*i*xi | xi-m | (xi-m)^2 | p*i*(xi-m)^2 |
| 2 | 3,1 | 5 | =B2/$B$8 | =C2*A2 | =A2-$D$8 | =E2^2 | =C2*F2 |
| 3 | 3,15 | 15 | =B3/$B$8 | =C3*A3 | =A3-$D$8 | =E3^2 | =C3*F3 |
| 4 | 3,2 | 50 | =B4/$B$8 | =C4*A4 | =A4-$D$8 | =E4^2 | =C4*F4 |
| 5 | 3,25 | 16 | =B5/$B$8 | =C5*A5 | =A5-$D$8 | =E5^2 | =C5*F5 |
| 6 | 3,3 | 10 | =B6/$B$8 | =C6*A6 | =A6-$D$8 | =E6^2 | =C6*F6 |
| 7 | 3,35 | 4 | =B7/$B$8 | =C7*A7 | =A7-$D$8 | =E7^2 | =C7*F7 |
| 8 | | =СУММ(B2:B7) | =B8/$B$8 | =СУММ(D2:D7) | | | =СУММ(G2:G7) |
| 9 | | *n* | | *m* | | | *d* |
| 10 | | | | | | Математи | =D8 |
| 11 | | | | | | Виправле | =B8/(B8-1)*G8 |
| 12 | | | | | | Середнє к | =G11^0,5 |
| 13 | | | | | | | |

Рисунок Б.1 – **Формули розрахунків наведені в позначеннях MS Excel**

ДОДАТОК В

# ТАБЛИЧНІ КРИТЕРІЇ ДЛЯ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Таблиця В.1 – **Значення інтеграла Лапласа**[11]

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - 0,5$$

| $z$ | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,004 | 0,008 | 0,012 | 0,016 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,091 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,148 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,17 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,195 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,219 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,258 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,291 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,334 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,377 | 0,379 | 0,381 | 0,383 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3883 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,398 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,437 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,475 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |

[11] В MS Excel функція: =ABS(НОРМСТРАСП($z$)-0,5), де =ABS() – функція визначення модуля числа.

Продовження таблиці В.1

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,483 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,485 | 0,4853 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,486097 | 0,486447 | 0,486791 | 0,487126 | 0,487455 | 0,487776 | 0,488089 | 0,488386 | 0,488696 | 0,488989 |
| 2,3 | 0,489276 | 0,489556 | 0,48983 | 0,490197 | 0,490458 | 0,490612 | 0,490963 | 0,491106 | 0,491344 | 0,491676 |
| 2,4 | 0,491803 | 0,492024 | 0,49224 | 0,492451 | 0,492656 | 0,492857 | 0,493053 | 0,493249 | 0,493431 | 0,493613 |
| 2,5 | 0,49379 | 0,493963 | 0,494132 | 0,494297 | 0,494457 | 0,494614 | 0,494766 | 0,494915 | 0,49506 | 0,495201 |
| 2,6 | 0,495339 | 0,495473 | 0,495604 | 0,495731 | 0,495855 | 0,495975 | 0,496093 | 0,496207 | 0,496319 | 0,496427 |
| 2,7 | 0,496533 | 0,496636 | 0,496736 | 0,496833 | 0,496928 | 0,49702 | 0,49711 | 0,497197 | 0,497282 | 0,497365 |
| 2,8 | 0,497445 | 0,497523 | 0,497699 | 0,497673 | 0,497745 | 0,497814 | 0,497882 | 0,497948 | 0,498012 | 0,498074 |
| 2,9 | 0,498134 | 0,498193 | 0,49825 | 0,498305 | 0,498369 | 0,498411 | 0,498462 | 0,498511 | 0,498559 | 0,498605 |
| 3,0 | 0,49865 | 0,498694 | 0,498736 | 0,498777 | 0,498817 | 0,498856 | 0,498893 | 0,49893 | 0,498965 | 0,498999 |
| 3,1 | 0,499032 | 0,499065 | 0,499097 | 0,499126 | 0,499155 | 0,499183 | 0,499211 | 0,499238 | 0,499264 | 0,499289 |
| 3,2 | 0,499313 | 0,499336 | 0,499359 | 0,499381 | 0,499402 | 0,499423 | 0,499443 | 0,499462 | 0,499481 | 0,499499 |
| 3,3 | 0,499517 | 0,499534 | 0,49955 | 0,499566 | 0,499581 | 0,499596 | 0,49961 | 0,499624 | 0,499638 | 0,499651 |
| 3,4 | 0,499663 | 0,499675 | 0,499669 | 0,499698 | 0,499709 | 0,49972 | 0,49973 | 0,49974 | 0,499749 | 0,499759 |
| 3,5 | 0,499767 | 0,499776 | 0,499784 | 0,499799 | 0,4998 | 0,499807 | 0,499815 | 0,499822 | 0,499828 | 0,499835 |
| 3,6 | 0,499841 | 0,499847 | 0,499853 | 0,499858 | 0,499864 | 0,499869 | 0,499874 | 0,499879 | 0,499883 | 0,499888 |
| 3,7 | 0,499892 | 0,499896 | 0,4999 | 0,499904 | 0,499908 | 0,499912 | 0,499915 | 0,499918 | 0,499922 | 0,499925 |
| 3,8 | 0,499927 | 0,499931 | 0,499933 | 0,499936 | 0,499939 | 0,499941 | 0,499943 | 0,499946 | 0,499948 | 0,49995 |
| 3,9 | 0,499952 | 0,499954 | 0,499956 | 0,499958 | 0,499959 | 0,499961 | 0,499963 | 0,499964 | 0,499966 | 0,499967 |
| 4,0 | 0,499968 | 0,49997 | 0,499971 | 0,499972 | 0,499973 | 0,499974 | 0,499976 | 0,499977 | 0,499978 | 0,499978 |
| 4,1 | 0,499979 | 0,49998 | 0,499981 | 0,499982 | 0,499983 | 0,499983 | 0,499984 | 0,499985 | 0,499985 | 0,499986 |

Таблиця В.2 – **Відсоткові точки розподілу $\chi^2[q;f]$**

| $f$ \ $q$ | 0,995 | 0,975 | 0,95 | 0,05 | 0,025 | 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $0{,}39\cdot10^{-4}$ | $0{,}98\cdot10^{-3}$ | $0{,}39\cdot10^{-2}$ | 3,841 | 5,024 | 7,879 |
| 2 | 0,110 | 0,050 | 0,103 | 5,991 | 7,378 | 10,597 |
| 3 | 0,072 | 0,216 | 0,352 | 7,815 | 9,348 | 12,838 |
| 4 | 0,207 | 0,484 | 0,711 | 9,488 | 11,143 | 14,860 |
| 5 | 0,412 | 0,831 | 1,145 | 11,070 | 12,832 | 16,750 |
| 6 | 0,676 | 1,237 | 1,635 | 12,592 | 14,449 | 18,548 |
| 7 | 0,989 | 1,690 | 2,167 | 14,067 | 16,013 | 20,278 |
| 8 | 1,344 | 2,180 | 2,733 | 15,507 | 17,535 | 21,955 |
| 9 | 1,735 | 2,700 | 3,325 | 16,919 | 19,023 | 23,589 |
| 10 | 2,156 | 3,247 | 3,940 | 18,307 | 20,483 | 25,188 |
| 11 | 2,630 | 3,816 | 4,575 | 19,575 | 21,920 | 26,757 |
| 12 | 3,074 | 4,404 | 5,226 | 21,026 | 23,336 | 28,300 |
| 13 | 3,565 | 5,009 | 5,892 | 22,362 | 24,736 | 28,819 |
| 14 | 4,075 | 5,629 | 6,571 | 23,685 | 26,119 | 31,319 |
| 15 | 4,601 | 6,262 | 7,261 | 24,996 | 27,448 | 32,801 |
| 16 | 5,142 | 6,908 | 7,962 | 26,296 | 28,845 | 34,267 |
| 17 | 5,697 | 7,564 | 8,672 | 27,587 | 30,191 | 35,718 |
| 18 | 6,256 | 8,231 | 9,390 | 28,869 | 31,526 | 37,156 |
| 19 | 6,844 | 8,907 | 10,117 | 30,144 | 32,852 | 38,582 |
| 20 | 7,434 | 9,591 | 10,851 | 31,410 | 34,170 | 39,997 |
| 21 | 8,034 | 10,283 | 11,591 | 32,671 | 35,479 | 41,401 |
| 22 | 8,643 | 10,982 | 12,338 | 33,924 | 36,781 | 42,796 |
| 23 | 9,260 | 11,688 | 13,091 | 35,172 | 38,076 | 44,181 |
| 24 | 9,886 | 12,401 | 13,848 | 36,145 | 39,364 | 45,558 |
| 25 | 10,520 | 13,120 | 14,611 | 37,652 | 40,646 | 46,928 |
| 26 | 11,160 | 13,844 | 15,379 | 38,885 | 41,923 | 48,290 |
| 27 | 11,808 | 14,573 | 16,151 | 40,113 | 43,194 | 49,645 |
| 28 | 12,461 | 15,308 | 16,928 | 41,337 | 44,461 | 50,993 |
| 29 | 13,121 | 16,047 | 17,708 | 42,557 | 45,722 | 52,336 |
| 30 | 13,787 | 16,791 | 18,493 | 43,763 | 46,979 | 53,672 |

Таблиця В.3 – **Критерій Стьюдента $t\,[q; f]$ для рівня значущості $q$ та кількості степенів вільності $f = (n - 1)$**[12]

| $f$ \ $q$ | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,005 | 0,002 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 127,321 | 318,309 | 636,619 |
| 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 14,089 | 22,327 | 31,599 |
| 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 7,453 | 10,215 | 12,924 |
| 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 5,598 | 7,173 | 8,610 |
| 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 4,773 | 5,893 | 6,869 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 4,317 | 5,208 | 5,959 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 4,029 | 4,785 | 5,408 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 3,833 | 4,501 | 5,041 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 3,690 | 4,297 | 4,781 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 3,581 | 4,144 | 4,587 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 3,497 | 4,025 | 4,437 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 3,428 | 3,930 | 4,318 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 3,372 | 3,852 | 4,221 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 3,326 | 3,787 | 4,140 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 3,286 | 3,733 | 4,073 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 3,252 | 3,686 | 4,015 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,222 | 3,646 | 3,965 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,197 | 3,610 | 3,922 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,174 | 3,579 | 3,883 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,153 | 3,552 | 3,850 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,135 | 3,527 | 3,819 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,119 | 3,505 | 3,792 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,104 | 3,485 | 3,768 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,091 | 3,467 | 3,745 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,078 | 3,450 | 3,725 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,067 | 3,435 | 3,707 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,057 | 3,421 | 3,690 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,047 | 3,408 | 3,674 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,038 | 3,396 | 3,659 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,030 | 3,385 | 3,646 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 2,971 | 3,307 | 3,551 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 2,915 | 3,232 | 3,460 |
| 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 2,860 | 3,160 | 3,373 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 2,807 | 3,090 | 3,291 |

[12] В MS Excel функція: =СТЬЮДРАСПОБР($q$;$f$).

Таблиця В.4 – **Значення величини *R*[*q*; *f*]**
**для рівнів значущості *q* і числа ступенів вільності *f***

| $f$ | $q$ | | | | $f$ | $q$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,050 | 0,02 | 0,01 | | | 0,050 | 0,02 | 0,01 |
| | Значення величини $R$ | | | | | Значення величини $R$ | | |
| 2 | 15,56 | 38,97 | 77,96 | | 12 | 2,29 | 2,83 | 3,23 |
| 3 | 4,96 | 8,043 | 11,46 | | 13 | 2,26 | 2,78 | 3,17 |
| 4 | 3,56 | 5,08 | 6,53 | | 14 | 2,24 | 2,74 | 3,12 |
| 5 | 3,04 | 4,10 | 5,04 | | 15 | 2,22 | 2,71 | 3,08 |
| 6 | 2,78 | 3,64 | 4,36 | | 16 | 2,20 | 2,68 | 3,04 |
| 7 | 2,62 | 3,36 | 3,96 | | 17 | 2,18 | 2,66 | 3,01 |
| 8 | 2,51 | 3,18 | 3,71 | | 18 | 2,17 | 2,64 | 3,00 |
| 9 | 2,43 | 3,05 | 3,54 | | 19 | 2,16 | 2,62 | 2,95 |
| 10 | 2,37 | 2,96 | 3,41 | | 20 | 2,145 | 2,60 | 2,93 |
| 11 | 2,33 | 2,89 | 3,31 | | 21 | 1,96 | 2,33 | 2,58 |

Таблиця В.5 – **Критерій Кохрена $G[q; f_1; f_2]$ для рівня значущості $q$ = 0,05**

| $f_2$ \ $f_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 16 | 36 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,9985 | 0,9750 | 0,9392 | 0,9057 | 0,8772 | 0,8534 | 0,8332 | 0,8159 | 0,8010 | 0,7880 | 0,7341 | 0,6602 | 0,5000 |
| 3 | 0,9669 | 0,8709 | 0,7977 | 0,7457 | 0,7071 | 0,6771 | 0,6530 | 0,6333 | 0,6167 | 0,6025 | 0,5466 | 0,4748 | 0,3333 |
| 4 | 0,9065 | 0,7679 | 0,6841 | 0,6287 | 0,5895 | 0,5598 | 0,5365 | 0,5175 | 0,5017 | 0,4884 | 0,4366 | 0,3720 | 0,2500 |
| 5 | 0,8412 | 0,6838 | 0,5981 | 0,5441 | 0,5065 | 0,4783 | 0,4564 | 0,4387 | 0,4241 | 0,4118 | 0,3645 | 0,3066 | 0,2000 |
| 6 | 0,7808 | 0,6161 | 0,5321 | 0,4803 | 0,4447 | 0,4184 | 0,3980 | 0,3817 | 0,3682 | 0,3568 | 0,3135 | 0,2612 | 0,1667 |
| 7 | 0,7271 | 0,5612 | 0,4800 | 0,4307 | 0,3974 | 0,3726 | 0,3535 | 0,3384 | 0,3259 | 0,3154 | 0,2756 | 0,2278 | 0,1429 |
| 8 | 0,6798 | 0,5157 | 0,4377 | 0,3910 | 0,3595 | 0,3362 | 0,3185 | 0,3043 | 0,2926 | 0,2829 | 0,2462 | 0,2022 | 0,1250 |
| 9 | 0,6385 | 0,4775 | 0,4027 | 0,3584 | 0,3286 | 0,3067 | 0,2901 | 0,2768 | 0,2659 | 0,2568 | 0,2226 | 0,1820 | 0,1111 |
| 10 | 0,6020 | 0,4450 | 0,3733 | 0,3311 | 0,3029 | 0,2823 | 0,2666 | 0,2541 | 0,2439 | 0,2353 | 0,2032 | 0,1655 | 0,1000 |
| 12 | 0,5410 | 0,3924 | 0,3264 | 0,2880 | 0,2624 | 0,2439 | 0,2299 | 0,2187 | 0,2098 | 0,2020 | 0,1737 | 0,1403 | 0,0833 |
| 15 | 0,4709 | 0,3346 | 0,2758 | 0,2419 | 0,2195 | 0,2034 | 0,1911 | 0,1815 | 0,1736 | 0,1671 | 0,1429 | 0,1144 | 0,0667 |
| 20 | 0,3894 | 0,2705 | 0,2205 | 0,1921 | 0,1735 | 0,1602 | 0,1501 | 0,1422 | 0,1357 | 0,1303 | 0,1108 | 0,0879 | 0,0500 |
| 24 | 0,3434 | 0,2354 | 0,1907 | 0,1656 | 0,1493 | 0,1374 | 0,1286 | 0,1216 | 0,1160 | 0,1113 | 0,0942 | 0,0743 | 0,417 |
| 30 | 0,2929 | 0,1980 | 0,1593 | 0,1377 | 0,1237 | 0,1137 | 0,1061 | 0,1002 | 0,0958 | 0,0921 | 0,0771 | 0,0604 | 0,0333 |
| 40 | 0,2370 | 0,1576 | 0,1259 | 0,1082 | 0,0968 | 0,0887 | 0,0827 | 0,0780 | 0,0745 | 0,0713 | 0,0595 | 0,0462 | 0,0250 |
| 60 | 0,1737 | 0,1131 | 0,0895 | 0,0765 | 0,0682 | 0,0623 | 0,0583 | 0,0552 | 0,0520 | 0,0497 | 0,0411 | 0,0316 | 0,0167 |
| 120 | 0,0998 | 0,0632 | 0,0495 | 0,0419 | 0,0371 | 0,0337 | 0,0312 | 0,0292 | 0,0279 | 0,0266 | 0,0218 | 0,0165 | 0,0083 |
| ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблиця В.6 – **Критерій Фішера $F[q; f_1; f_2]$ для $q = 0{,}05$**[13]

| $f_2$ \ $f_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 24 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 164,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 238,9 | 243,9 | 249,0 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,45 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,84 | 8,74 | 8,64 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,77 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,82 | 4,68 | 4,53 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,84 | 3,67 |
| 7 | 5,50 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,73 | 3,57 | 3,41 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,12 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,23 | 3,07 | 2,09 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,74 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 2,95 | 2,79 | 2,61 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,50 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,77 | 2,60 | 2,42 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,35 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,64 | 2,48 | 2,29 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,24 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,55 | 2,38 | 2,19 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,15 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,48 | 2,31 | 2,11 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,08 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,42 | 2,25 | 2,05 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,40 | 2,23 | 2,03 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,38 | 2,20 | 2,00 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,36 | 2,18 | 1,98 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,38 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,34 | 2,16 | 1,96 | 1,71 |
| 26 | 4,22 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,32 | 2,15 | 1,95 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,30 | 2,13 | 1,93 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,44 | 2,29 | 2,12 | 1,91 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,54 | 2,43 | 2,28 | 2,10 | 1,90 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,89 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,18 | 2,00 | 1,79 | 1,52 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,52 | 2,37 | 2,25 | 2,10 | 1,92 | 1,70 | 1,39 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,17 | 2,02 | 1,83 | 1,61 | 1,25 |
| ∞ | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 1,94 | 1,75 | 1,52 | 1,00 |

[13] В MS Excel функції: =FРАСПОБР($q$;$f_1$;$f_2$).

ДОДАТОК Г

## ЗАВДАННЯ З ПЕРЕВІРКИ ВІДТВОРЮВАНОСТІ ДОСЛІДІВ

Побудувати вихідну таблицю[14] аналогічну 3.14, якщо значення випадкової величини $x$ отримані в 4 серіях (таблиці Г.1) за різних температур, що наведені в таблиці Г.2. Перевірити гіпотезу однорідності дисперсій за $G$-критерієм і у випадку їх однорідності розрахувати похибку експерименту.

Таблиця Г.1 – **Варіанти завдань**

| Серія \ Варіант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_2$ | $T_2$ |
| 2 | $T_2$ | $T_2$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_3$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_3$ | $T_3$ | $T_3$ |
| 3 | $T_3$ | $T_3$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_5$ | $T_4$ | $T_4$ | $T_5$ |
| 4 | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_6$ | $T_6$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_6$ |

Таблиця Г.2 – **Вихідні дані експерименту**

| Температура, °C | Паралельні $j$ досліди вимірювання $x$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T_1 = 10$ | 1,1 | 1,5 | 1,2 | 1,4 |
| $T_2 = 20$ | 2,5 | 2,7 | 2,6 | 2,9 |
| $T_3 = 30$ | 3,7 | 3,3 | 3,7 | 3,5 |
| $T_4 = 40$ | 5,5 | 4,9 | 5,3 | 5,0 |
| $T_5 = 50$ | 7,3 | 7,5 | 7,2 | 7,3 |
| $T_6 = 60$ | 9,4 | 9,0 | 9,6 | 9,2 |

[14] Інакше кажучи з таблиці Г.2 викрислити рядки, які не вказані у Вашому варіанті.

ДОДАТОК Д

## ЗАВДАННЯ З КОРЕЛЯЦІЇ

Знайти вибіркові лінійні математичні моделі, що виражають залежності $y$ від $x$ та $x$ від $y$, за варіантами завдань, наведеними в таблиці Д.1. При цьому скласти вихідну кореляційну таблицю аналогічну 3.17, використовуючи дані таблиць Д.2 і Д.3. Якщо коефіцієнт кореляції значущий в статистичному сенсі, то оцінити тісноту зв'язку між величинами $x$ і $y$.

Таблиця Д.1 – **Варіанти завдання**

| Варіант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $z_1$ | $z_1$ | $z_1$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_2$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_3$ | $z_4$ |
| $y$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_5$ |

За значення величин $x$ і $y$ прийняти випадкову величину $z_i$ з таблиці Д.2

Таблиця Д.2 – **Значення випадкової величини $z_i$**

| Випадкова величина | Інтервали 1–7 значень випадкової величини | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $z_1$ | 1,5–3,5 | 3,5–5,5 | 5,5–7,5 | 7,5–9,5 | 9,5–11,5 | 11,5–13,5 | 13,5–15,5 |
| $z_2$ | 5–8 | 8–11 | 11–14 | 14–17 | 17–20 | 20–23 | 23–26 |
| $z_3$ | 3,5–10,5 | 10,5–17,5 | 17,5–24,5 | 24,5–31,5 | 31,5–38,5 | 38,5–45,5 | 45,5–52,5 |
| $z_4$ | 0–5 | 5–10 | 10–15 | 15–20 | 20–25 | 25–30 | 30–35 |
| $z_5$ | 4,8–8,5 | 8,5–12,2 | 12,2–15,9 | 15,9–19,6 | 19,6–23,3 | 23,3–27 | 27–30,7 |

Таблиця Д.3 – **Частота повторів $n_{ij}$ кожної пари значень ($x_i$; $y_j$)**

| $x_i$ \ $y_j$ | | Інтервали | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Інтервали | 1 | 1 | | | | | | |
| | 2 | 2 | 4 | | | | | |
| | 3 | | 3 | 5 | | | | |
| | 4 | | | 8 | 12 | | | |
| | 5 | | | 6 | 11 | 20 | 15 | |
| | 6 | | | | | | 16 | 3 |
| | 7 | | | | | | | 1 |

ДОДАТОК Е

# РОБОТА З МАТРИЦЯМИ В MS EXCEL

*Основні поняття і властивості матриці*

*Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{Vmatrix},$$

яку будемо позначати $A$. Якщо $n = k$, то матриця $A$ називається квадратною, а число $n$, рівне $k$ – її порядком. Якщо $n = 1$ або $k = 1$, то матриця відповідно називається вектором-рядком або вектором-колонкою. У загальному випадку матриця $A$ називається *прямокутною* (з розмірами $n \times k$) чи $n \times k$-*матрицею*. Числа, що складають матрицю, називаються її елементами. При двомірному позначенні елементів першим індексом є номер рядка, а другим – номер колонки. При $n = 1$ чи $k = 1$ один з індексів опускається.

*Транспонованою* матрицею до прямокутної матриці $A$ розміру $n \times k$ називається матриця $A^T$ розміру $k \times n$ якщо

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

*Сумою* двох прямокутних матриць $A$ і $B$ однакових розмірів $n \times k$ називається матриця $C$ тих самих розмірів, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць $A$ і $B$: $C = A + B$, якщо $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k$). *Віднімання* двох матриць визначається рівністю $A - B = A + (-1)B$.

*Добутком матриці $A$ на число $\alpha$* називається матриця $C$, елементи якої утворюються із відповідних елементів матриці $A$ множенням їх на число $\alpha$: $C = \alpha \cdot A$, якщо $C_{ij} = \alpha \cdot A_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k$).

*Добутком двох прямокутних матриць* $A$ і $B$ розмірів $n \times k$ і $k \times q$ відповідно називається матриця $C$ розміром $n \times q$, елементи якої дорівнюють:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{k} A_{im} B_{mj} \ (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, q).$$

Необхідно відзначити що, взагалі, $AB \neq BA$.

*Оберненою до матриці $A$* є квадратна матриця $A^{-1}$ порядку $l$, якщо $A^{-1}A = = AA^{-1} = E$, де $E$ – одинична матриця, тобто квадратна матриця, діагональні елементи якої $e_{ii}$ дорівнюють одиниці, а інші – нулю.

*Використання MS Excel в матричних операціях*

Основи роботи з клітинами в MS Excel описано в додатку Б. Часто буває необхідним працювати не з однією клітиною, а з групою клітин, скажімо під час побудови графіка, чи під час роботи з матрицями[15], де вже клітина є елемент матриці, а остання – якоюсь групою клітин. У таких випадках зручно користуватися діапазонами клітин, що позначаються, наприклад A1:C2, де A1 – ліва верхня кутова клітина, а C2 – права нижня кутова клітина, а ":" обов'язковий розділовий знак, що вказує на те, що це діапазон, а не клітина, тобто діапазон це є якась *прямокутна* ділянка клітин. Кожному діапазону клітин є можливість привласнити[16] якесь унікальне ім'я, і вже до нього звертатися за ним. Розглянемо використання діапазонів на простому прикладі множення двох матриць:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 3 | 5 | | 7 | 10 | 13 | | *76* | 103 | 130 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | | 8 | 11 | 14 | | 100 | 136 | 172 |
| **3** | | | | | 9 | 12 | 15 | | | | |

Необхідно помножити[17] матрицю 1, яку наведено діапазоном A1:C2, на матрицю 2, яку представлено діапазоном E1:G3, а результуючу матрицю помістити в діапазон I1:K2. Для цього робимо активною клітину I1 і в неї "вставляємо" функцію[18]: =МУМНОЖ(A1:C2;E1:G3) і як результат в клітині буде число 76, але повинно бути не одне число, а множина чисел, тому далі ми виділяємо мишею, утримуючи натиснутою її ліву кнопку, клітини, в яких повинна бути розміщена результуюча матриця, починаючи з клітини I1. Далі "йдемо" у так званий *рядок формул*, де вже написана формула: =МУМНОЖ(A1:C2;E1:G3) і ставимо курсор за дужкою (ми спостерігаємо як виділилися різними кольорами границі наших матриць), після цього натискаємо комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter і миттєво з'являється результат добутку двох матриць. Таким чином, ми використали діапазони клітин, які задавали матриці. Аналогічно діапазони використовуються при побудові графічних залежностей, де вони вже вказують на діапазони значень незалежної і залежної змінних.

Інші операції з матрицями виконуються аналогічно множенню матриць і функції для них наступні: *транспонування*[19] – ТРАНСП(массив), *обернення* – МОБР(массив), розрахунок *визначника* квадратної матриці – МОПРЕД(массив) тощо, де масивом є діапазон клітин.

Поточний екран зберігається в буфері обміну MS Windows в форматі графічного об'єкта комбінацією клавіш „Alt+PrtSc", а вставляється в потрібне місце документу в місті знаходження курсору – „Ctrl+V".

---

[15] Транспонування, добуток, обернення, розрахунок визначника для квадратних матриць та ін.

[16] Виділити його, утримуючи ліву кнопку миші, і вписати в поле *ім'я* необхідну назву цього диапазону клітин.

[17] При множенні матриці $A(m \times n)$ на матрицю $B\ (n \times k)$, результуюча матриця $C\ (m \times k)$ буде мати розмірність: рядків $m$, скільки їх в першій матриці $A$, і колонок $k$, скільки їх в другій матриці $B$. Обов'язково для сумісності операції множення: в матриці $A$ кількість *колонок* повинно бути стільки, скільки *рядків* в матриці $B$, тобто $n$.

[18] Список функцій «меню „Вставка" \ *f(x)*Функция… \ Математические».

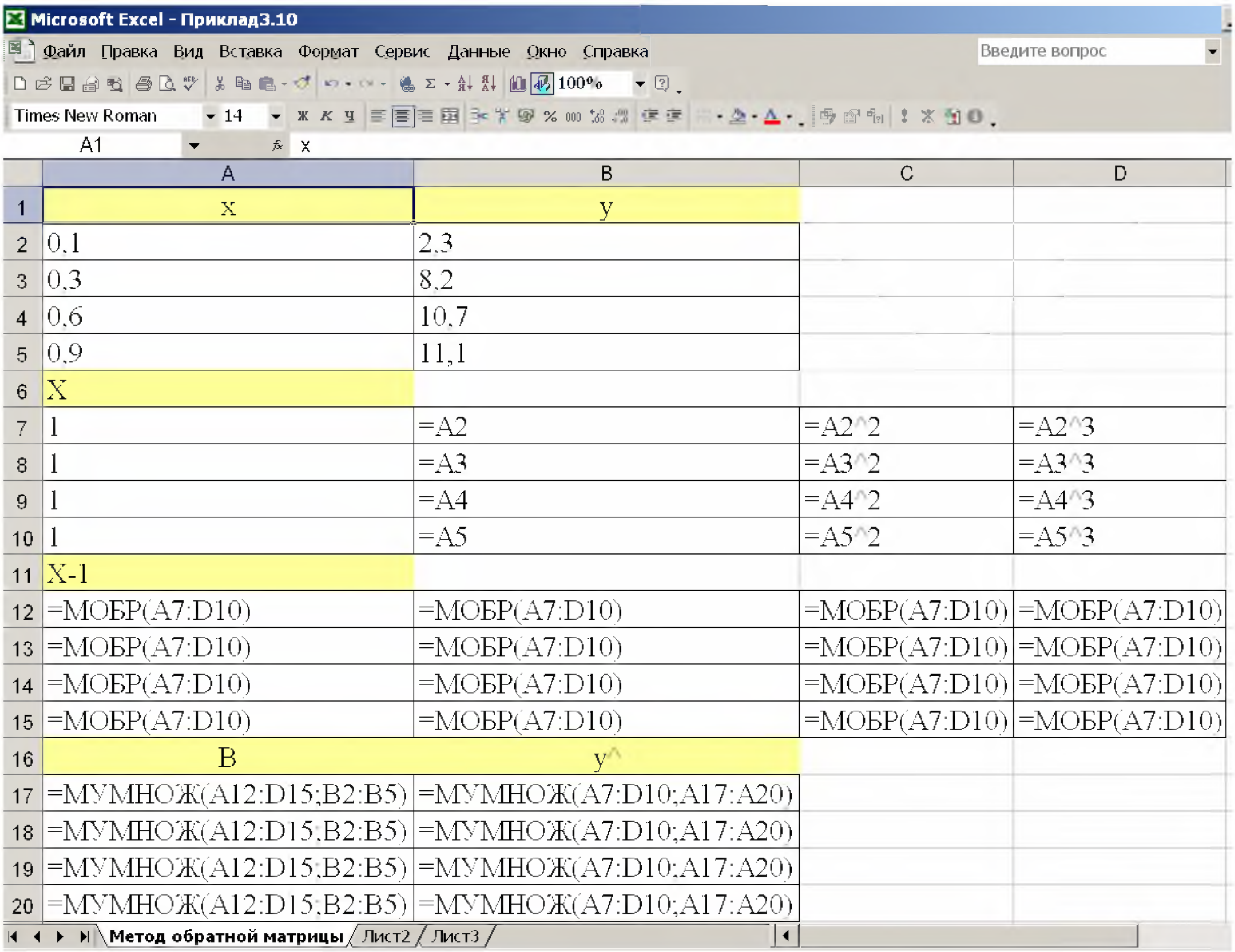
[19] «Меню „Вставка" \ *f(x)*Функция…\Ссылки и массивы».

*Приклад* Е.1

Знайти апроксимуючу функцію $y = f(x)$ для експериментальних даних, наведених таблицею в прикладі 3.11 (підрозділ 3.2)

| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,6 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2,3 | 8,2 | 10,7 | 11,1 |

В клітини A2-A5 і B2-B5 помістимо відповідно значення незалежної змінної $x$ та залежної змінної $y$. В діапазоні клітин A7:D10 будуємо матрицю $X$. Формули в позначеннях MS Excel наведено на нижченаведеному рисунку Е.1.




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | | |
| 2 | 0,1 | 2,3 | | |
| 3 | 0,3 | 8,2 | | |
| 4 | 0,6 | 10,7 | | |
| 5 | 0,9 | 11,1 | | |
| 6 | X | | | |
| 7 | 1 | =A2 | =A2^2 | =A2^3 |
| 8 | 1 | =A3 | =A3^2 | =A3^3 |
| 9 | 1 | =A4 | =A4^2 | =A4^3 |
| 10 | 1 | =A5 | =A5^2 | =A5^3 |
| 11 | X-1 | | | |
| 12 | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) |
| 13 | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) |
| 14 | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) |
| 15 | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) | =МОБР(A7:D10) |
| 16 | B | y^ | | |
| 17 | =МУМНОЖ(A12:D15;B2:B5) | =МУМНОЖ(A7:D10;A17:A20) | | |
| 18 | =МУМНОЖ(A12:D15;B2:B5) | =МУМНОЖ(A7:D10;A17:A20) | | |
| 19 | =МУМНОЖ(A12:D15;B2:B5) | =МУМНОЖ(A7:D10;A17:A20) | | |
| 20 | =МУМНОЖ(A12:D15;B2:B5) | =МУМНОЖ(A7:D10;A17:A20) | | |

Рисунок Е.1 – **Формули розрахунків коефіцієнтів методом оберненої матриці наведені в позначеннях MS Excel**

За алгоритмом наведеним вище з використанням функції =МОБР(A7:D10) розраховуємо обернену матрицю до $X$, яка розташовується в діапазоні клітин A12:D15. Добутком матриць $X^{-1}Y$ з використанням функції =МУМНОЖ(A12:D15;B2:B5) отримаємо коефіцієнти моделі.

Результати розрахунків наведено на рисунку Е.2.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | y | | |
| 2 | 0,1 | 2,3 | | |
| 3 | 0,3 | 8,2 | | |
| 4 | 0,6 | 10,7 | | |
| 5 | 0,9 | 11,1 | | |
| 6 | X | | | |
| 7 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 |
| 8 | 1 | 0,3 | 0,09 | 0,027 |
| 9 | 1 | 0,6 | 0,36 | 0,216 |
| 10 | 1 | 0,9 | 0,81 | 0,729 |
| 11 | X-1 | | | |
| 12 | 2,025 | -1,5 | 0,6 | -0,125 |
| 13 | -12,375 | 19,16666667 | -8,666666667 | 1,875 |
| 14 | 22,5 | -44,44444444 | 28,88888889 | -6,944444444 |
| 15 | -12,5 | 27,77777778 | -22,22222222 | 6,944444444 |
| 16 | B | y^ | | |
| 17 | -2,61 | 2,3 | | |
| 18 | 56,78333333 | 8,2 | | |
| 19 | -80,66666667 | 10,7 | | |
| 20 | 38,33333333 | 11,1 | | |

Метод обратной матрицы / Лист2 / Лист3

Рисунок Е.2 – **Результати розрахунків коефіцієнтів моделі**

*Завдання для самостійної роботи* за прикладом 3.11

Знайти апроксимуючу функцію $y = f(x)$ для експериментальних даних, наведених в таблиці і розрахувати значення $y$ при заданому $x$.

Таблиця Е.1 – **Варіанти завдання**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* |
| 1,0 | 10,4 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,05 | 0,1 | 0,03 | 1,0 | 3,2 |
| 5,7 | 15,6 | 3,4 | 0,5 | 3,4 | 0,85 | 2,7 | 0,58 | 5,1 | 10,4 |
| 9,1 | 21,7 | 5,6 | 1,6 | 6,8 | 1,70 | 5,4 | 1,20 | 9,8 | 16,6 |
| 14,3 | 39,0 | 7,8 | 2,1 | 12,1 | 3,0 | 7,2 | 1,64 | 15,1 | 32,0 |
| 15,0 | ? | 8,0 | ? | 4,0 | ? | 6,5 | ? | 3,2 | ? |

Продовження таблиці Е.1

| 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* |
| 0,1 | 7,0 | 0,5 | 5,3 | 1,0 | 20,4 | 0,7 | 10,4 | 10 | 1,7 |
| 3,8 | 14,1 | 1,5 | 6,7 | 3,5 | 14,6 | 3,1 | 26,0 | 15 | 4,2 |
| 9,2 | 19,6 | 2,5 | 12,1 | 7,0 | 7,4 | 6,9 | 30,8 | 20 | 7,9 |
| 17,1 | 22,3 | 3,5 | 25,4 | 12 | 5,2 | 9,3 | 39,7 | 25 | 19,3 |
| 5,0 | ? | 3,0 | ? | 10 | ? | 5,0 | ? | 7 | ? |

ДОДАТОК Ж

## ЗАСТОСУВАННЯ MS EXCEL ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ЗА СПОСОБОМ ЧЕБИШЕВА

Для використання нижченаведеної програми необхідно створити інтерфейс користувача в MS Excel чи MS Word:

– Сервис\[20] Макрос \ Редактор Visual Basic або натиснути Alt+F11;

– створюємо форму меню “Insert \ UserForm” і збільшуємо її розміри;

– на панелі інструментів, яка відкривається в меню View \ “Toolbox” потрібні два об'єкти (рисунок Ж.1): “TextBox” – аналог екрану програми, на який будуть виведені результати розрахунків і “CommandButton” – кнопка при натисканні на яку починається розрахунок;

– натиснувши лівою кнопкою миші на кнопку “TextBox” і утримуючи[21] її переміщуємо курсор на створену форму. В результаті на формі відображається віконце білого кольору, яке необхідно максимально розширити, як зображено на рисунку. Зліва у вікні його властивостей[22] “Properties-TextBox1” необхідно змінити дві властивості: (Name) – замість TextBox1 написати Screen; MultiLine – замість False вибрати True;

– натиснувши лівою кнопкою миші на кнопку “CommandButton” і утримуючи її перемістити курсор на створену форму. В результаті на формі відобразиться кнопка. Зліва у вікні її властивостей “Properties-CommandButton1” необхідно змінити властивість Caption – замість CommandButton1 написати Расчет;

– натиснувши на кнопці „Расчет” лівою кнопкою миші два рази попадаємо у вікно введення коду програми, в якому замість слів “End Sub” вставляємо текст програми наведений нижче;

– підготовка файла, наприклад в Microsoft® Блокнот[23], з даними для розрахунку наступної структури:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | | – порядок поліному |
| 9 | | – кількість експериментальних даних |
| 340 | 108.7 | – незалежна і залежна змінні кожного з 9 дослідів |
| 380 | 119.5 | (це коментарі, тому їх в файл не заносити) |
| 420 | 129.7 | |
| 460 | 139.4 | |
| 500 | 148.5 | |
| 540 | 157.2 | |
| 580 | 165.5 | |
| 620 | 173.3 | |
| 660 | 180.6 | |

Підготовлений файл зберегти в корені диска С з ім′ям “chebyshev.txt”;

– зробити активною форму меню “View” \ Object і вибрати для запуска програми в меню “Run” \ Run Sub/UserForm або F5.

---

[20] Коса лінія „\” означає „шукайте далі”.

[21] Можна кнопку миші відпустити і натиснути на неї на формі та утримуючи її розтягувати біле віконце до необхідних розмірів.

[22] Клацнути правою кнопкою миші на полі вікна об′єкту “TextBox1” \ Properties.

[23] Пуск\Программы\Стандартные\Блокнот.

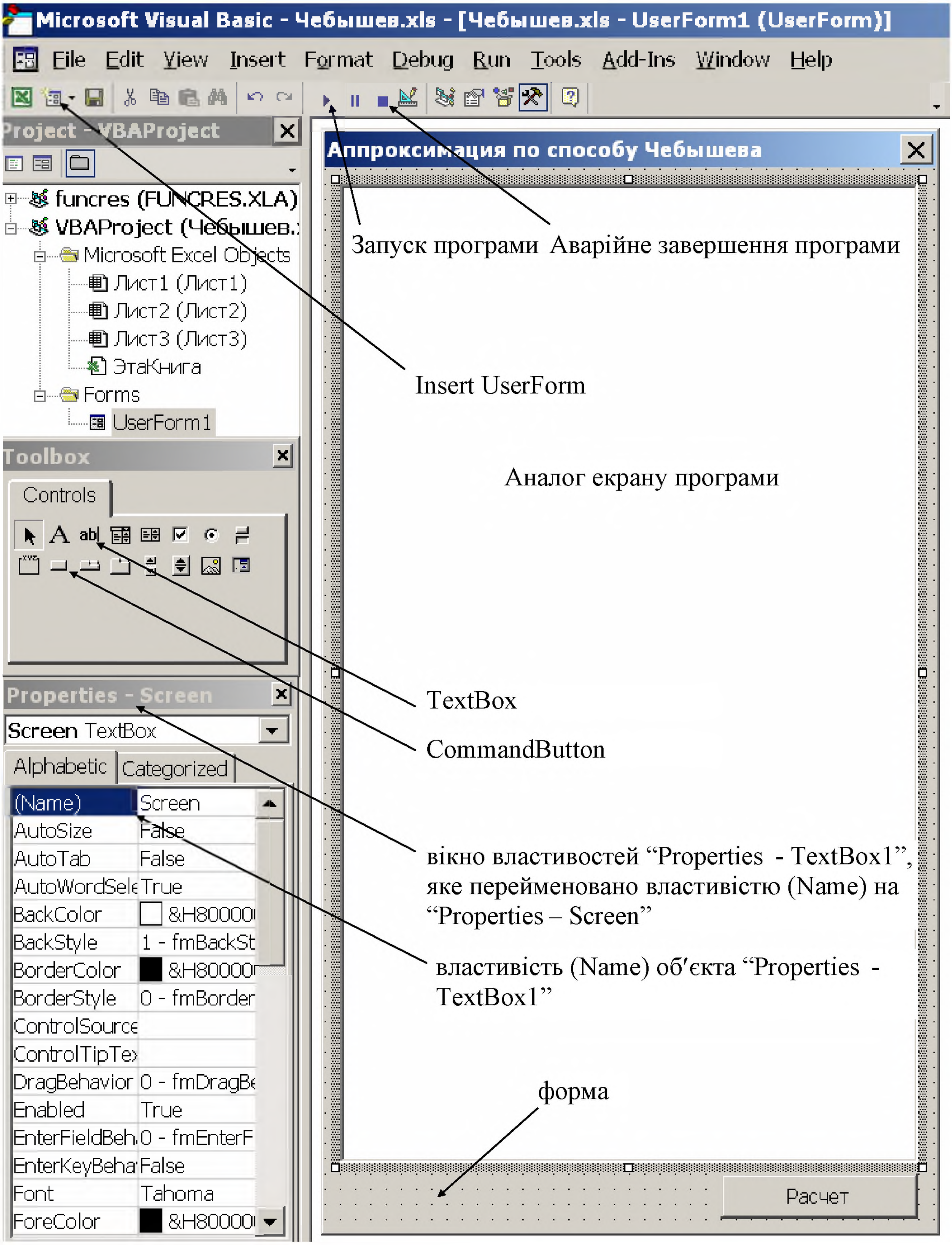



Рисунок Ж.1 – **Вигляд редактора Visual Basic при створенні інтерфейсу користувача програми**

```
'***********************************************************
'********* Аппроксимация по способу Чебышева **********
'***********************************************************
 Open "c:\chebyshev.txt" For Input As #1
 Input #1, m, n
 ReDim x(n), y(n)
 For i = 1 To n
  Input #1, x(i)
  Input #1, y(i)
 Next i
Call apcheb(x(), y(), n, m)
Close #1
End Sub

Sub apcheb(x(), y(), n, m)
ReDim al(m + 1, m + 1), a(m + 1)
ReDim xn(2 * m), xny(m + 1), xs(m + 1), V(3, m + 1)
Dim Enter As String: Enter = Chr(13) + Chr(10)
xn(0) = n
For i = 1 To 2 * m
  xn(i) = 0
  For j = 1 To n
    xn(i) = xn(i) + x(j) ^ i
Next j, i

For i = 1 To m + 1
  xny(i) = 0
  For j = 1 To n
    xny(i) = xny(i) + x(j) ^ (i - 1) * y(j)
Next j, i
```

```
a(1) = xny(1) / n
al(1, 1) = -xn(1) / n
frp2 = xn(2) + al(1, 1) * xn(1)
a(2) = (xny(2) + al(1, 1) * xny(1)) / frp2

For i = 1 To m - 1
 Call M1(i, s, al(), xn())
 Call M2(i, s1, al(), xn())
 betta = -s / s1
 Call M2(i - 1, s2, al(), xn())
 gamma = -s1 / s2

 V(2, 1) = betta
 For j = 2 To i + 1
  V(1, j - 1) = al(i, j - 1)
  V(2, j) = betta * al(i, j - 1)
 Next j

 V(3, 2) = gamma
 For j = 3 To i + 1
  V(3, j) = gamma * al(i - 1, j - 2)
 Next j
 For j = 1 To i + 1
  al(i + 1, j) = V(1, j) + V(2, j) + V(3, j)
  V(1, j) = V(2, j) = V(3, j) = 0
 Next j
 Call M3(i + 2, s3, al(), xny())
 Call M2(i + 1, s4, al(), xn())
 a(i + 2) = s3 / s4
Next i

Pr$ = "Развернутый вид многочлена:" + Enter
Pr$ = Pr$ + "    A(i)  ----------------  Alfa(ij)" + Enter
Pr$ = Pr$ + Str(a(1)) + "    |  1  " + Enter
```

```
For i = 2 To m + 1
 Pr$ = Pr$ + Str(a(i)) + "   |  1  "
 For j = 1 To i - 1
  Pr$ = Pr$ + Str(al(i - 1, j)) + " "
 Next j
 Pr$ = Pr$ + Enter
Next i

Pr$ = Pr$ + "Оценка точности формулы" + Enter
Pr$ = Pr$ + "   x         y         y^     y-y^    (y-y^)^2  " + Enter

For i = 1 To m + 1
 For j = i To m + 1
  If i = j Then
   xs(i) = xs(i) + a(j)
   Else
   xs(i) = xs(i) + a(j) * al(j - 1, j - i)
  End If
Next j, i

p = 0: t = 0
For i = 1 To n
 For j = 1 To m + 1
  p = p + xs(j) * x(i) ^ (j - 1)
 Next j
 t = t + (p - y(i)) ^ 2
 Pr$ = Pr$ + Str(x(i)) + "   |   " + Str(y(i)) + "   |   " + Str(p) + "   |   " +
Str(p - y(i)) + "   |   " + Str((p - y(i)) ^ 2) + Enter
 p = 0
Next i

Pr$ = Pr$ + "Сумма остатков SS =" + Str(t) + Enter
```

```
Pr$ = Pr$ + "Многочлен после преобразований:" + Enter

For i = 1 To m + 1
  Pr$ = Pr$ + Str(xs(i)) + "*  x ^" + Str(i - 1) + Enter
Next i
Screen.Text = Pr$
End Sub

Sub M1(r, s, a1(), xn())
s = xn(2 * r + 1)
For i = 2 * r To r + 1 Step -1
  s = s + a1(r, 2 * r + 1 - i) * xn(i)
Next i
Call M2(r, s1, a1(), xn())
s = s + a1(r, 1) * s1
End Sub

Sub M2(r, s, a1(), xn())
s = xn(2 * r)
For i = 2 * r - 1 To r Step -1
  s = s + a1(r, 2 * r - i) * xn(i)
Next i
End Sub

Sub M3(r, s, a1(), xny())
s = xny(r)
For i = r - 1 To 1 Step -1
  s = s + a1(r - 1, r - i) * xny(i)
Next i
End Sub
```

*Примітка.* Затемнені рядки програми є продовженням попереднього і набираються одним рядком; це стосується і наступних програм

*Приклад* Ж.1

За даними прикладу 3.13 знайти залежність ізобарної теплоємкості $y$, Дж/(моль·К) ізобутану від температури $x$, К. Експериментальні дані наступні:

| $x$ | 340 | 380 | 420 | 460 | 500 | 540 | 580 | 620 | 660 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 108,7 | 119,5 | 129,7 | 139,4 | 148,5 | 157,2 | 165,5 | 173,3 | 180,6 |

*Розв'язок*

*Результат розрахунку* прикладу Ж.1 за програмою в MS Excel „Развернутый вид многочлена[24]:"

A(i) ——————————— Alfa(ij)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 146.933333333333 | 1 | | | |
| 0.224333333333335 | 1 | –500 | | |
| –1.5137987012987E–04 | 1 | –1000 | 239333.333333333 | |
| 5.78703703755967E–08 | 1 | –1500 | 731120 | –115560000 |

„Оценка точности формулы"

| x | y | y^ | y–y^ | (y–y^)^2 |
|---|---|---|---|---|
| 340 | 108.7 | 108.717171717166 | 0.0172 | 0.00029584 |
| 380 | 119.5 | 119.479292929296 | –0.0207 | 0.00042849 |
| 420 | 129.7 | 129.690331890337 | –0.0097 | 0.00009409 |
| 460 | 139.4 | 139.372510822514 | –0.0275 | 0.00075625 |
| 500 | 148.5 | 148.548051948052 | 0.0481 | 0.00231361 |
| 540 | 157.2 | 157.239177489174 | 0.0392 | 0.00153664 |
| 580 | 165.5 | 165.468109668105 | –0.0319 | 0.00101761 |
| 620 | 173.3 | 173.257070707068 | –0.0429 | 0.00184041 |
| 660 | 180.6 | 180.628282828289 | 0.0283 | 0.00080089 |

„Сумма остатков SS =" .00908383

"Многочлен[25] после преобразований:"

–8.15108225168683* x ^ 0

.418023388652211* x ^ 1

–2.38185425693265E–04* x ^ 2

5.78703703755967E–-08* x ^ 3

Моделі[24, 25] є ідентичними, що підтверджується зведенням подібних доданків в моделі Чебишева[24] і вони відповідають моделі (3.103), що отримана раніше.

---

[24] $\hat{y}$ = 146.933333333333 + .224333333333335 ($x$ – 500) – 1.5137987012987E-04 ($x^2$ – 1000$x$ + + 239333.333333333) + 5.78703703755967E-08 ($x^3$ – 1500$x^2$ + 731120$x$ – 115560000).

[25] $\hat{y}$ = –8.15108225168683 + .418023388652211$x$ – 2.38185425693265E-04$x^2$ + 5.78703703755967E-08$x^3$.

*Завдання з апроксимації експериментальних даних за способом Чебишева*

За даними таблиці Ж.1 визначити аналітичну залежність між незалежною змінною *x* і залежною *y* у виді многочлену третього степеня. Оцінити точність наближення його і порівняти її з точністю наближення другого степеня.

Таблиця Ж.1 – **Варіанти завдання**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* |
| 1,9 | 11 | 1,2 | 6,1 | 0,7 | 2,7 | 1,1 | 1,7 | 0,3 | 3 |
| 2,3 | 26,9 | 1,6 | 12,2 | 1,1 | 15,3 | 1,5 | 16,6 | 0,7 | 11,9 |
| 2,9 | 42,3 | 2,2 | 18 | 1,7 | 27,2 | 2,1 | 30,5 | 1,3 | 20,2 |
| 3,6 | 56,9 | 2,9 | 23,4 | 2,4 | 38,4 | 2,8 | 43,5 | 2 | 28 |
| 4,4 | 70,6 | 3,7 | 28,4 | 3,2 | 48,9 | 3,6 | 55,6 | 2,8 | 35,3 |
| 5,1 | 83,7 | 4,4 | 33,1 | 3,9 | 58,7 | 4,3 | 67 | 3,5 | 42,1 |
| 6,8 | 96 | 6,1 | 37,7 | 5,6 | 68 | 6 | 77,3 | 5,2 | 48,4 |
| 9,2 | 107,5 | 8,5 | 41,7 | 8 | 76,4 | 8,4 | 86,9 | 7,6 | 54,3 |
| 12,8 | 118,4 | 12,1 | 45,6 | 11,6 | 84,5 | 12 | 96 | 11,2 | 59,8 |

Продовження таблиці Ж.1

| 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* | *x* | *y* |
| 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,3 | 0,5 | 4,6 | 2,2 | 8,1 | 0,1 | 3 |
| 3 | 17 | 2,5 | 3 | 0,9 | 15 | 2,6 | 24,8 | 0,5 | 10,82 |
| 3,6 | 30,8 | 3,1 | 4,6 | 1,5 | 24,7 | 3,2 | 40,2 | 1,1 | 18,26 |
| 4,3 | 43,7 | 3,8 | 5,9 | 2,2 | 34 | 3,9 | 54,7 | 1,8 | 25,32 |
| 5,1 | 55,5 | 4,6 | 7,1 | 3 | 42,2 | 4,7 | 68 | 2,6 | 32,03 |
| 5,8 | 66,6 | 5,3 | 8,3 | 3,7 | 50,1 | 5,4 | 80,2 | 3,3 | 38,4 |
| 7,5 | 76,8 | 7 | 9,4 | 5,4 | 57,5 | 7,1 | 91,6 | 5 | 44,4 |
| 9,9 | 86,3 | 9,4 | 10,3 | 7,8 | 64,3 | 9,5 | 102 | 7,4 | 50,2 |
| 13,5 | 95 | 13 | 11,3 | 11,4 | 70,6 | 13,1 | 111,7 | 11 | 55 |

ДОДАТОК К

## ЗАВДАННЯ З ПРИВЕДЕННЯ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ДО ВИДУ ЛІНІЙНОГО ЗА ПАРАМЕТРАМИ

Визначити параметри нелінійної моделі, що описує залежність між незалежною $x$ та залежною $y$ змінними за експериментальними даними, які наведені в таблиці К.1, якщо емпіричною формулою є одна із функцій *а–е* (рисунок 3.8 в 3.2.2).

Таблиця К.1 – **Варіанти завдання**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 0,2 | 1,244 | 0,1 | 65,212 | 0,01 | 0,381 | 0,1 | 0,261 | 1,0 | 65,212 |
| 0,4 | 1,598 | 0,2 | 47,215 | 0,02 | 0,999 | 1,1 | 0,429 | 1,5 | 48,745 |
| 0,6 | 2,101 | 0,3 | 34,657 | 0,03 | 1,472 | 2,1 | 0,492 | 2,0 | 36,804 |
| 0,8 | 2,809 | 0,4 | 26,121 | 0,04 | 1,798 | 3,1 | 0,534 | 2,5 | 28,335 |
| 1,0 | 3,798 | 0,5 | 20,430 | 0,05 | 2,021 | 4,1 | 0,567 | 3,0 | 22,428 |
| 1,2 | 5,175 | 0,6 | 16,691 | 0,06 | 2,173 | 5,1 | 0,594 | 3,5 | 18,362 |
| 1,4 | 7,087 | 0,7 | 14,262 | 0,07 | 2,277 | 6,1 | 0,618 | 4,0 | 15,591 |
| 1,6 | 9,737 | 0,8 | 12,699 | 0,08 | 2,348 | 7,1 | 0,638 | 4,5 | 13,718 |
| 1,8 | 13,407 | 0,9 | 11,701 | 0,09 | 2,396 | 8,1 | 0,656 | 5,0 | 12,462 |
| 2,0 | 18,484 | 1,0 | 11,067 | 0,10 | 2,429 | 9,1 | 0,673 | 5,5 | 11,624 |
| $y = ab^x$ | | $y = \dfrac{1}{a+bx}$ | | $y = a + b\ln x$ | | $y = ax^b$ | | $y = a + \dfrac{b}{x}$ | |

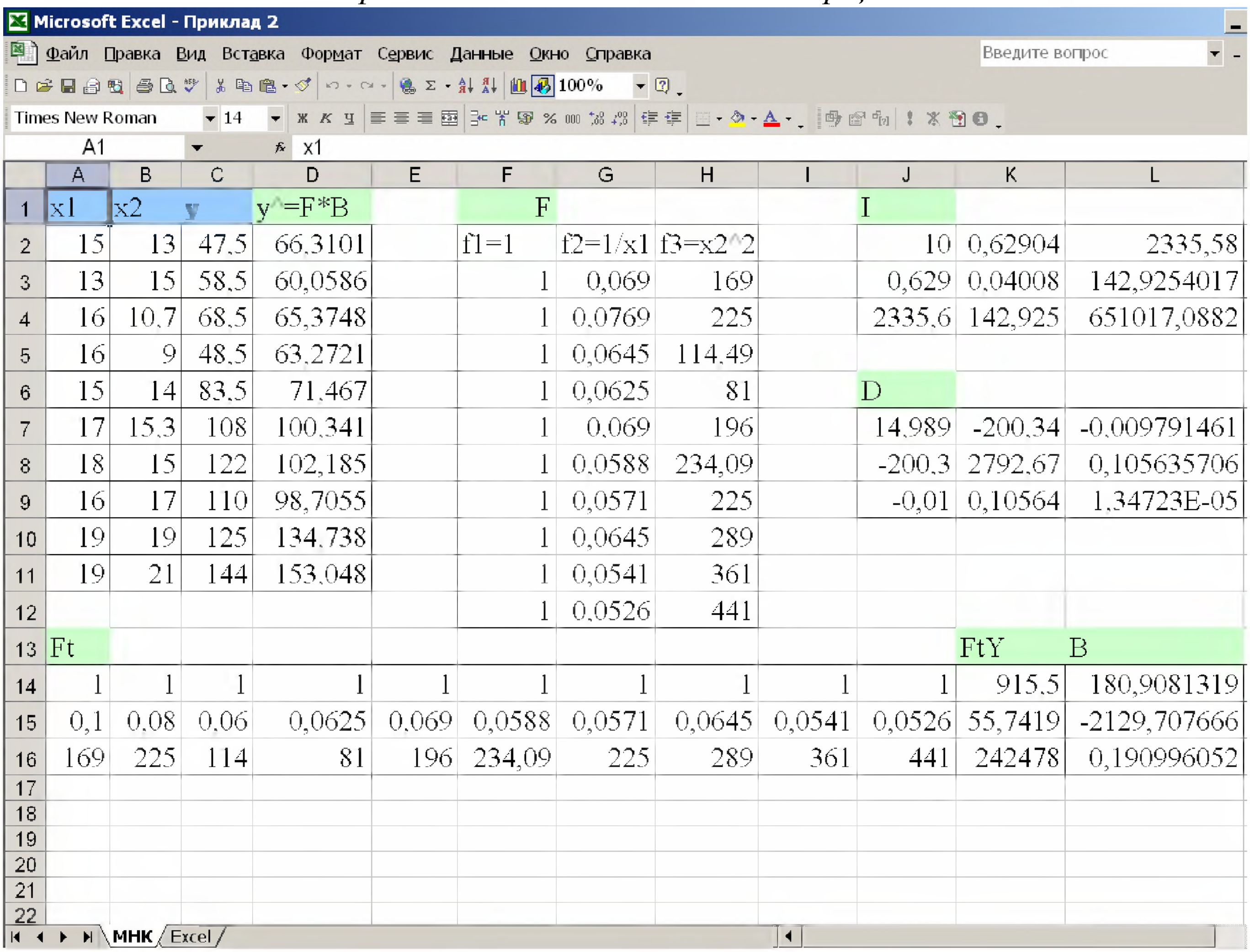
Продовження таблиці К.1

| 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 0,1 | 0,272 | 0,1 | 67,196 | 0,9 | 0,011 | 0,1 | 0,514 | 0,1 | 7,524 |
| 1,2 | 1,592 | 1,1 | 42,089 | 1,2 | 0,165 | 0,3 | 1,014 | 0,7 | 5,268 |
| 2,3 | 2,096 | 2,1 | 26,226 | 1,5 | 0,268 | 0,5 | 1,265 | 1,3 | 3,779 |
| 3,4 | 2,407 | 3,1 | 18,431 | 1,8 | 0,336 | 0,7 | 1,476 | 1,9 | 2,794 |
| 4,5 | 2,611 | 4,1 | 12,850 | 2,1 | 0,382 | 0,9 | 1,648 | 2,5 | 2,144 |
| 5,6 | 2,744 | 5,1 | 8,861 | 2,4 | 0,412 | 1,1 | 1,780 | 3,1 | 1,710 |
| 6,7 | 2,832 | 6,1 | 6,016 | 2,7 | 0,433 | 1,3 | 1,871 | 3,7 | 1,420 |
| 7,8 | 2,890 | 7,1 | 3,985 | 3 | 0,448 | 1,5 | 1,919 | 4,3 | 1,224 |
| 8,9 | 2,928 | 8,1 | 2,526 | 3,3 | 0,460 | 1,7 | 1,924 | 4,9 | 1,090 |
| 10 | 2,952 | 9,1 | 1,445 | 3,6 | 0,471 | 1,9 | 1,987 | 5,5 | 1,072 |
| $y = \dfrac{x}{a+bx}$ | | $y = ab^x$ | | $y = a + \dfrac{b}{x}$ | | $y = \dfrac{x}{a+bx}$ | | $y = a + b\ln x$ | |

# ДОДАТОК Л
# РОЗРАХУНКИ КОЕФІЦІЄНТІВ МОДЕЛІ МАТРИЧНО ТА З ВИКОРИСТАННЯМ КОМПОНЕНТУ „РЕГРЕССИЯ”, А ТАКОЖ ЇЇ СТАТИСТИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

На основі прикладу 3.16 розрахуємо в MS Excel коефіцієнти моделі (3.150) з використанням матричного способу[26] і компоненту «Регрессия».

*Матричний спосіб знаходження коефіцієнтів*



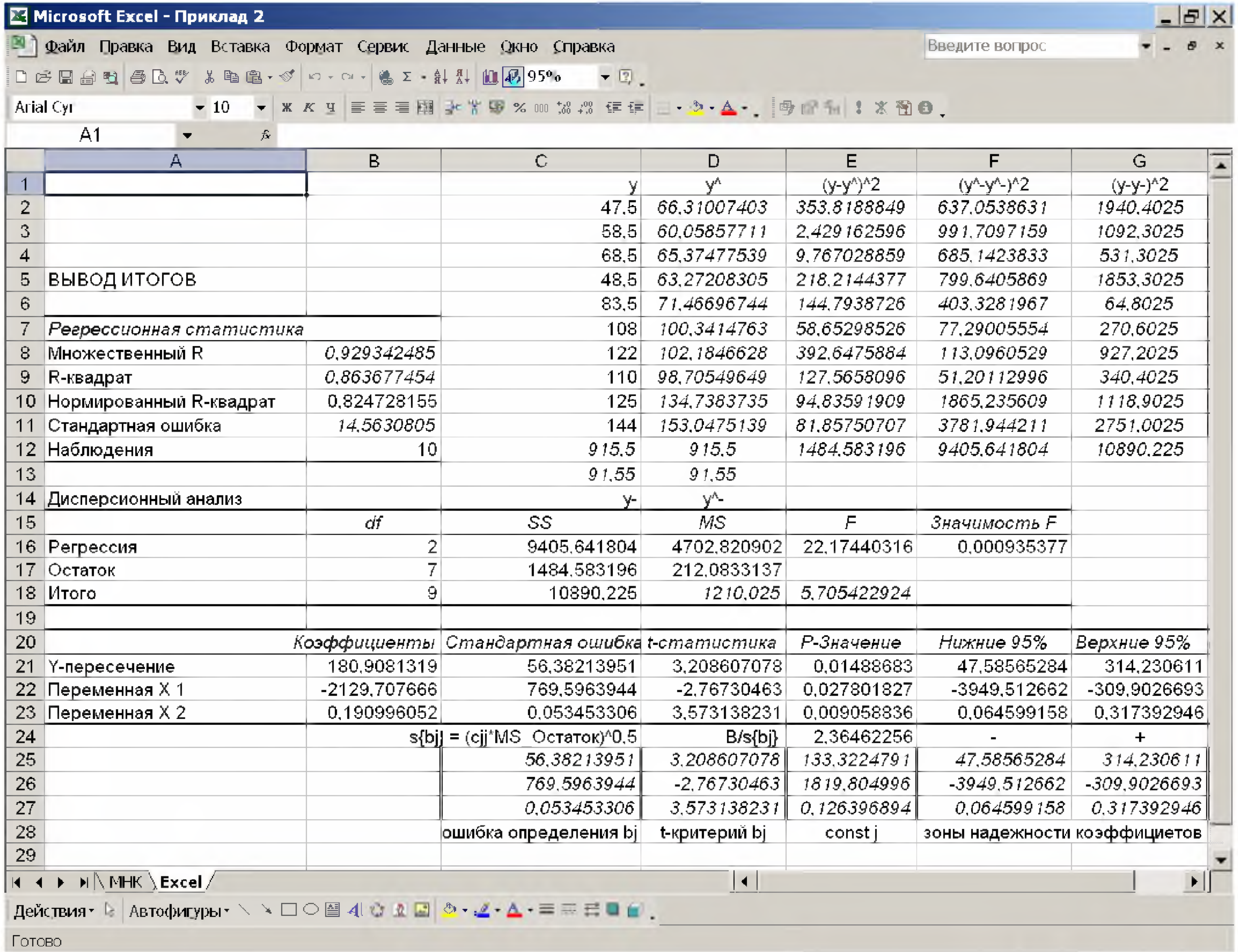

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x1 | x2 | y | y^=F*B | | F | | | | I | | |
| 2 | 15 | 13 | 47,5 | 66,3101 | | f1=1 | f2=1/x1 | f3=x2^2 | | 10 | 0,62904 | 2335,58 |
| 3 | 13 | 15 | 58,5 | 60,0586 | | 1 | 0,069 | 169 | | 0,629 | 0,04008 | 142,9254017 |
| 4 | 16 | 10,7 | 68,5 | 65,3748 | | 1 | 0,0769 | 225 | | 2335,6 | 142,925 | 651017,0882 |
| 5 | 16 | 9 | 48,5 | 63,2721 | | 1 | 0,0645 | 114,49 | | | | |
| 6 | 15 | 14 | 83,5 | 71,467 | | 1 | 0,0625 | 81 | | D | | |
| 7 | 17 | 15,3 | 108 | 100,341 | | 1 | 0,069 | 196 | | 14,989 | -200,34 | -0,009791461 |
| 8 | 18 | 15 | 122 | 102,185 | | 1 | 0,0588 | 234,09 | | -200,3 | 2792,67 | 0,105635706 |
| 9 | 16 | 17 | 110 | 98,7055 | | 1 | 0,0571 | 225 | | -0,01 | 0,10564 | 1,34723E-05 |
| 10 | 19 | 19 | 125 | 134,738 | | 1 | 0,0645 | 289 | | | | |
| 11 | 19 | 21 | 144 | 153,048 | | 1 | 0,0541 | 361 | | | | |
| 12 | | | | | | 1 | 0,0526 | 441 | | | | |
| 13 | Ft | | | | | | | | | | FtY | B |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 915,5 | 180,9081319 |
| 15 | 0,1 | 0,08 | 0,06 | 0,0625 | 0,069 | 0,0588 | 0,0571 | 0,0645 | 0,0541 | 0,0526 | 55,7419 | -2129,707666 |
| 16 | 169 | 225 | 114 | 81 | 196 | 234,09 | 225 | 289 | 361 | 441 | 242478 | 0,190996052 |
| 17 | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | | | | | |
| 22 | | | | | | | | | | | | |

*Спосіб, що передбачає використання компоненту „Регрессия”*

В меню[27] „Сервис” \ „Анализ данных” вибираємо „Регрессия” і у вікні, що з'явилося, вводимо діапазони вихідних $Y$ („Входной интервал Y:” $[28]C$2:$C$11) та вхідних $X$ („Входной интервал X:” $G$3:$H$12) експериментальних даних. Слід відмітити, що вхідні дані $X$ $A$2:$B$11, спочатку[29] слід перерахувати у відповідності з видом моделі (матриця $F$), а потім використовувати[30]: $G$3:$H$12.

---

[26] Основи роботи з матрицями в MS Excel описано в додатку Е.
[27] „Сервис” \ „Надстройки” \ „Пакет анализа”.
[28] Цей знак перед літерою і цифрою означає фіксування відповідно – колонки, рядка.
[29] Інакше будуть визначені коефіцієнти моделі $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$.
[30] Вільний член $b_0$ Excel розраховує автоматично.




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | y | y^ | (y-y^)^2 | (y^-y^-)^2 | (y-y-)^2 |
| 2 | | | 47,5 | 66,31007403 | 353,8188849 | 637,0538631 | 1940,4025 |
| 3 | | | 58,5 | 60,05857711 | 2,429162596 | 991,7097159 | 1092,3025 |
| 4 | | | 68,5 | 65,37477539 | 9,767028859 | 685,1423833 | 531,3025 |
| 5 | ВЫВОД ИТОГОВ | | 48,5 | 63,27208305 | 218,2144377 | 799,6405869 | 1853,3025 |
| 6 | | | 83,5 | 71,46696744 | 144,7938726 | 403,3281967 | 64,8025 |
| 7 | *Регрессионная статистика* | | 108 | 100,3414763 | 58,65298526 | 77,29005554 | 270,6025 |
| 8 | Множественный R | 0,929342485 | 122 | 102,1846628 | 392,6475884 | 113,0960529 | 927,2025 |
| 9 | R-квадрат | 0,863677454 | 110 | 98,70549649 | 127,5658096 | 51,20112996 | 340,4025 |
| 10 | Нормированный R-квадрат | 0,824728155 | 125 | 134,7383735 | 94,83591909 | 1865,235609 | 1118,9025 |
| 11 | Стандартная ошибка | 14,5630805 | 144 | 153,0475139 | 81,85750707 | 3781,944211 | 2751,0025 |
| 12 | Наблюдения | 10 | 915,5 | 915,5 | 1484,583196 | 9405,641804 | 10890,225 |
| 13 | | | 91,55 | 91,55 | | | |
| 14 | Дисперсионный анализ | | y- | y^- | | | |
| 15 | | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *Значимость F* | |
| 16 | Регрессия | 2 | 9405,641804 | 4702,820902 | 22,17440316 | 0,000935377 | |
| 17 | Остаток | 7 | 1484,583196 | 212,0833137 | | | |
| 18 | Итого | 9 | 10890,225 | 1210,025 | 5,705422924 | | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | *Коэффициенты* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* |
| 21 | Y-пересечение | 180,9081319 | 56,38213951 | 3,208607078 | 0,01488683 | 47,58565284 | 314,230611 |
| 22 | Переменная X 1 | -2129,707666 | 769,5963944 | -2,76730463 | 0,027801827 | -3949,512662 | -309,9026693 |
| 23 | Переменная X 2 | 0,190996052 | 0,053453306 | 3,573138231 | 0,009058836 | 0,064599158 | 0,317392946 |
| 24 | | s{bj} = (cjj*MS_Остаток)^0,5 | | B/s{bj} | 2,36462256 | - | + |
| 25 | | | 56,38213951 | 3,208607078 | 133,3224791 | 47,58565284 | 314,230611 |
| 26 | | | 769,5963944 | -2,76730463 | 1819,804996 | -3949,512662 | -309,9026693 |
| 27 | | | 0,053453306 | 3,573138231 | 0,126396894 | 0,064599158 | 0,317392946 |
| 28 | | | ошибка определения bj | t-критерий bj | const j | зоны надежности | коэффициетов |
| 29 | | | | | | | |

Розрахунки в діапазонах \$C\$1:\$G\$14, \$D\$18:\$E\$18, \$C\$24:\$G\$28 наведено додатково для розуміння підрахунків: *SS*, *F*-відношення (3.121) та значень діапазону \$C\$20:\$G\$23

Microsoft Excel - Приклад 2

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | y | y^ | (y-y^)^2 | (y^-y^-)^2 | (y-y-)^2 |
| 2 | | | =MHK!C2 | =MHK!D2 | =(C2-D2)^2 | =(D2-$D$13)^2 | =(C2-$C$13)^2 |
| 3 | | | =MHK!C3 | =MHK!D3 | =(C3-D3)^2 | =(D3-$D$13)^2 | =(C3-$C$13)^2 |
| 4 | | | =MHK!C4 | =MHK!D4 | =(C4-D4)^2 | =(D4-$D$13)^2 | =(C4-$C$13)^2 |
| 5 | ВЫВОД ИТОГОВ | | =MHK!C5 | =MHK!D5 | =(C5-D5)^2 | =(D5-$D$13)^2 | =(C5-$C$13)^2 |
| 6 | | | =MHK!C6 | =MHK!D6 | =(C6-D6)^2 | =(D6-$D$13)^2 | =(C6-$C$13)^2 |
| 7 | *Регрессионная стати* | | =MHK!C7 | =MHK!D7 | =(C7-D7)^2 | =(D7-$D$13)^2 | =(C7-$C$13)^2 |
| 8 | Множественный R | =B9^0,5 | =MHK!C8 | =MHK!D8 | =(C8-D8)^2 | =(D8-$D$13)^2 | =(C8-$C$13)^2 |
| 9 | R-квадрат | =1-C17/C18 | =MHK!C9 | =MHK!D9 | =(C9-D9)^2 | =(D9-$D$13)^2 | =(C9-$C$13)^2 |
| 10 | Нормированный R-квад | 0,824728155430 | =MHK!C10 | =MHK!D10 | =(C10-D10)^2 | =(D10-$D$13)^2 | =(C10-$C$13)^2 |
| 11 | Стандартная ошибка | =D17^0,5 | =MHK!C11 | =MHK!D11 | =(C11-D11)^2 | =(D11-$D$13)^2 | =(C11-$C$13)^2 |
| 12 | Наблюдения | 10 | =СУММ(C2:C11) | =СУММ(D2:D11) | =СУММ(E2:E11) | =СУММ(F2:F11) | =СУММ(G2:G11) |
| 13 | | | =C12/B12 | =D12/B12 | | | |
| 14 | Дисперсионный анализ | | y- | y^- | | | |
| 15 | | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *Значимость F* | |
| 16 | Регрессия | 2 | 9405,64180392004 | =C16/B16 | =D16/D17 | 0,0009353774748 | |
| 17 | Остаток | 7 | 1484,58319607996 | =C17/B17 | | | |
| 18 | Итого | 9 | =C16+C17 | =C18/B18 | =D18/D17 | | |
| 19 | | | | | | | |
| 20 | | *Коэффициенты* | *Стандартная ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* |
| 21 | Y-пересечение | 180,908131911114 | 56,3821395117639 | 3,208607078016 | 0,014886829880 | 47,585652841658 | 314,2306109806 |
| 22 | Переменная X 1 | -2129,707665585 | 769,596394408328 | -2,767304630140 | 0,027801827020 | -3949,5126618832 | -309,9026692881 |
| 23 | Переменная X 2 | 0,19099605234920 | 0,0534533063026028 | 3,573138231486 | 0,009058836350 | 0,0645991583605 | 0,317392946337 |
| 24 | | | s{bj} = (cjj*MS_Остаток)^( | B/s{bj} | =(B21-F21)/C25 | - | + |
| 25 | | | =(MHK!J7*$D$17)^0,5 | =B21/C25 | =C25*$E$24 | =B21-E25 | =B21+E25 |
| 26 | | | =(MHK!K8*$D$17)^0,5 | =B22/C26 | =C26*$E$24 | =B22-E26 | =B22+E26 |
| 27 | | | =(MHK!L9*$D$17)^0,5 | =B23/C27 | =C27*$E$24 | =B23-E27 | =B23+E27 |
| 28 | | | ошибка определения bj | t-критерий bj | const j | зоны надежности коэффициетов | |
| 29 | | | | | | | |

МНК | Excel

Формули розрахунків компоненту „Регрессия” наведені в позначеннях MS Excel

*Завдання з МНК в матричній формі*

За даними таблиці Л.1 визначити аналітичну залежність між незалежною змінною $x$ і залежною $y$ у виді емпіричної формули, що наведена в таблиці Л.2, та оцінити її адекватність за $F$-відношенням:

Таблиця Л.1 – **Варіанти завдання**

| 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 0 | 0 | 0 | –1,3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,15 | 2 |
| 1 | 2,750 | 0,1 | –0,13 | 0,1 | 0,713 | 0,7 | 1,205 | 0,30 | 0,4 |
| 2,5 | 9,175 | 0,2 | 0,58 | 0,2 | 1,043 | 1,4 | 1,707 | 0,45 | –16,9 |
| 5 | 7,255 | 0,3 | 0,98 | 0,4 | 1,196 | 2,1 | 2,023 | 0,60 | –16,2 |
| 7,5 | 6,170 | 0,4 | 1,11 | 0,6 | 1,131 | 2,8 | 2,254 | 0,75 | 13,2 |
| 10 | 7,593 | 0,5 | 1,03 | 0,8 | 1,040 | 3,5 | 2,429 | 0,90 | 47,1 |
| 12,5 | 6,760 | 0,6 | 0,83 | 1,0 | 0,976 | 4,2 | 2,563 | 1,05 | 51,4 |
| 15 | 7,022 | 0,7 | 0,57 | 1,2 | 0,946 | 4,9 | 2,665 | 1,20 | 18,3 |
| 17,5 | 7,050 | 0,8 | 0,32 | 1,4 | 0,950 | 5,6 | 2,744 | 1,35 | –21,5 |
| 20 | 6,952 | 0,9 | 0,13 | 1,6 | 0,982 | 6,3 | 2,804 | 1,50 | –27,3 |
| 22,5 | 7,023 | 1,0 | 0,04 | 1,8 | 1,038 | 7,0 | 2,850 | 1,65 | 11,8 |
| 25 | 6,994 | | | 2,0 | 1,113 | 7,7 | 2,885 | 1,80 | 63,7 |
| | | | | 2,2 | 1,205 | 8,4 | 2,912 | 1,95 | 81,2 |
| | | | | 2,4 | 1,311 | 9,1 | 2,932 | | |
| | | | | 2,6 | 1,427 | 9,8 | 2,948 | | |
| | | | | | | 10,5 | 2,960 | | |

Продовження таблиці Л.1

| 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 0 | 30,0 | 1,0 | 6,66 | 0,8 | 20,0 | 0,01 | 3,0 | 0 | –1,0 |
| 0,5 | 22,7 | 1,5 | 5,74 | 1,6 | 9,3 | 0,13 | –1,920 | 5,0 | 109,8 |
| 1 | 18,6 | 2,0 | 4,44 | 2,4 | –5,7 | 0,25 | 1,787 | 10,0 | 172,2 |
| 1,5 | 16,2 | 2,5 | 3,38 | 3,2 | –31,1 | 0,37 | –0,962 | 20,0 | 204,9 |
| 2 | 14,6 | 3,0 | 2,60 | 4,0 | –6,8 | 0,49 | 0,462 | 40,0 | 144,6 |
| 2,5 | 13,6 | 3,5 | 2,05 | 4,8 | 2,0 | 0,61 | –0,721 | 60,0 | 79,2 |
| 3 | 12,9 | 4,0 | 1,64 | 5,6 | 5,7 | 0,73 | 0,158 | 80,0 | 41,6 |
| 3,5 | 12,5 | 4,5 | 1,34 | 6,4 | 4,1 | 0,85 | 0,031 | 100,0 | 23,5 |
| 4 | 12,1 | 5,0 | 1,11 | 7,2 | –0,7 | 0,97 | 0,375 | 120,0 | 15,5 |
| 4,5 | 11,9 | 5,5 | 0,94 | 8,0 | –5,5 | 1,09 | 0,108 | 140,0 | 12,2 |
| 5 | 11,7 | 6,0 | 0,80 | 8,8 | –4,2 | 1,21 | –0,139 | 160,0 | 10,8 |
| 5,5 | 11,5 | 6,5 | 0,69 | | | 1,33 | –0,291 | 180,0 | 10,3 |
| | | | | | | 1,45 | –0,191 | 200,0 | 10,1 |
| | | | | | | 1,57 | 0,123 | | |
| | | | | | | 1,69 | 0,277 | | |
| | | | | | | 1,81 | 0,222 | | |

Таблиця Л.2 – **Емпіричні формули до завдання з МНК в матричній формі**

| Варіант | Емпірична формула |
|---|---|
| 1 | $\hat{y} = A + \ell^{-x/4}\left(B\cos x + C\sin x\right)$ |
| 2 | $\hat{y} = A + \ell^{-x}\left[B\sin x + C\ln\left(x + 0{,}1\right)\right]\cos 3x$ |
| 3 | $\hat{y} = Ax + B\ell^{-x} + Cx\ell^{-3x}$ |
| 4 | $\hat{y} = A + B\ell^{-\frac{1}{2}x} + C\ell^{-\frac{5}{2}x}$ |
| 5 | $\hat{y} = Ax + \ln x\left(B\sin x + C\cos x\right)$ |
| 6 | $\hat{y} = A + \dfrac{B}{x+1} + C\ell^{-x}$ |
| 7 | $\hat{y} = \dfrac{100x}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3}$ |
| 8 | $\hat{y} = \dfrac{100\cos x}{A + Bx + C\sin^2 x + D\cos^3 x}$ |
| 9 | $\hat{y} = \ell^{-x/3}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + C\cos x + D\sin x$ |
| 10 | $\hat{y} = A + B\ell^{-\frac{1}{20}x} + C\ell^{-\frac{1}{10}x} + D\ell^{-\frac{3}{20}x}$ |

*Примітка.* У формулах таблиці необхідно визначити значення коефіцієнтів $A$, $B$, $C$, $D$

ДОДАТОК М

## ПРОГРАМА АПРОКСИМАЦІЇ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ БУДЬ-ЯКИМ ВИДОМ ФУНКЦІЇ ЗА МНК

Побудова інтерфейсу користувача аналогічна апроксимації за способом Чебишева до слів “End Sub”. Далі діємо наступним чином:

– аналогічно об’єктам “TextBox” і “CommandButton” для вводу функції користувача потрібен ще об’єкт “ComboBox”, який необхідно помістити на форму і змінити для властивості (Name) значення ComboBox1 на ComboBox, як це показано на рисунку М.1;

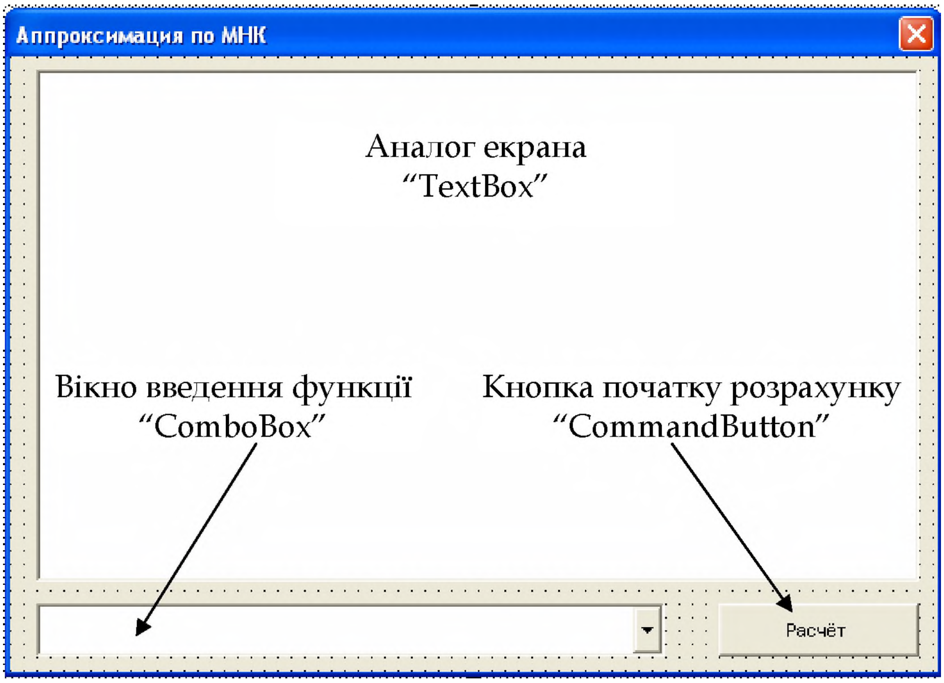



Рисунок М.1 – **Вигляд інтерфейсу користувача програми**

– замість слів “End Sub” вставляємо текст програми, що наведений нижче;

– на початку[31] програми вставляємо наступні рядки:

```
Dim F() As Double, yF() As Double, Cii() As Double, RO() As Double
Dim FF(), FlagR(), fizPoslR(), DYErr(), DXErr()
Dim Prn As String
Dim pFlagR, PozR, ExtrimExit, Enter
Dim CodP, FlagDY, flDX, flDY, dt, KFdx, MinZap, MaxZap
```

– підготовка файлу, наприклад в Microsoft® Блокнот, з даними для розрахунку наступної структури:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | – кількість факторів |
| 21 | | – кількість експериментальних даних |
| 0 | 0.0196 | – незалежні $x_i$ і залежна $y_i$ змінні кожного з 21 дослідів |

[31] Перед рядком: Private Sub CommandButton1_Click(). Цей рядок буде написаний в тексті програми, якщо виділити кнопку “Расчет” \ правою кнопкою миші “Properties” \ у вікні властивостей об′єкту CommandButton1 “Properties – CommandButton1” \ користувачем не змінено значення властивості (Name): CommandButton1 на іншу назву.

| | | |
|---|---|---|
| 0.05 | 0.0258 | (це коментарі, тому їх в файл не заносити) |
| 0.1 | 0.0672 | |
| 0.15 | 0.164 | |
| 0.2 | 0.3053 | |
| 0.25 | 0.4582 | |
| 0.3 | 0.5941 | |
| 0.35 | 0.7015 | |
| 0.4 | 0.7815 | |
| 0.45 | 0.8396 | |
| 0.5 | 0.8817 | |
| 0.55 | 0.9123 | |
| 0.6 | 0.9349 | |
| 0.65 | 0.9517 | |
| 0.7 | 0.9645 | |
| 0.75 | 0.9743 | |
| 0.8 | 0.982 | |
| 0.85 | 0.9881 | |
| 0.9 | 0.9929 | |
| 0.95 | 0.9968 | |
| 1 | 1 | |

Підготовлений файл зберегти в корені диска С з ім′ям “МНК.txt”;

– зробити активною форму меню “View” \ Object і вибрати для запуску програми в меню “Run” \ Run Sub/UserForm або F5.

Допомога у роботі з програмою наведена в самому її коді.

*Рекомендації*, щодо складання функції користувача.

При складанні виду функції невідомі коефіцієнти позначаються символом 'a'. Фактори і вихідна змінна позначаються відповідно символами 'xi' і 'y', де і – номер фактора, якщо задача багатофакторна. Є можливість використовувати наступні функції: sin(), cos(), tg(), ln(), lg(), exp(), степеневу '^', а також операцію типу дужки () з укладанням не більше 10. Допустимі наступні арифметичні операції '+, -, *, /'. Також під час моделювання виникають випадки визначення коефіцієнтів таких многочленів: a(x-x1)+a(x-x2)^2+..., де x1, x2... – відповідні значення факторів у дослідах 1, 2, ... . В цих випадках такі складові моделі позначаються 'xi[const]', де і – номер фактора, const – номер досліду, значення фактора в якому необхідно зафіксувати. Це відноситься і до вихідної змінної, однак часто втрачається фізичний зміст.

При моделюванні динамічних систем застосовуються складові моделі: 'xi[t-j]', 'y[t-l]', де x, y – відповідно значення факторів і вихідної змінної за j і l кроків до відповідного поточного значення на момент часу t, де l = 1, 2 ,... , r – порядок динамічної моделі за якою можливо отримати лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами також r-порядку. Також можна отримувати коефіцієнти будь-яких ДР, лінійних за параметрами, використовуючи функції y’, y’’.

Для розрахунку приросту використовують залежності: ΔXi,j = Xi,j – Xi,1; ΔYj = Yj – Y1, де і – номер змінної, j – номер експерименту.

Пропускаючи в правій частині символи 'a' розраховуються значення функції уведеної користувачем для всіх точок плану (в лівій і правій частинах відносно '=').

Наведемо приклади запису видів функцій для знаходження коефіцієнтів моделей за МНК для прикладів у виді таблиці.

| Приклад | Формула | Запис у програмі |
|---|---|---|
| 3.12 | 3.82 | y=a+a*x+a*x^2+a*x^3[32] |
| 3.14 | таблиця 3.31, формула 7 | x/y=a+ax |
| 3.15 | таблиця 3.31, формула 3 | 1/y=a+ax |
| 3.16 | 3.150 | y=a+a/x1+ax2^2 |
| 3.18 | 3.200 | y=ay[t-1]+ay[t-2] |
| 3.18 | 3.201 | y=ay'+ay'' |
| 3.18 | 3.205 | y=aexp(-0.211062x)cos(0.3074084x)+ aexp(-0.211062x)sin(0.3074084x) |
| 3.19 | 3.210 | y=ay''+ay'+a+ax+ax^2+ax^3 чи y[t-1]=a(y[t]-2y[t-1]+y[t-2])/0.05^2+ a(y[t]-y[t-2])/(2*0.05)+a+ax[t-1]+ax[t-1]^2+ax[t-1]^3 |
| 3.19 | 3.223 | y-(-0.277611+4.212229x-4.721838x^2+1.786171x^3)= aexp(-6.587875x)cos(12.40799x)+ aexp(-6.587875x)sin(12.40799x) |
| 3.20 | 3.242 | (yy''-2y'^2)=ay^2+ayy' |
| 3.20 | 3.248 | 1/y=aexp(-0.5905684x)+aexp((0.98611794-0.5905684)x) |

[32] Знак множення (*) можна не писати.

```
'**********************************************************
'****** Аппроксимация любым видом функции по МНК ********
'**********************************************************
Fun$ = ComboBox.Text       'ввод функции
'+++ Dan = "имя текстового поля" & " " 'ввод данных эксперимента
Enter = Chr(13) + Chr(10)    'аналог клавиши enter
ExtrimExit = 0               'экстремальный выход

ComStr$ = "" 'Command$    'командная строка
ComStr$ = LCase$(ComStr$) 'заменим все символы на строчные

'------ Установки всех возможных флагов по умолчанию ------
CodDM = 0    '0-точное составление модели;  1-"/d" (иногда)
CodP = 0     'модель: 0-в натур. значениях; 1-"/p " в приращениях
FlagDY = 1   'метода расчета для ДУ: 1 - Super; 0-"/dm" DM
Adt = 0      'возможно интервал дискретизации (если
'пользователь не ошибется)
flDX = 0     'флаг позволяющий отключать процедуру DX
'----------------------------------------------------------------------
If ComStr$ = "/?" Then                  'помощь
  Call SHelp: Exit Sub
ElseIf ComStr$ = "/keys" Then           'список ключей
  Call SKeys: Exit Sub
ElseIf ComStr$ = "/errors" Then         'коды ошибок
  Call SErrors: Exit Sub
ElseIf ComStr$ = "/dy" Then             'help по диф. уравнениям
  Call HelpDY: Exit Sub
End If
'+++ Dim False As String, True As String   'значения истина/ложь
'+++ False = "False": True = "True"         'присвоим им их значения
'распознавание командной строки
Call ProcessingComStr(ComStr$, fl, CodDM, Adt)
If fl = 1 Then Call Help 'если в командной строке неизвестно что
If ExtrimExit = 1 Then Exit Sub

'+++ On Error GoTo 10
Open "c:\МНК.txt" For Input As #1

'+++ Line Input #1, Fun$   'ввод функции из файла
```

```
Input #1, k              'количество факторов
Input #1, n              'количество опытов
'ввод экспериментальных данных из текстового поля
'+++ ReDim Plan(1, 1), y(1)
'+++ Call DatInput(Dan, k, n, Plan, y, 0) 'узнаем k и n

'---------------------------------------------------------------------------
'Более точно является возможным определение коэффициентов
'динамических моделей за счет более рационального
'сформирования матрицы F.                                        [1]
'---------------------------------------------------------------------------

'---------------------------------------------------------------------------
'Программой определяются по МНК коэффициенты ДУ до 2-го
'порядка включительно. Реализация в процедуре DY                 [2]
flDY = 0 'флаг, сигнализирующий о том, что пользователь задал ДУ
            '(определяется автоматически) 0-нет; 1-задал
ReDim DYErr(4, 33) 'массив, который позволит вычислить
'позицию ошибки на виде диф. уравнения заданного
'пользователем (а не на исправленом процед-й DY)
'---------------------------------------------------------------------------

'---------------------------------------------------------------------------
'Считаем план и вых. переменную здесь, ибо для осуществления
'замысла [2] нужен интервал дискретизации определить до начала
'распознавания формулы, ибо подпрограмма DY еще вносит свои
'коррективы до начала распознавания
ReDim Plan(n, k)       'план эксперимента
ReDim y(n)             'выходная переменная

For i = 1 To n
  For j = 1 To k
    Input #1, Plan(i, j)
  Next j
  Input #1, y(i)
Next i
Close #1
'+++ Call DatInput(Dan, k, n, Plan, y, 1) 'распознавание текстовой
'переменной с данными
```

```
dt = Plan(2, 1) - Plan(1, 1)     'интервал дискретизации (шаг по времени)
'+++ dt = 0.01 'мин, если динамика по времени, то снять
'комметарий и указать значение
If Adt <> 0 Then dt = Adt      'Adt-аналог dt, введенный пользователем
'--------------------------------------------------------------------------
'При составлении ДУ факт (i-1)-й точки важен не только для
'выходной переменной, а и для всех факторов. Т.е. если
'пользователь в виде ф-ции указывает x, то для правильного
'расчета коэффициентов ДУ система его должна воспринять как
'x[t-1]. Реализации в DX.                                    [3]
KFdx = k                        'KFdx-в дальнейшем не используется
ReDim DXErr(4, 33)              'аналогично DYErr
'flDX = 0 флаг позволяющий: 0-выполнять задачу [3]; 1-не
'выполнять (по факторам текущая остается i-я точка)!
'--------------------------------------------------------------------------

'Распознавание и формирование собственно массива
'последовательности вычислений
'\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/
'Идея распознания функции состоит в том, что функцию
'введенную пользователем я сперва перевожу в определенный
'формат, который далее очень просто использовать для расчетов
ReDim FF(7, 150)     'Формат Функции используемый для
'множественных вычислений (не непосредственно)

'1-Знак Числа (1'+';2'-';3'*';4'/';5'^'), т.е. операция
'2-Функция (1-sin(x); 2-cos(x); 3-tg(x); 4-ln(x); 5-lg(x); 6-exp(x)): указывается напротив Открытой скобки ИЛИ Степень: указывается напротив
'адреса переменной константы или Закрытой скобки (по умолчанию 1)
'3-Адрес переменной (Xi) или сама Константа
'4-Флаг: константы 1, переменной 2 {Xi}, переменной при t=const 3 {Xi[const]}, выходная переменная y: 4 {y[t{-i}]} и 5 при t=const {y[const]}
'5-Сдвиг y[t] 0,y[t-i] -{+}i, y[const] const; Xi[t], Xi[t-i], Xi[const] [запаздывания {сдвиг} обозначаются в квадратных скобках]
'6-Скобки (1   1) (1 (2   2)   1)
'7-коэффициент
'Пример y y` запаздывания по аргументам функция от аргументов
'(x1+x2)/y[t]=A+A*y[t-1]+A*X1+A*X2+A*X1[1]/X2[t-2]-A*(X1^3+7*X1*X2/X3^ln(X1)^2)+A*(-8)^2*y[t-1]*y[1]^4*(X3[t-3]-tg(-y[t-4]))^9
```

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| '1 | | | 1 | | 4 | = | 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | | | 1 | 3 | 2 | | 3 | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | | |
| '2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | 0 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | | 0 | 1 | 2 | 1 | 4 | 0 | 1 | 3 | 1 | 1 | 9 |
| '3 | ‖ | 1 | 2 | ‖ | 0 | = | | | 0 | | 1 | | 2 | | 1 | 2 | | ‖ | 1 | 7 | 1 | 2 | 3 | ‖ | 1 | ‖ | ‖ | | ‖ | 8 | ‖ | 0 | 0 | ‖ | 3 | ‖ | 0 | ‖ | ‖ |
| '4 | ‖ | 2 | 2 | ‖ | 4 | = | | | 4 | | 2 | | 2 | | 3 | 2 | | ‖ | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | | 2 | | ‖ | | ‖ | 1 | ‖ | 4 | 5 | ‖ | 2 | | 4 | | ‖ |
| '5 | ‖ | 0 | 0 | ‖ | 0 | = | | | –1 | | 0 | | | | 1 | –2 | | ‖ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ‖ | 0 | ‖ | ‖ | | ‖ | 0 | ‖ | –1 | 1 | ‖ | –3 | ‖ | –4 | ‖ | ‖ |
| '6 | 1 | | | 1 | | = | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | 2 | | 2 | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 | | 2 | | 2 | 1 |
| '7 | | | | | | = | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

```
pFlagR = 0: PozR = 0'физическое присутствие '='; его позиция в FF
'определим максимальную и минимальную величину сдвига при
'построении динамических моделей (для усовершенствования
'матрицы F)
MinZap = 0: MaxZap = 0     'в этом новизна для получения более
'точных динамических моделей
Call FormatFF(Fun$, kF, kB, k, n)
If ExtrimExit = 1 Then Screen.Text = Prn: Close #1: Exit Sub
```

```
    If CodDM = 1 Then
'--------------------------------------------------------------------------
 MinZap = 0: MaxZap = 0   'способ заполнения r первых строк
'матрицы F нулями, что по теории построения динамических
'моделей - не правильно. Но бывает имеет смысл возратится к
'этому варианту
'--------------------------------------------------------------------------
End If

'kF-количество коэффициентов;
'kB-количество байтов составляющих функцию
ReDim IntFactor(-1 To kF, 3) 'интервалы в FF, в которых находяться
'все коэффициенты 1-начало; 2-конец; 3-длина ('-1'-выходная
'переменная)
ReDim FlagR(kB) 'флаг расчета: 0-нет; 1-да (используется для
'формирования fizPoslR)
'вычислим интервалы коэффициентов
Call IntFactors(IntFactor(), kF, kB, MaxLInt)
ReDim fizPoslR(-1 To kF, MaxLInt + 1, 6)  'массив физической
'последовательности расчетов каждого коэффициента:
'0-количество операций; 1-оперция; 2,3-между какими
'составляющими в FF; 4,5-интервалы скобок для операции скобки
'6. 6-учет знака минус в конструкциях типа -(-(-xi)) или -(-xi+xj)
Call PoiskScoboc(IntFactor(), kF, kB) 'поиск интервалов скобок...
'окончательное формирование массива fizPoslR
Call OpInFactors(IntFactor(), kF, kB)
ReDim RO(kB) As Double 'рабочая область в кот. происходят расчеты
'/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/

'Метод наименьших квадратов ------------------------------------
'матрица плана эксперимента обобщенная видом модели
ReDim F(n, kF + 1) As Double
'выходная переменная, обобщенная функцией
ReDim yF(n) As Double
'диагональные элементы ковариационной матрицы
```

```
ReDim Cii(kF + 1) As Double
'рассчитаем F() и yF()
Call AccountRO(n, Plan(), y(), IntFactor(), kF, kB)

If kF = 0 Then 'если нет коэффициентов то расчет по МНК не
'проводим, а вычисляем просто значения функции в заданных точках
 If pFlagR = 1 And PozR > 1 Then
  ReDim lDat(2)       'массив длин
  Call NFormat(j, 2, Str(yF(1)), lDat, s, 0) 'обнуление массива длин
  ReDim KT(n, 2)     'временный массив для хранения данных,
  'которые выводятся на печать
  For i = 1 To n 'подготовка к печати
   KT(i, 1) = Str(yF(i))
   KT(i, 2) = Str(F(i, 0))
   'подсчет максимальных длин:
   Call NFormat(1, 2, KT(i, 1), lDat, s, 1)  'столбца 1
   Call NFormat(2, 2, KT(i, 2), lDat, s, 1)  'столбца 2
  Next
  Call NFormat(1, 2, "y", lDat, s1, 2)          'создание шапки
  Call NFormat(2, 2, "f(x)", lDat, s2, 2)
  Prn = Prn + s1 + "  " + s2 + Enter 'аналог Prn = Prn + "    y        f(x)" + Enter
  For i = 1 To n
   'выравнивание чисел
   Call NFormat(1, 2, KT(i, 1), lDat, s1, 2)'результат в s1
   Call NFormat(2, 2, KT(i, 2), lDat, s2, 2)'-//- в s2
   Prn = Prn + s1
   Prn = Prn + "  " + s2 + Enter
  Next
 Else
  Prn = Prn + "   f(x) " + Enter
  For i = 1 To n
   Prn = Prn + Str(F(i, 0)) + Enter
  Next i
 End If
 Screen.Text = Prn
 Exit Sub
```

```
End If
If FF(7, PozR + 1) = 0 Then  'свободный член есть
  kF = kF + 1              'тогда на один коэффициент определим больше
  For i = 1 To n           'необходимо чтобы он числился под номером 1
    For j = kF To 1 Step -1
      F(i, j) = F(i, j - 1)
  Next j, i
End If
ReDim b(kF) As Double       'коэффициенты модели

Call MNK(F(), yF(), kF, n, b())

Prn = Prn + "Коэффициенты модели и критерий Стьюдента tp" + Enter
ReDim lDat(2)
Call NFormat(j, 2, Str(b(1)), lDat, s, 0)  'обнуление длин
ReDim KT(kF, 2)       'массив с текущими данными
For i = 1 To kF           'подготовка к печати
  KT(i, 1) = Str(b(i))
  KT(i, 2) = Str(Abs(b(i) / Sqr(Cii(i))))
  'расчеты максимальных длин
  Call NFormat(1, 2, KT(i, 1), lDat, s, 1) 'столбца 1
  Call NFormat(2, 2, KT(i, 2), lDat, s, 1) '-//- 2
Next

For i = 1 To kF
  'преобразование в строку s одинаковой длины
  Call NFormat(1, 2, KT(i, 1), lDat, s, 2)
  Prn = Prn + "A" + Str(i) + " = ": Prn = Prn + s
  Call NFormat(2, 2, KT(i, 2), lDat, s, 2) 'преобразование в s
  Prn = Prn + "       " + (s) + Enter
Next

Prn = Prn + Enter
'В случае диф. уравнения вывести интервал дискретизации
If flDY = 1 Then Prn = Prn + "Интервал дискретизации " + Str(dt) +
Enter: Prn = Prn + Enter Else Prn = Prn + Enter
```

```
'Оценка точности формулы
Prn = Prn + "    Оценка точности формулы" + Enter

nZ = MinZap – MazZap        'на столько опытов уменьшилось число
'степеней свободы
Min = Abs(MinZap) + 1: Max = n - MaxZap
yo = 0
For i = Min To Max
  yo = yo + yF(i)                'сумма значений y
Next i
yo = yo / (n + nZ)               'среднее значение y

ReDim lDat(4)       ' массива длин
Call NFormat(j, 4, Str(b(1)), lDat, s, 0)       'обнуление массива длин
ReDim KT(Max, 4)       'значения данных, которые будут выведены на печать
For i = Min To Max   'подготовка к печати
  KT(i, 1) = Str(i)
  KT(i, 2) = Str(yF(i))
  ym = 0                   'выход по модели
  For j = 1 To kF
    ym = ym + b(j) * F(i, j)
  Next
  KT(i, 3) = Str(ym)
  KT(i, 4) = Str(yF(i) - ym)
  Call NFormat(1, 4, KT(i, 1), lDat, s, 1) 'расчет максимальных длин
  Call NFormat(2, 4, KT(i, 2), lDat, s, 1)
  Call NFormat(3, 4, KT(i, 3), lDat, s, 1)
  Call NFormat(4, 4, KT(i, 4), lDat, s, 1)
Next

'создание шапки
Prn = Prn + "+" 'аналог Prn = Prn + "+--------------------------------+" + Enter
'создание - нужной длины для:
Call NFormat(1, 4, "", lDat, s1, 3)  'столбца 1
Call NFormat(2, 4, "", lDat, s2, 3)  '2
```

```
   Call NFormat(3, 4, "", lDat, s3, 3)  '3
Call NFormat(4, 4, "", lDat, s4, 3)  '4
Prn = Prn +s1 + "---" + s2 + "---" + s3 + "---" + s4 + "--+" + Enter
Prn = Prn + "¦ " 'аналог Prn = Prn + "¦ i ¦  Yэ  ¦  Yм  ¦ Yэ-Yм ¦" + Enter
Call NFormat(1, 4, "i", lDat, s1, 2)  'слова нужной длины
Call NFormat(2, 4, "Yэ", lDat, s2, 2)
Call NFormat(3, 4, "Yм", lDat, s3, 2)
Call NFormat(4, 4, "Yэ-Yм", lDat, s4, 2)
Prn = Prn +s1 + " ¦ " + s2 + " ¦ " + s3 + " ¦ " + s4 + " ¦" + Enter
Prn = Prn + "¦-" 'аналог Prn = Prn + "¦-----+--------+--------+---------¦" + Enter
Call NFormat(1, 4, "", lDat, s1, 3)   'создание -
Call NFormat(2, 4, "", lDat, s2, 3)
Call NFormat(3, 4, "", lDat, s3, 3)
Call NFormat(4, 4, "", lDat, s4, 3)
Prn = Prn +s1 + "-+-" + s2 + "-+-" + s3 + "-+-" + s4 + "-¦" + Enter

For i = Min To Max    'печать данных
  Call NFormat(1, 4, KT(i, 1), lDat, s1, 2)
  Call NFormat(2, 4, KT(i, 2), lDat, s2, 2)
  Call NFormat(3, 4, KT(i, 3), lDat, s3, 2)
  Call NFormat(4, 4, KT(i, 4), lDat, s4, 2)
  Prn = Prn + "¦ " + s1 + " ¦ " + s2 + " ¦ " + s3 + " ¦ " + s4 + " ¦ " + Enter
  sOct = sOct + (Val(KT(i, 3)) - yF(i)) ^ 2
  sy = sy + (yF(i) - yo) ^ 2
Next

'окончание шапки
Prn = Prn + "-" 'аналог Prn = Prn + "--------------------------------" + Enter
Call NFormat(1, 4, "", lDat, s1, 3)  'из черточек
Call NFormat(2, 4, "", lDat, s2, 3)
Call NFormat(3, 4, "", lDat, s3, 3)
Call NFormat(4, 4, "", lDat, s4, 3)
Prn = Prn + s1 + "---" + s2 + "---" + s3 + "---" + s4 + "---" + Enter

Prn = Prn + "Среднеквадратичное отклонение =" + Str(sOct) + Enter
Prn = Prn + Enter
```

```
sy = sy / (n + nZ - 1)            'дисперсия S2y
If (n - kF) <> 0 Then
  sOct = sOct / (n + nZ - kF)  'остаточная дисперсия
  Fp = sy / sOct
  Prn = Prn + "Критерий Фишера F =" + Str(Fp) + Enter
End If

'10:              'предвиденные ошибки ввода-вывода
'If Err = 53 Then
'  Call Help: Exit Sub
'End If
Screen.Text = Prn
End Sub


Sub AccountRO(n, Plan(), y(), IntFactor(), kF, kB)
'физическое осуществление вычислений
'процедура осуществления расчета (кстати результат будет в PO)
Dim Left As Integer, pRight As Integer, Fun As Integer
Dim Steps As Double

For iO = 1 To n          'вычислим значения функций во всех строчках
'матрицы плана

'iO - порядковый номер опыта (для записи результат в массив F)
'вычислим текущую PO
Call FormatRO(iO, n, Plan(), y(), IntFactor(), kF, kB)

For i = -1 To kF
  If IntFactor(i, 3) > 0 Then   'если интервал коэффициента не нулевой
    For j = 1 To fizPoslR(i, 0, 0)
      Left = fizPoslR(i, j, 2)    'слагаемое слева  // но в массиве
     pRight = fizPoslR(i, j, 3) 'слагаемое справа
```

```
'------------------------------------------------------------------------
'         Физическое осуществление арифметических операций
'------------------------------------------------------------------------
   Select Case fizPoslR(i, j, 1)
    Case 1                          ':::::: + ::::::
     If fizPoslR(i, j, 6) = 1 Then
      RO(pRight) = RO(pRight) * (-1)
     End If
     RO(pRight) = RO(pRight) + RO(Left)
    Case 2                          ':::::: - ::::::
     If fizPoslR(i, j, 6) = 1 Then
      RO(pRight) = RO(pRight) * (-1)
     End If
     RO(pRight) = RO(pRight) - RO(Left)
    Case 3                          '...... * ......
     RO(pRight) = RO(pRight) * RO(Left)
    Case 4                          '...... / ......
     RO(pRight) = RO(pRight) / RO(Left)
    Case 5                          ',,,,,,, ^ ,,,,,,,
     RO(pRight) = RO(pRight) ^ RO(Left)
    Case 6                          '___ () ___
     If fizPoslR(i, j, 6) = 1 Then
      RO(Left) = RO(Left) * (-1)
     End If
     RO(pRight) = RO(Left)
     'Известные функции ``````````````````
     Fun = FF(2, fizPoslR(i, j, 4)) 'функция
      If Fun > 0 Then
       Select Case Fun
        Case 1                      'sin(x)
         RO(pRight) = Sin(RO(pRight))
        Case 2                      'cos(x)
         RO(pRight) = Cos(RO(pRight))
        Case 3                      ' tg(x)
         RO(pRight) = Tan(RO(pRight))
```

```
          Case 4                        ' ln(x)
           RO(pRight) = Log(RO(pRight))
          Case 5                        ' lg(x)
           RO(pRight) = Log(RO(pRight)) / Log(10)
          Case 6                        'exp(x)
           RO(pRight) = Exp(RO(pRight))
         End Select
        End If
       '``````````````````````````````````
       Steps = FF(2, fizPoslR(i, j, 5))'степень
       If Steps <> 1 And RO(pRight) <> 0 Then RO(pRight) = RO(pRight) ^ Steps
      Case 7                            'операция типа 7
       If FF(1, fizPoslR(i, 1, 4)) = 2 Then     'если операция '-'
        RO(fizPoslR(i, 1, 4)) = RO(fizPoslR(i, 1, 4)) * (-1)
       End If
     End Select
    Next j
    If fizPoslR(i, fizPoslR(i, 0, 0) + 1, 6) = 1 Then
     RO(fizPoslR(i, fizPoslR(i, 0, 0), 3)) = RO(fizPoslR(i, fizPoslR(i, 0, 0), 3)) * (-1)
    End If
'----------------------------------------------------------------------
 End If
Next i

'запишем результат вычисления элементарных функций в F
For i = 0 To kF
 If IntFactor(i, 3) > 0 Then
  F(iO, i) = RO(IntFactor(i, 1))
 End If
Next i
'если выходная переменная присутствует
If pFlagR = 1 And PozR > 1 Then yF(iO) = RO(1) Else yF(iO) = y(iO)
Next iO

Call Priraschenie(IntFactor(), kF)
End Sub
```

```
Sub CheckOnNumber(s$, i, Namber, l)
'процедура правильности записи числа с точкой и степенью
'i - это позиция первой цифры числа
Call Find(s$, i, pozN, False, 0)
'если за цифрами идет точка '.'
If Shifrs$(Mid$(s$, pozN, 1), 6) = True Then
  Call Find(s$, pozN + 1, pozN, False, 0)     'ищу дальше цифры
  If Shifrs$(Mid$(s$, pozN, 1), 10) = True Then 'если за ними символ E
   j = pozN + 2                                '* их позиция
   'тогда за ним должны быть знаки +-
   If Shifrs$(Mid$(s$, pozN + 1, 1), 5) = True Then
     Call Find(s$, j, pozN, False, 0)  '* ищем цифры
     l = pozN - j                      '** сколько цифр (важно чтобы
     'цифрами не заканчивалась переменная! {допустим пробелом})
     If l > 2 Or l <= 0 Then Call Mistakes(12, j)
     l = pozN - i                      '*** натуральная длина числа
    Else  'или ничего (т.е. просто байты степени)
     Call Find(s$, j - 1, pozN, False, 0) '* (j-1 т.к.+{-} нет)
     l = pozN - j + 1                  '**
     If l > 2 Or l <= 0 Then Call Mistakes(12, j - 1)
     l = pozN - i                      '***
   End If
  Else  'если нет символа E то значит число отыскано
   l = pozN - i                                'его длина
  End If
  Namber = Val(Mid$(s$, i, l))
'иначе если за цифрами 'E'
 ElseIf Shifrs$(Mid$(s$, pozN, 1), 10) = True Then
   j = pozN + 2                                '* позиция цифр
   'тогда за ним должны быть знаки +-
   If Shifrs$(Mid$(s$, pozN + 1, 1), 5) = True Then
     Call Find(s$, j, pozN, False, 0)  '* ищем цифры
     l = pozN - j                      '** сколько цифр (важно чтобы
     'цифрами не заканчивалась переменная! {допустим пробелом})
     If l > 2 Or l <= 0 Then Call Mistakes(12, j)
```

```
     l = pozN - i                             '*** натуральная длина числа
    Else  'или ничего (т.е. просто байты степени)
     Call Find(s$, j - 1, pozN, False, 0) '* (j-1 т.к.+{-} нет)
     l = pozN - j + 1                         '**
     If l > 2 Or l <= 0 Then Call Mistakes(12, j - 1)
     l = pozN - i                             '***
   End If
  Namber = Val(Mid$(s$, i, l))
 Else
  l = pozN - i                   'его длина
  Namber = Val(Mid$(s$, i, l))
End If
If Shifrs$(Mid$(s$, i + l, 1), 11) = True Then Call Mistakes(13, i + l)
End Sub

Sub DelSpace(s$, n)
'процедура удаления лишних пробелов
'но надо иметь ввиду следующее, поскольку знак умножения
'используется по умолчанию, то пробел может интерпретироваться
'как * в случае, когда он стоит между двумя константами (2*2=2
'2=4, но <> 22), поэтому его убирать нельзя (равносильно оставить
'или заменить на *)
's$ - обрабатываемая переменная
'n  - ее размер в байтах
s$ = LTrim$(RTrim$(s$))      'функция без лидирующих пробелов
s$ = LCase$(s$)              'заменим все символы на строчные
n = Len(s$)                  'длина функции в байтах изменилась
If s$ = "" Then Prn = "функция не задана!": ExtrimExit = 1: Exit Sub
i = 1    'позиция   нп найденного пробела
Do
  Call Find(s$, i, i, True, 3)   'ищем пробелы
  If i < n Then                  'если найденна позиция пробела
   'если от пробела слева и справа число, то этот пробел не удаляем
   'иначе удаляем
   If Shifrs$(Mid$(s$, i - 1, 1), 1) = False Or Shifrs$(Mid$(s$, i + 1, 1), 1) = False Then
    s1$ = Mid$(s$, 1, i - 1)   'функция до пробела
```

```
    s2$ = Mid$(s$, i + 1)       'функция после пробела
    s$ = s1$ + s2$              'итак функция без пробела
    i = i - 1     'на одну позицию отходим т.к. на 1 байт меньше
    n = n - 1     'на 1 байт меньше
   End If
  End If
  i = i + 1
Loop Until i >= n

Prn = "Вид функции:" + Enter 'сама печать функции в DY
s$ = s$ + "!": n = n + 1        'символ окончания ввода функции
Call DY(s$, n)                  'вдруг задано диф. уравнение [2]
End Sub

Sub DelStroke(s$, Poz, l, n, kr$)
'замена y{'} на их к-р аналог
'она удаляет производные y", y' и y ну и любые другие (если надо)
'и заменяет производные нужными конечными разностями (КР).
'Здесь s$-функция; Poz-позиция первого заменяемого байта; l-их
'количество; n-длина s$; kr$-замена (КР)

'если s$ не начинается на y{'} и не заканчивается "'"
If Poz > 1 And Poz < n Then
  s1$ = Mid$(s$, 1, Poz - 1)  'слева от Poz
  s2$ = Mid$(s$, Poz + l)     'справа
  s$ = s1$ + kr$ + s2$        'физическая замена
 ElseIf Poz = 1 Then
  s2$ = Mid$(s$, Poz + l)     'справа
  s$ = s1$ + kr$ + s2$        'физическая замена
End If
End Sub

Sub DX(s$, n)
'она изменяет все x на x[t-1], а также в конструкциях типа x[t-
'const], y[t-const] константу const на const - 1, т.е. реализующая [3]
```

```
'отмена выполнения этой процедуры по желанию пользователя
If flDX = 1 Then Exit Sub
ReDim datDX(4, 33) 'массив, хранящий информацию для
'предстоящих замен, где 1-фактор (0), выходная переменная (1); 2-
'номер фактора; 3-запаздывание, которое должно быть; 4-вид
'конструкции: 1 или 2

'---------------------- То что нужно заменять ----------------------
'  при k=1 x[t], x1[t], x1, x, а при k>1 xi[t] и xi; а также y[t-{+}const]
'--------------------------------------------------------------------------
'В массив для обнаружения ошибок внесем данные о ДУ заданном
'пользователем 1,2 а также некоторые данные, которые помогут в
'дальнейшем при замене
i = 0: j = 0
Do
 i = i + 1
 bf$ = Mid$(s$, i, 1)  'рассматриваемый текущий байт функции
 Select Case bf$
  Case "x"
   'если x не есть составляющим название функции exp
   If i > 1 And Mid$(s$, i - 1, 3) <> "exp" Then
    j = j + 1               'текущий номер подобной конструкции
    DXErr(1, j) = i     'позиция x
    datDX(1, j) = 0     'флаг фактора
    datDX(2, j) = NamberX(s$, i, KFdx)      'номер фактора
    Call xyCkobki(s$, i, Zapazd, CodFs)

    '1. Если номер i фактора X: i > k и k > 1
    '    например, if k=1, то i это уже const, так x2 трактуется как x*2
    '2. i > k и конструкция типа [t+{-}const] (i определяется только для x)
    '3. i > k и конструкции типа xi[t]
    If datDX(2, j) > KFdx Then
     If KFdx > 1 Or CodFs = 2 Or CodFs = 4 Then
      Call Mistakes(18, DXErr(1, j) + 1)
     End If
    End If
```

```
    datDX(3, j) = Zapazd - 1 'запаздывание увеличится на 1
    datDX(4, j) = CodFs       'вид конструкции
    DXErr(2, j) = i - DXErr(1, j) + 1 'длина конструкции
   End If
  Case "y"
   nBeg = i                   'начало позиции
   Call xyCkobki(s$, i, Zapazd, CodFs)
   If CodFs = 2 Then  'интересует только конструкция y[t-{+}const]
    j = j + 1
    DXErr(1, j) = nBeg        'позиция y
    DXErr(2, j) = i - DXErr(1, j) + 1 'длина конструкции
    datDX(1, j) = 1           'флаг выходной переменной
    datDX(3, j) = Zapazd - 1 'запаздавание
    'вид конструкции всегда 2, номера фактора не надо!
   End If
 End Select
Loop Until i > n
DXErr(0, 0) = j 'количество замен, кот. необходимо осуществить
DXErr(1, j + 1) = Len(s$) + 1          'вся длина оригинала функции

'здесь будем хранить нужный для ДУ вид ф-ции
Fun$ = Mid$(s$, 1, DXErr(1, 1) - 1)

'Сделаем физическую замену, по кот. расч. коэффициенты
'заданного ДУ в дальнейшем
For i = 1 To DXErr(0, 0)
 If datDX(1, i) = 0 Then       'если заменяем фактор
   s1$ = "x"
   'запишем его номер
   If KFdx > 1 Then s1$ = s1$ + LTrim$(Str$(datDX(2, i)))
  Else
   s1$ = "y"                'иначе заменяем ВП
 End If
 If datDX(3, i) > 0 Then s1$ = s1$ + "[t+" Else s1$ = s1$ + "[t-"
 s1$ = s1$ + LTrim$(Str$(Abs(datDX(3, i)))) + "]"
```

```
  'если при k=1 пользователь укажет ax2, то без следующей строки  из
  'функции заданной пользователем, пропадет двойка, что не допустимо.
  If datDX(1, i) = 0 And KFdx = 1 And Abs(datDX(2, i)) <> 1 And datDX(4, i) = 1 Then
  'если заменяем конструкцию для фактора and k=1 и считанное
  'число, как номер фактора, отлично от 1
    s1$ = s1$ + LTrim$(Str$(datDX(2, i)))
  End If

  DXErr(4, i) = Len(s1$)        'занимаемое заменой количество байт
  nFun = Len(Fun$)              'текущая длина ф-ции, она же номер байта
  DXErr(3, i) = nFun + 1        '   с кот. началась вставка, запомним ее
  Fun$ = Fun$ + s1$             'вставим замену
  l = DXErr(1, i) + DXErr(2, i)  'позиция, с которой надо взять
  'данные, расположенные за текущим куском, кот. надо удалить
  dl = DXErr(1, i + 1) - 1       'длина этого куска
  Fun$ = Fun$ + Mid$(s$, l, dl) 'вставим кусок, после замены
Next i

s$ = Fun$   'в исходной функции все заменено для пол-я ДУ,
'осталось только дозаменять y, y' y" но это сделает процедура DY
n = Len(s$) 'размер в байтах

'------------------ комментарии по процедуре ----------------------
'Содержимое массива DXErr (однако оно должно изменится от DY)
'FOR i = 1 TO DXErr(0, 0)
'  PRINT "¦"; DXErr(1, i); DXErr(2, i); DXErr(3, i); DXErr(4, i); "¦";
datDX(1, i); datDX(2, i); datDX(3, i); datDX(4, i); "¦"
'NEXT i
'Теперь если пользователь введет конструкцию типа только y[t] то
'система заменит сама это обозначение на y. Т.е. в случае ДУ ушли
'от основного правила - ошибки и собственно вид ф-ции выводить
'так, как ее записал пользователь (для того чтобы это
'контролировать надо не заменять y[t] на y, а распознавать
'функцию сразу: если есть y или y[t] то...) - для удобства
'программирования и не нужных перещетов
```

```
End Sub

Sub DY(s$, n)
'процедура реализующая приведение функции к определению
'коэффициентов ДУ (два метода получения коэффициентов DM
'and Super); выполняет [2]

'Определим сперва есть ли символы производных "'" и определим
'в виде ф-ции максимальную вдруг пользователь по программе
'решил рассчитать диф. ур. третьего порядка
ij = 0: Max = 0
PozMax = 0              'позиция Max, потом: "="
Do
 i = i + 1
 If Mid$(s$, i, 1) = "'" Then
  ij = 1
  For j = i + 1 To n
   If Mid$(s$, j, 1) = "'" Then ij = ij + 1 Else i = j: Exit For
  Next j
  If ij > Max Then
   Max = ij             'размерность максимальной производной
   PozMax = i - Max - 1      'и ее позиция в s$
  End If
 End If
Loop Until i >= n - 1

If Max > 2 Then                'ошибка в случае y''' и больше!
 'вывод ф-ции без "!" который я вставляю
 Prn = Prn + Mid$(s$, 1, Len(s$) - 1) + Enter
 Call Mistakes(20, PozMax)
End If

If Max <> 0 Then       'если найдены символ "'" значит, задано ДУ
'тогда начнем процедуру перевода в язык понятной программе
'непонятных ей символов y' и y'' а также понятного "y", значение
'которого изменится на y[t-1]
```

```
flDY = 1                    'скорее всего, задано диф. уравнение, ибо
если
'вдруг пользователь решил пошутить, например, "y+""", то можно
'подумать, что ДУ задано, хотя на самом деле это ошибка, которая
'отловится стандартными средствами далее в процедуре FormatFF.
'А точно понять задано ли ДУ или нет можно, если определить
'есть ли в функции y' или y"

i = 0
Do                          'заменим если есть y[t] на y
 i = i + 1                  'текущая позиция в s$
 If Mid$(s$, i, 4) = "y[t]" Then
  s1$ = Mid$(s$, 1, i)         'запомним от начала и до y
  s2$ = Mid$(s$, i + 4) 'от "]" (не включая ее) до конца
  s$ = s1$ + s2$
  n = Len(s$)               'длина s$ в байтах изменилась
 End If
Loop Until i >= n

'Вдруг пользователь не поставил "y=" подумал это по умолчанию,
'значит надо обязательно его поставить, ибо в случаях с НДУ
'смысл "y" меняется!
PozMax = 0   'позиция "="
For i = 1 To n
 If Mid$(s$, i, 1) = "=" Then PozMax = i: Exit For
Next i
If PozMax = 0 Then s$ = "y=" + s$    'допишем в s$ слева "y="  нет "="
'допишем в s$ слева "y" оно в самом начале
If PozMax = 1 Then s$ = "y" + s$
n = Len(s$)    'длина формулы в байтах (после тек. изменений)
Prn = Prn + Mid$(s$, 1, Len(s$) - 1) + Enter 'выведем вид функции
Prn = Prn + Enter
If dt = 0 Then
 Prn = Prn + "Интервал дискретизации равен 0!" + Enter
 ExtrimExit = 1
 Exit Sub
End If
```

```
'Сформируем конечные разности, которыми от глаз
пользователя 'заменим его обозначения y'' y' и y, которые на
данный момент 'просто байты
'+++ замена y''
y2$ = "((y[t]-2y[t-1]+y[t-2])/" + LTrim$(Str$(dt)) + "^2)"
'+++ замена y'
If FlagDY = 0 Then   'если расчет ведется по алгоритму DM
  y1$ = "((y[t]-y[t-1])/" + LTrim$(Str$(dt)) + ")"
 Else                'если же по алгоритму SUPER
  y1$ = "((y[t]-y[t-2])/2/" + LTrim$(Str$(dt)) + ")"
End If
'+++ замена y
y$ = "y[t-1]"

'В массив для обнаружения ошибок внесем данные о ДУ заданном
'пользователем 1,2. Далее будут внесены изменения о ДУ
'измененном программой 3,4, т.е. то по которому реально можно
'вычислить коэффициенты при производных

i = 0: j = 0      'j-счетчик всех y, y' и y'' вместе
Do
  i = i + 1       'позиция y в s$ в любой текущей производной (y'' y' y)
  If Mid$(s$, i, 3) = "y''" Then
    j = j + 1
    'позиция нахождения y'' в s$ и занимаемое количество байт
    DYErr(1, j) = i: DYErr(2, j) = 3
   ElseIf Mid$(s$, i, 2) = "y'" Then
    j = j + 1
    DYErr(1, j) = i: DYErr(2, j) = 2 'позиция y' в s$ и ЗКБ
   ElseIf Mid$(s$, i, 1) = "y" And Mid$(s$, i + 1, 1) <> "[" Then
    j = j + 1
    DYErr(1, j) = i: DYErr(2, j) = 1 'позиция y  в s$ и ЗКБ
  End If
Loop Until i >= n

Call DX(s$, n)          'процедура реализующая план [3]
```

```
'Сделаем физическую замену в формуле (удаляем: """, "" и затем
'вместо "y" ставим что надо)
'*** приоритет замены: y" y' y
'счетчик байт и опять же производных, а также флаг (=1)
i = 0: j = 0: fl = 0
Do      'на то, что действительно встречались производные (y' или y")
  i = i + 1 'позиция y в s$ в любой текущей производной (y" y' y)
  If Mid$(s$, i, 3) = "y"" Then
    'физическая замена y" разностным выражением
    Call DelStroke(s$, i, 3, n, y2$)
    n = Len(s$)           'длина функции в байтах изменилась
    j = j + 1: fl = 1      'позиция нахождения y" в разностном виде
    'и занимаемое количество байт
    DYErr(3, j) = i: DYErr(4, j) = Len(y2$)

    Call TuningDXErr(i, j) 'коррекция массива DXErr       [3]
   ElseIf Mid$(s$, i, 2) = "y'" Then
    Call DelStroke(s$, i, 2, n, y1$) 'физическая замена y' РВ
    n = Len(s$)
    j = j + 1: fl = 1      'аналогично y" только y'
    DYErr(3, j) = i: DYErr(4, j) = Len(y1$)
    Call TuningDXErr(i, j)                               '[3]
   ElseIf Mid$(s$, i, 1) = "y" And Mid$(s$, i + 1, 1) <> "[" Then
    Call DelStroke(s$, i, 1, n, y$) 'физическая замена y РВ - y[t-1]
    n = Len(s$)
    j = j + 1              'аналогично y" только y
    DYErr(3, j) = i: DYErr(4, j) = Len(y$)
    Call TuningDXErr(i, j)                               '[3]
  End If
Loop Until i >= n

'пользователь ввел не ДУ, а неизвестно что (не найдены y' или y")
If j = 0 Or fl = 0 Then flDY = 0
'j=0 не когда не выполнится ибо раньше я дописывал "y="
DYErr(0, 0) = j 'запомним, сколько у нас y, y' и y" вместе
```

```
'Содержимое массива DYErr
'FOR i = 1 TO 4
'  FOR ij = 1 TO j
'    PRINT USING "## "; DYErr(i, ij);
'  NEXT ij: PRINT
'NEXT i

Else  'если это не диф. уравнение
  Prn = Prn + Mid$(s$, 1, Len(s$) - 1) + Enter: Prn = Prn + Enter
End If
'-----------------------------------------------------------------------------
'Итак идея заключается в том, что вместо заданных пользователем
'символов "y'" и "y''" а также "y" подставляюся скрывая от его глаз
'определенные конечные разности, то есть изменяется переменная
's$ еще до ее обработки (4456:1902C)
'-----------------------------------------------------------------------------
End Sub

Sub ErrDY(PozErr)
'вычисление позиции ошибки в ДУ
'она вычисляет позицию ошибки именно в том ДУ, которое задал
'пользователь, а не то, что преобразовала подпрограмма DY в s$
'для расчета
If flDY = 1 Then        'если задано действительно диф. уравнение
  PozY = DYErr(0, 0) 'по умолчанию
  For i = 1 To DYErr(0, 0)
    If PozErr <= DYErr(3, i) Then
    'собственно это последний y или y', y'' в s$ за которым произошла ошибка
      PozY = i - 1
      Exit For
    End If
  Next i

  'Выч-е позиции ошибки в виде ДУ, заданного пользователем
  'от воздействия DY
  PozErr1 = PozErr - DYErr(3, PozY) - DYErr(4, PozY) +
DYErr(1, PozY) + DYErr(2, PozY)
```

```
 'если процедура DX в данный момент не задействована
 If flDX = 1 Then
  PozErr = PozErr1             'позиция текущей ошибки
 Else
  PozX = DXErr(0, 0)           'по умолчанию                  [3]
  For i = 1 To DXErr(0, 0)
 If PozErr <= DXErr(3, i) Then
   'собственно это последний x{[t...]},y[t...] за которым произошла ошибка
    PozX = i - 1
    Exit For
 End If
 Next i

 'Выч-е позиции ошибки в виде ДУ, заданного пользователем от
 'воздействия DX
 PozErr2 = PozErr - DXErr(3, PozX) - DXErr(4, PozX) +
DXErr(1, PozX) + DXErr(2, PozX)
 'Выбор вероятнейшей позиции
 If PozErr1 < PozErr2 Then PozErr = PozErr1 Else PozErr = PozErr2
 End If
End If
End Sub

Sub Find(s, pozP, pozN, FalseTrue, cod)
's   - переменная в которой осуществляется поиск заданного символа
'pozP - позиция с которой осуществляется поиск
'pozN - первая позиция в которой находится заданный символ
'cod  - код отыскиваемого класса (класс: цифр, функций)
n = Len(s) 'длина анализируемой переменной в байтах
pozN = pozP
'Выход по совпадению с заданием или при просмотре всех байт
'переменной
Do Until Shifrs$(Mid$(s, pozN, 1), cod) = FalseTrue Or pozN >= n
 pozN = pozN + 1
Loop
End Sub
```

```
Sub FormatFF(Fun$, jA, jB, k, no)
'процедура формата формулы FF
n = Len(Fun$)                  'длина функции в символах
Call DelSpace(Fun$, n)         'уберем не нужные пробелы
If ExtrimExit = 1 Then Exit Sub
jA = 0: jB = 0
'/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\ Важные переменные /\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\
'FlagSkoboc    - флаг скобок
'FlNesSkobc    - флаг обязательной скобки (0;1)
'CodOp         - код операции:  0'нет(либо*)';1'+';2'-';3'*';4'/';'^')
'FlagCodOp     - указывает на то, что только что был распознан знак
'(флаг на повторяющийся символ)
'CodFun        - код функции (см.2 в FF)
'jB - номер функционального байта: {a,y,x,(,),const}; именно
'столбцы при этих символах заполняются в массив FF (это его
'порядковый номер)
'Zapazd        - запаздывание по аргументу
'CodFs         - код функции сдвига (см.4 в FF)
'то что касается сдвига Y{X}[t-{i}] 2,4 или  Y{X}[const] 3,5
FlagRavno$ = False   'флаг знака равенства (логический)
A$ = False           'флаг коэфициента (необходим для ++)
'/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\/\

i = 0    'номер рассматриваемого байта
Do
  i = i + 1
  bf$ = Mid$(Fun$, i, 1)         'рассматриваемый текущий байт функции
  'Случаи некоторых ошибок: -------------------------
  If FlNesSkobc = 1 And bf$ <> "(" Then Call Mistakes(9, i)
  If FlagCodOp = 1 And Shifrs$(bf$, 9) = True Then Call Mistakes(10, i)

  'строка оканчивается знаком
  If bf$ = "!" And FlagCodOp = 1 Then Call Mistakes(11, i)
  FlagCodOp = 0        'обнуляем этот флаг
  '-----------------------------------------------------------
```

```
Select Case bf$
 Case "y"
  jB = jB + 1
  FF(7, jB) = jA       'номер коэффициента (если y - справа от =)
  Call IfCodOpZerro(Fun$, i, CodOp)       '?
  Call xyCkobki(Fun$, i, Zapazd, CodFs)
  'выход типа y[const] или y[t-{i}]
  If CodFs = 3 Then CodFs = 5 Else CodFs = 4
  FF(4, jB) = CodFs   'флаг выходной переменной
  FF(5, jB) = Zapazd  'сдвиг
  FF(1, jB) = CodOp
  CodOp = 0            'код знака обнуляем перед y,x,( и const
  FF(2, jB) = Stepen(Fun$, i) 'дальше проверка на степень
 Case "="
  'значит до = не все скобки закрыты
  If FlagSkoboc <> 0 Then Call Mistakes(1, i)
  jB = jB + 1
  FF(7, jB) = jA       'его порядковый номер
  For j = 1 To 7       'правая и левая часть разделена 7
   FF(j, jB) = 7
  Next j
  If FlagRavno$ = True Then Call Mistakes(14, i)
  FlagRavno$ = True 'логическое присутствуе равно (формальность)
  pFlagR = 1           'физически равно присутствует
  PozR = jB            'позиция знака равенства в FF
 Case "a"
  jA = jA + 1          'номер следующего коэффициента
  jB = jB + 1
  FF(7, jB) = jA       'номер коэффициента
  'если перед A не все скобки закрыты (флаг скобок отличен от 0)
  If FlagSkoboc <> 0 Then Call Mistakes(1, i - 2)
  FF(1, jB) = CodOp
  Call IfCodOpZerro(Fun$, i, CodOp)       'знаки по умолчанию '*'
  If CodOp = 3 Then Call Mistakes(16, i)  'а этого знака быть не может
  CodOp = 0
  'пусть будет: не может быть a^; a/... (это значит обратная величина?)
```

```
  FlagRavno$ = True  'если найдено 'a' то '=' присутствует (это
  'связано с тем, что не обязательно писать 'y='ax1+ax1+...)
  A$ = True            'для ++
Case "x"
 jB = jB + 1
  FF(7, jB) = jA      'номер коэффициента который формируется
  Call IfCodOpZerro(Fun$, i, CodOp) '?
  If k > 1 Then        'если количество факторов больше 1
   'то номер фактора указывается обязательно
   FF(3, jB) = Int(NamberX(Fun$, i, k))
  Else
   FF(3, jB) = 1       'иначе номер фактора можно не указывать
   j = i               'запомним номер текущего байта
   z = Int(NamberX(Fun$, i, k)) 'может за X идет номер, то он должен быть 1
   If z = 1 Or z = -1 Then Else i = j
  End If
  If FF(3, jB) > k Then Call Mistakes(18, i)
  Call xyCkobki(Fun$, i, Zapazd, CodFs) 'запаздывание по аргументам
  If CodFs = 3 Then CodFs = 3 Else CodFs = 2  'x[const] или x[t-{i}]
  FF(4, jB) = CodFs   'флаг независимой переменной
  FF(5, jB) = Zapazd  'сдвиг
 If CodFs = 3 And (Zapazd <= 0 Or Zapazd > no) Then Call Mistakes(19, i - 1)
  'возможные операции (+, -) только в скобках; все остальные везде (*/^)
  FF(1, jB) = CodOp
  CodOp = 0            'код знака обнуляем перед y,x,( и const
  FF(2, jB) = Stepen(Fun$, i)          'проверка на степень
Case "("
 jB = jB + 1           'ее порядковый номер
  FF(7, jB) = jA      'какому коэфициенту принадлежит
  Call IfCodOpZerro(Fun$, i, CodOp)  '?
  '+++ не так IF CodFun <> 0 THEN CodOp = 0   '? без этой строки
  'получиться что в выражении (sin{x1...)) скобка { будет иметь знак
 '*', а она знака вообще не должна иметь
  FlagSkoboc = FlagSkoboc + 1 'если скобка открывается посчитаем ее
  FF(6, jB) = FlagSkoboc    'ее место в FF
  FF(2, jB) = CodFun         'код функции
```

```
  CodFun = 0            'обнуляем код функции
  FF(1, jB) = CodOp 'возможные операции {+-*/слева(справа в
  'скобках);+-справа}; 0-{если y в начале}
  CodOp = 0             'код знака обнуляем перед y,x,( и const
  FlNesSkobc = 0    'флаг обязательной скобки (касается функции)
  If Mid$(Fun$, i + 1, 1) = ")" Then Call Mistakes(11, i) 'ситуация ()

Case ")"
  jB = jB + 1           'ее порядковый номер
  FF(7, jB) = jA      'какому коэфициенту принадлежит
  FF(6, jB) = FlagSkoboc    'ее место в FF
  FlagSkoboc = FlagSkoboc - 1 'если скобка закрывается вычтем ее
  If FlagSkoboc < 0 Then Call Mistakes(7, i)
  FF(2, jB) = Stepen(Fun$, i)
Case Else
  If Shifrs$(Mid$(Fun$, i, 1), 7) = True Then        'функции ln, cos
    Call FunCtions(Fun$, i, CodFun, FlNesSkobc)
   ElseIf Shifrs$(Mid$(Fun$, i, 1), 8) = True Then'знаки  + - * / ^
    FlagCodOp = 1   'только что была операция
    Call Znaki(Fun$, i, CodOp)
    'логика знаков (A$ вместо FlagRavno$ для ++)
    Call LogikZnaki(Fun$, i, CodOp, FlagSkoboc, A$)
   ElseIf Shifrs$(Mid$(Fun$, i, 1), 1) = True Then 'если цифры или '.'
    jB = jB + 1          'ее порядковый номер
    FF(7, jB) = jA     'какому коэфициенту принадлежит
    Call IfCodOpZerro(Fun$, i, CodOp)      '?
    Call CheckOnNumber(Fun$, i, FF(3, jB), l) 'находим остальные
    'составляющие константы (в общем случае не целой)
    i = i + l - 1          'уже просмотрены все байты до i
    FF(4, jB) = 1       'флаг константы для массива FF
    FF(1, jB) = CodOp 'возможные операции (+, -) только в
    'скобках; все остальные везде (*/^)
    CodOp = 0           'код знака обнуляем перед y,x,( и const
    FF(2, jB) = Stepen(Fun$, i)       'проверка на степень
   ElseIf bf$ = "!" Then
    If jA > 1 Or PozR < jB Then FlagRavno$ = False
```

```
          Exit Do
      Else
       Call Mistakes(17, i)                'недопустимый символ
     End If
  End Select
  If ExtrimExit = 1 Then Exit Sub
'выполнять пока не будут просмотрены все байты функции
Loop Until i >= n
'Обработка некоторых ошибок ------------------------
If FlagSkoboc <> 0 Then Call Mistakes(1, i) 'не все скобки
'если есть '=' и больше ни чего
If FlagRavno$ = True Then Call Mistakes(11, i)
  '----------------------------------------------------------
'++ если 'a' не будет, то до первой встречающеяся на пути буквы 'a'
'просто вычисляется функция и вносится эта константа в
'свободный член (но не bo); как только встречается 'a' далее
'вступают законы МНК. Это позволяет использовать эту
'программу при вычислении значений функции

'Структура массива FF под конкретный вид модели
'FOR i = 1 TO 7
'  FOR j = 1 TO jB
'    PRINT FF(i, j);
'  NEXT j: PRINT
'NEXT i
End Sub

Sub FormatRO(j, n, x(), y(), IntF(), kF, kB)
'формирование текущей рабочей области (РО)
'j        - точка плана эксперимента на основании данных которой
'формируется РО
'x()      - план эксперимента
'IntF()  - границы коэффициентов модели в колличестве kF

For i = 1 To kB
  RO(i) = 0     'обнуление предыдущей информации
```

```
If FF(4, i) <> 0 Then

  If FF(4, i) = 1 Then          'константа                      Const
    RO(i) = FF(3, i)
   ElseIf FF(4, i) = 2 Then     'переменная                     X[t-{i}]
    Zapazd = j + FF(5, i)
    'если запаздывание не выходит за допустимый диапазон Z//
    If Zapazd > 0 And Zapazd <= n Then

      If CodP = 0 Then
        RO(i) = x(Zapazd, FF(3, i))     'модель в натуральных значениях
       Else                             'иначе модель в приращениях
        RO(i) = x(Zapazd, FF(3, i)) - x(1, FF(3, i))
      End If

     Else
      RO(i) = 0
    End If
   ElseIf FF(4, i) = 3 Then     'переменная при t=const         X[const]
    RO(i) = x(FF(5, i), FF(3, i))
   ElseIf FF(4, i) = 4 Then     'выходная переменная            y[t-{i}]
    Zapazd = j + FF(5, i)
    If Zapazd > 0 And Zapazd <= n Then     'Z//

      If CodP = 0 Then
        RO(i) = y(Zapazd)       'модель в натуральных значениях
       Else                     'иначе модель в приращениях
        RO(i) = y(Zapazd) - y(1)
      End If

     Else
      RO(i) = 0
    End If
   'выходная переменная при t=const  y[const]
   ElseIf FF(4, i) = 5 Then
    RO(i) = y(FF(5, i))
  End If
  If FF(2, i) <> 1 And RO(i) <> 0 Then RO(i) = RO(i) ^ FF(2, i)
```

```
  End If
Next i

'в рабочую область записываем вместо коэффициентов 'a' 1
For i = 1 To kF
  If IntF(i, 3) > 0 Then           'если длина коэффициента не нулевая
    RO(IntF(i, 1)) = 1
  End If
Next i
End Sub
Sub FunCtions(s$, i, CodFun, FlNesSkobc)
'находит известные функции и переводит их в код
CodFun = 0                 'код функции по умолчанию
FlNesSkobc = 0          'флаг обязательной скобки выключен
A$ = Mid$(s$, i, 1)
'если это буквы Sin Cos Exp
If A$ = "s" Or A$ = "c" Or A$ = "e" Then
   A$ = Mid$(s$, i, 3)
   If A$ = "sin" Then
     CodFun = 1
    ElseIf A$ = "cos" Then
     CodFun = 2
    ElseIf A$ = "exp" Then
     CodFun = 6
    Else
     Call Mistakes(8, i)
   End If
   i = i + 2       'эти байты просмотрены
   FlNesSkobc = 1
 ElseIf A$ = "t" Or A$ = "l" Then 'если это буквы Tg Ln Lg
   A$ = Mid$(s$, i, 2)
   If A$ = "tg" Then
     CodFun = 3
    ElseIf A$ = "ln" Then
     CodFun = 4
    ElseIf A$ = "lg" Then
     CodFun = 5
    Else
```

```
    Call Mistakes(8, i)
   End If

   i = i + 1        'эти байты просмотрены
   FlNesSkobc = 1
  Else
  Call Mistakes(8, i)
 End If
 End Sub


Sub IfCodOpZerro(s$, i, CodOp)
'отыскивает знак '*' по умолчанию
'когда код операции может быть равен нулю, в противном случае
'это операция '*'
If CodOp = 0 Then
  If i > 1 Then
    If Mid$(s$, i - 1, 1) = "=" Or Mid$(s$, i - 1, 1) = "(" Then
    'код операции равен 0, т.е. операция не выполняется
     Else
      CodOp = 3
     End If
   Else: If i = 1 Then CodOp = 0
  End If

  If Mid$(s$, i, 1) = "(" Then 'особый случай с функциями
  'если сейчас скобка, а перед ней была конструкция (Ф, где Ф -
  'функция sin,...
    If i > 3 Then a1$ = Mid$(s$, i - 2, 2): a2$ = Mid$(s$, i - 3, 3)
    If a1$ = "ln" Or a1$ = "lg" Or a1$ = "tg" Then
      If Mid$(s$, i - 3, 1) = "(" Then
        CodOp = 0
      End If
     ElseIf a2$ = "sin" Or a2$ = "cos" Or a2$ = "exp" Then
      If i > 4 Then
        If Mid$(s$, i - 4, 1) = "(" Then
          CodOp = 0
        End If
      End If
```

```
      End If        'операция   0        1
  End If          '            (sin(    (-sin(
End If
End Sub

Sub IntFactors(IntFactor(), kF, kB, MaxLInt)
'процедура вычисления интервалов коэффициентов в FF
Max = 0
For i = PozR + 1 To kB
  If FF(7, i) > Max Then
   jF = jF + 1
    Max = FF(7, i)
   IntFactor(jF, 1) = i  'начало интервала коэффициента
   IntFactor(jF, 2) = i  'только ради свободного члена типа 'a'
  ElseIf FF(7, i) = Max Then
   IntFactor(jF, 2) = i  'его конец
  End If
Next i
MaxLInt = 0 'максимальная длина интервала она же максимальное
'количество элементарных операций для формирования
'размерности массива

If FF(7, PozR + 1) = 1 Then  'свободного члена нет {это не 'a'}
'необходимо чтобы в этом случае длина интервала свободного
'члена была 0
  IntFactor(0, 1) = PozR + 1  '\\  начало интервала
  IntFactor(0, 2) = PozR       '\\\ конец интервала
 Else                          'он есть
  IntFactor(0, 1) = PozR + 1  'начало интервала
End If

'Необходимо определиться с интервалом выходной переменной
'все записи по которой будут под номером -1

'то выходная переменная присутсвует
If pFlagR = 1 And PozR > 1 Then
  IntFactor(-1, 1) = 1          '\\
  IntFactor(-1, 2) = PozR - 1  '\\\
```

```
  IntFactor(-1, 3) = PozR - 1
  MaxLInt = PozR - 1 'пока максимальное количество операций
 Else
  IntFactor(-1, 3) = 0  'иначе нулевая длина
End If

For i = 0 To kF          'длина интервала
  IntFactor(i, 3) = IntFactor(i, 2) - IntFactor(i, 1) + 1
  If IntFactor(i, 3) > MaxLInt Then MaxLInt = IntFactor(i, 3)
Next i
End Sub

Sub LogikZnaki(s$, i, CodOp, FlagSkoboc, FlagRavno$)
'проверка правильного употребления арифметических операций
'(логика знаков в МНК)
If CodOp = 1 Or CodOp = 2 Then    '<+> и <->
  If Mid$(s$, i + 1, 1) = "a" Then      'можно
   ElseIf FlagRavno$ = True And FlagSkoboc <> 0 Then    'можно
   ElseIf FlagSkoboc <> 0 Then        '/\ до '=' в скобках
   ElseIf FlagSkoboc = 0 And FlagRavno$ = False Then     '/\ и без
   Else
    Call Mistakes(15, i)                   'иначе нельзя
  End If
End If

'если операция '*' явно указана
If CodOp = 3 Or CodOp = 4 Or CodOp = 5 Then '<*>, </> и <^>
  'не могут: после открытой скобки, перед 'a'
  If i = 1 Or Mid$(s$, i - 1, 1) = "(" Or Mid$(s$, i + 1, 1) = "a" Then
   'кстати i - 1 - при i=1 не верный вызов функции
   Call Mistakes(16, i)
  End If
End If
End Sub

Sub Mistakes(fl, i)
```

```
'коды ошибок
'1 - ожидается выражение, эту ошибка связана с тем что до
'текущего коэффициента не все скобки закрыты, например, была
'совершена попытка расчета нелинейного коэффициента
'a*xi*...*(a*xi^2); МНК - метод расчета коэффициентов моделей
'линейных по параметрам
'2 - за оператором t возможны знаки + или -
'3 - по координатный сдвиг может быть только числовой
'константой, иначе говоря запаздывание не может быть функцией
'4 - запаздывание по аргументам может быть только целым
'5 - ошибки 3 или 4, а также запаздывание не может быть
'отрицательным, это положительное целое число
'6 - за X указывается номер фактора
'7 - открывающих '(' скобок меньше, чем закрывающих ')'
'8 - ошибка в названии функции, либо данная функция не
'поддерживается
'9 - аргумент любой функции записывается в скобках Ф(...)
'10 - повторяющийся символ операции (+-*/^), либо ожидается
'выражение после знака типа: 'знак'); 'знак'=
'11 - ожидается выражение
'12 - Е'степень' превосходит диапазон или не указана
'13 - две константы не разделены между собой знаком ' '
'14 - повторяющийся символ '=' (справа не может быть
'неизвестных коэффициентов 'a')
'15 - неизвестные коэффициенты 'a' моделей линейны по
'параметрам, а значит знаки '+' и '-' могут быть после '=': либо в
'скобках, либо перед 'a'
'16 - знаки '*/^' идут после '(', перед 'a' {модель линейна по
'параметрам} и в самом начале
'17 - не допустимый символ
'18 - номер фактора выходит за допустимый диапазон
'19 - const в запаздывании выходит за количество имеющихся опытов
'20 - непрерывные ДУ рассчитываются только до 2-го порядка
Call ErrDY(i) 'ошибки ДУ [2]
For j = 1 To i
  Prn = Prn + "  "
Next j
Prn = Prn + Chr$(24) + Enter
```

```
Prn = Prn + "код ошибки" + Str(fl) + "в байте" + Str(i) + Enter
Screen.Text = Prn
ExtrimExit = 1
End Sub

Sub MNK(x() As Double, y() As Double, l, n, b() As Double)
'МНК
'l - количество коэффициентов; n - количество опытов
'трансформированная и информационная матрицы
ReDim XT(l, n), m(l, l) As Double
'произведение транспонированной на вектор наблюдений
ReDim Eo(l) As Double
Dim Min, Max 'опыты с номерами в этих пределах берем для расчета
Min = Abs(MinZap) + 1: Max = n - MaxZap

For i = 1 To l              'строим транспонированную
 For j = 1 To n
  XT(i, j) = x(j, i)
Next j, i

ReDim lDat(l)               ' массива длин
Call NFormat(j, l, Str(m(1, 1)), lDat, s, 0) 'обнуление массива длин

For i = 1 To l              'получаем информационную
 For j = 1 To l
  For ij = Min To Max
   m(i, j) = m(i, j) + XT(i, ij) * x(ij, j)
  Next
  'вычисление максимальных длин каждого столбца
  Call NFormat(j, l, Str(m(i, j)), lDat, s, 1)
 Next
Next

Prn = Prn + "Информационная матрица:" + Enter
For i = 1 To l
 For j = 1 To l
  '+++ t = (j - 1) * 15:  Print Tab(t);
```

```
        Call NFormat(j, l, Str(m(i, j)), lDat, s, 2)
    Prn = Prn + s + "   "
  Next: Prn = Prn + Enter
Next: Prn = Prn + Enter

Call OM(m, l, 0.00000000001) 'далее дисперсионную
Call NFormat(j, l, Str(m(1, 1)), lDat, s, 0)
For i = 1 To l 'вычисление максимальных длин каждого из столбцов
  For j = 1 To l
    Call NFormat(j, l, Str(m(i, j)), lDat, s, 1)
  Next
Next

Prn = Prn + "Дисперсионная матрица:" + Enter
For i = 1 To l
  For j = 1 To l
    '+++ t = (j - 1) * 15: Print Tab(t);
    Call NFormat(j, l, Str(m(i, j)), lDat, s, 2)
    Prn = Prn + s + "   "
  Next j: Prn = Prn + Enter
  Cii(i) = m(i, i)    'для tp
Next i: Prn = Prn + Enter

Prn = Prn + "Вектор свободных членов системы:" + Enter
For i = 1 To l
  Eo(i) = 0
  For j = Min To Max
    Eo(i) = Eo(i) + XT(i, j) * y(j)
  Next
  Prn = Prn + Str(Eo(i)) + Enter
Next
Prn = Prn + Enter

For i = 1 To l             'получение коэффициентов модели
  For j = 1 To l
    b(i) = b(i) + m(i, j) * Eo(j)
Next j, i
```

```
End Sub

Function NamberX(s$, i, k)
'процедура поиска номера i фактора Xi
j = i + 1
'ищем до тех пор пока не найдем не число
Call Find(s$, j, pozN, False, 0)
If j = pozN Then
  'если количество факторов больше 1 то номер обязательно
  'должен присутствовать иначе его можно опустить
  If k > 1 Then Call Mistakes(6, j) Else NamberX = -1
 Else
  l = pozN - j
  NamberX = Val(Mid$(s$, j, l)) 'номер фактора
  i = pozN - 1  'байты до i-того уже просмотрены
End If
End Function

Sub OM(m() As Double, n, e As Double)
'обращение матрицы
Dim i, j, k, n1
Dim s, t As Double

ReDim A(n, 2 * n) As Double
n1 = 2 * n
For i = 1 To n
  For j = 1 To n1
    If j <= n Then
      A(i, j) = m(i, j)
     Else
      If j = n + i Then A(i, j) = 1 Else A(i, j) = 0
    End If
Next j, i

For i = 1 To n
  k = i: s = A(i, i)
```

```
  For j = i + 1 To n
    t = A(j, i)
    If Abs(s) < Abs(t) Then
      s = t: k = j
    End If
  Next j
  If Abs(s) < e Then
    Prn = Prn + "Матрица вырождена" + Enter
    Exit Sub
  End If
  For j = i To n1
    t = A(k, j): A(k, j) = A(i, j): A(i, j) = t / s
  Next j

  For k = 1 To n
    If k <> i Then
      For j = n1 To i Step -1
        A(k, j) = A(k, j) - A(i, j) * A(k, i)
      Next j
    End If
  Next k
Next i
For i = 1 To n
  For j = 1 To n
    m(i, j) = A(i, j + n)
Next j, i
End Sub


Sub OpInFactors(IntFactor(), kF, kB)
'процедура определения последовательности операций в каждом из
'коэффициентов в рабочем массиве необходимо коэффициенты 'a'
'заменить 1 с учетом знака
For i = -1 To kF Step 1
  If IntFactor(i, 3) > 1 Then 'если в коэффициенте есть что-то кроме 'a'
    no = fizPoslR(i, 0, 0)        'порядковый номер операции
```

```
  If IntFactor(i, 3) > 1 Then  'если          длина          интервала
коэффициентов
    Call ZapOp(i, IntFactor(i, 1) - 1, IntFactor(i, 2), no)
  End If
  'количество элементарных операций при расчете коэффициента
  fizPoslR(i, 0, 0) = no
 Else 'операция типа 7 (т.е. просто взять эту константу со своим
 'знаком!)   {FF(3,i) > 0 - тогда это не 'a'}
  If IntFactor(i, 3) <> 0 Then 'если длина интервала не нулевая
    fizPoslR(i, 0, 0) = 1        'одна операция
    fizPoslR(i, 1, 1) = 7        'код операции
    fizPoslR(i, 1, 4) = IntFactor(i, 1)
  End If
 End If
Next i

'Осталось учесть висячие знаки '-' в конструкциях типа -sin(x1*(-x2))
'1) делаю операцию типа скобки 6 прежде взяв x2 со знаком '-'
'(6...1); умножаю на x1 (1...0); делаю операцию типа скобки (6...0);
'в конце полученной равенство беру со знаком '-' (0...1)

For i = -1 To kF
 If IntFactor(i, 3) > 1 Then        'если в коэффициенте есть что-то кроме
 'символа 'a' иначе операция 7 все решит
  fl = 0 'этот флаг указывает на то что '-' уже задействован
  For j = 1 To fizPoslR(i, 0, 0)
    'если идут операции '+' и '-' то знаки важны
    If fizPoslR(i, j, 1) = 1 Or fizPoslR(i, j, 1) = 2 Then
      If fl = 0 Then      'если '-' не задействован      ---

        'если слагаемое 3 имеет знак '-'
        If FF(1, fizPoslR(i, j, 3)) = 2 Then
          'тогда при расчетах знак минус здесь учесть обязательно
          fizPoslR(i, j, 6) = 1
        End If
```

```
          fl = 1              'знаки учтены далее все будет нормально
      End If
    End If
    'если идет операция типа скобки
    If fizPoslR(i, j, 1) = 6 Then
      If fl = 0 Then      'если проверок на знаки небыло
        'если слагаемое 2 имеет знак '-'
        If FF(1, fizPoslR(i, j, 2)) = 2 Then
          'тогда при расчетах знак минус здесь учесть обязательно
          fizPoslR(i, j, 6) = 1
        End If
      End If
      fl = 0      'после скобок опять важно минус задействовать
    End If      'при первой же операции '+ или -'  ---
  Next j

  'если fl<>1 то в конце расчета каждого коэффициента
  If fl = 0 Then  'необходимо проверить знак
    'конструкция -(...
    If FF(1, fizPoslR(i, fizPoslR(i, 0, 0), 3)) = 2 Then
      fizPoslR(i, fizPoslR(i, 0, 0) + 1, 6) = 1
    End If
  End If
 End If
Next i

'Вывод содержимого массива который указывает логику расчетов
'(для справки)
'FOR i = -1 TO kF
'  FOR j = 1 TO fizPoslR(i, 0, 0) + 1
'    PRINT fizPoslR(i, j, 1); fizPoslR(i, j, 2); fizPoslR(i, j, 3);
fizPoslR(i, j, 4); fizPoslR(i, j, 5); fizPoslR(i, j, 6)
'  NEXT j
'NEXT i
End Sub
```

```
Sub PoiskScoboc(IntFactor(), kF, kB)
'эта процедура Вам поможет быстро найти скобки, которые
'имеются при каждом 'a'
'kF   - количество коэффициентов типа 'a'
'PozR - позиция знака равенства в массиве FF
'определим максимальную вложенность скобок при каждом коэффициенте
'максимальная вложенность скобки коэффициента
ReDim MaxR(-1 To kF)
For i = -1 To kF
  'скобка может быть при коэффициенте 'a' длина которого в байтах
  'больше 3
  If IntFactor(i, 3) >= 3 Then
    Max = 0      'максимальная вложенность скобки
    For j = IntFactor(i, 1) To IntFactor(i, 2)
      'максимальная вложенность скобки
      If FF(6, j) > Max Then Max = FF(6, j)
    Next j         'подсчет скобок не важен
    MaxR(i) = Max
  End If
Next i
'далее отыщем интервалы скобок в FF и сразу их запишем в
'порядке осуществления расчетов
ReDim IntScoboc(-1 To kF, 10, 3)  'интервалы скобок
'10-максимальная количество скобок типа открыто-закрыто '()'
'коэффициента интервала:kF,0,0-общее количество скобок '()'
'коэффициента; 1-начало; 2-конец; 3-длина интервала
'охватываемого скобкой
For i = -1 To kF
  If MaxR(i) > 0 Then            'если вложенность скобки > 0
    kS = 0         'количество скобок каждого коэффициента
    'сперва будут идти скобки максимальной вложенности m, затем m-1...
    For j = MaxR(i) To 1 Step -1
      ji = 0         'счетчик скобок j-той вложенности
      For ij = IntFactor(i, 1) To IntFactor(i, 2)
        If FF(6, ij) = j Then
          ji = ji + 1
```

```
        If ji / 2 <> ji \ 2 Then              'если он не четен
         kS = kS + 1
         IntScoboc(i, kS, 1) = ij          'начало интервала
        Else
         IntScoboc(i, kS, 2) = ij          'конец интервала и длина
         IntScoboc(i, kS, 3) = ij - IntScoboc(i, kS, 1) + 1
        End If
      End If
    Next ij, j
    IntScoboc(i, 0, 0) = kS       'количество скобок при коэффициенте
  End If
Next i

For i = -1 To kF
  If MaxR(i) > 0 Then             'если в коэффициенте есть скобки
    no = 0                        'порядковый номер операции
    For j = 1 To IntScoboc(i, 0, 0)
      If IntScoboc(i, j, 3) > 3 Then   'если длина интервала скобок > 3
        Call ZapOp(i, IntScoboc(i, j, 1), IntScoboc(i, j, 2), no)
      End If
      'далее идет операция скобки 6
      no = no + 1
      FlagR(IntScoboc(i, j, 1) + 1) = 1 'установить флаги на 1 (
      FlagR(IntScoboc(i, j, 2)) = 1       'тоже самое )
      fizPoslR(i, no, 1) = 6
      fizPoslR(i, no, 2) = IntScoboc(i, j, 1) + 1
      fizPoslR(i, no, 3) = IntScoboc(i, j, 1)
      fizPoslR(i, no, 4) = IntScoboc(i, j, 1)      'начало интервала скобок
      fizPoslR(i, no, 5) = IntScoboc(i, j, 2)      'конец {для того чтобы
      'потом можно было бы осуществить операцию типа 'скобки'}
    Next j

    'количество операций, связанных со скобками, i-того коэффициента
    fizPoslR(i, 0, 0) = no
  End If
Next i
End Sub
```

```
Sub Priraschenie(IntFactor(), kF)
'для модели в приращениях
'процедура необходимая для представления модели в виде
'приращений для /*/ считаем что начало отсчета t=0 находиться в
'массиве под номером 1
'при исследовании динамических систем для более точного
'построения динамических моделей строят последние в
'приращениях относительно начала отсчета (t=0) (связано с
'получением дисперсионной матрицы). В программе имеется
'возможность строить модели в приращениях если вместо всех
'факторов Xi{t} и выходной переменной y{[t]} писать
'соответственно конструкции (Xi[t{-запаздывание}]-Xi[1]) и (y[t{-
'запаздывание}]-y[1]) /*/, т.е. вместо каждого из факторов и
'выходной переменной писать эти скобки. Есть второй вариант
'записи этих конструкций для расчета коэффициентов модели в
'приращениях: Xi[t{-запаздывание}] и y[t{-запаздывание}], но для
'этого необходимо в программе внести изменения в процедуре
'FormatRO.

ReDim Min(-1 To kF) 'самое наибольшее отрицательное
'запаздывание фактора или сдвиг выходной переменной в каждом
'из коэффициентов 'a'
For i = -1 To kF
  Min(i) = 0
  If IntFactor(i, 3) > 0 Then    'если интервал фактора в FF больше 0
    For j = IntFactor(i, 1) To IntFactor(i, 2)
      If FF(5, j) < Min(i) Then Min(i) = FF(5, j)
    Next j
  End If
Next i
'необходимо обнулить первые i строк по j тому коэффициенту,
'если у j-того коэффициента максимальное отрицательное
'запаздывание равно i
For i = 0 To kF                       'по факторам
  If IntFactor(i, 3) > 0 Then
```

```
      If Min(i) < 0 Then
     For j = 1 To Abs(Min(i))
      F(j, i) = 0
     Next j
    End If
  End If
Next i

If Min(-1) < 0 Then              'по выходной переменной
  For i = 1 To Abs(Min(-1))
    yF(i) = 0
  Next i
End If
End Sub

Sub ProcessingComStr(s$, fl, CodDM, Adt)
'она распознает командную строку
'процедура устанавливающая флаги, в зависимости от данных
'командной строки s$ - командная строка в байтах; fl=0; 1-в
'командной строке непонятно что или ни чего не указано; CodDM-
'флаг вида модели; Adt-интервал дискретизации
s$ = LTrim$(RTrim$(s$))     'удалим пробелы слева и справа
fl = 0                     'флаг Хелпа
If Mid$(s$, 1, 1) = "/" And Len(s$) = 1 Then fl = 1 'все help
If Mid$(s$, 1, 1) = "/" Then s$ = Mid$(s$, 2)        'удалим /
n = Len(s$)                'длина данных КС в байтах

nBlank = 0                 'подсчитаем количество пробелов
For i = 1 To n
  If Mid$(s$, i, 1) = " " And Mid$(s$, i + 1, 1) <> " " Then nBlank
= nBlank + 1
Next i
nBlank = nBlank + 1  'между n пробелами n+1 команда

'сюда будет помещено все содержимое командной строки
ReDim A$(nBlank)
j = 1
```

```
For i = 1 To n
  w$ = Mid$(s$, i, 1)  'считываем по одному символу
  If w$ <> " " Then A$(j) = A$(j) + w$  'формирование команды
  If w$ = " " And Mid$(s$, i + 1, 1) <> " " Then j = j + 1 'счетчик команд
Next i

j = 0     'если так и дальше будет, то в КС ни чего не задано (то что надо)
flT = 0 'флаг вычерчивания таблицы ключей (для справки)
For i = 1 To nBlank
  If A$(i) = "d" Then  'иногда в случаях дин. моделей точность
     CodDM = 1: j = j + 1        'расчета коэффициентов модели выше
   ElseIf A$(i) = "p" Then
     CodP = 1: j = j + 1            'модель в приращениях
   ElseIf A$(i) = "dm" Then
     FlagDY = 0: j = j + 1         'получение ДУ по методу DM
   ElseIf A$(i) = "t" Or A$(i) = "т" Then
     flT = 1: j = j + 1
   ElseIf A$(i) = "star" Then
     flDX = 1: j = j + 1
   Else 'вдруг задано число, а это значит интервал дискретизации
     flC = 0                   'флаг числа, если 1 то не число
     For ij = 1 To Len(A$(i))
       s$ = Mid$(A$(i), ij, 1)
       If Shifrs$(s$, 2) = False Then flC = 1: Exit For
     Next ij
     If flC = 0 Then       'не проверяю число на правильность записи
       Adt = Val(A$(i)): j = j + 1
     End If
  End If
Next i

'если совпадений нет, но в командной строке что-то написано
If j = 0 And nBlank <> 0 Then fl = 1            'вывести Help
If flT = 1 Then 'выводится таблица ключей
'                      ¦-¦-------¦------¦----------¦
```

```
'                    ¦0¦   T   ¦  H ¦     DM   ¦          --> нет
'Print USING;   "¦-¦--- # --¦-- # ---¦---- # -----¦ ключ --¦"; CodDM; CodP; FlagDY
'                    ¦1¦ ИПТ ¦  П  ¦ SUPER ¦          --> есть
'                    ¦-¦-------¦------¦-----------¦
'                   "  == d ==  p  =   dm  ==      ";
'If Adt <> 0 Then Print "dt ="; Adt Else Print
'Print
'---  Расшифровка обозначений: ------------------------------------
'  При получении динамических моделей:
'                      T - повышенная точность (ПТ)
'                 ИПТ - иногда более ПТ
' Получение моделей:          H - в натуральных значениях
'                                       П - в приращениях
' Получение непрерывных дифференциальных уравнений по
' методам: Super и DM
'-----------------------------------------------------------------------
ExtrimExit = 1
End If
End Sub
Sub SecondMaking(jPoz, nInt, iPoz)
'поиск второй составляющей операции
'jPoz - текущая позиция первой составляющей
'iPoz - позиция второй составляющей операции
'nInt - начало рассматриваемого интервала
For i = jPoz - 1 To nInt + 1 Step -1
  If FlagR(i) = 0 Then iPoz = i: Exit For
Next i
End Sub

Sub SErrors()
'сообщения об ошибках
'пункт коды ошибок см. в процедуре Sub Mistakes(fl, i)
End Sub

Function Shifrs$(s, fl)
'совпадение байта на задание
```

```
'процедура выдающая задание на поиск и осуществляющая
'побайтное сравнение
's     - отыскиваемый байт
'chr   - задание на поиск в строке, зависящее от кода fl
'fl    - перечень режимов поиска указан ниже
'примечание: сравниваем 1 байт с заданием, т.е. определяем к
'какому классу он принадлежит (или цифры, или пробел и т.д.)

If fl = 0 Then              '// только цифры
  Chrs = "1234567890"
 ElseIf fl = 1 Then         '// важно если пробел заменяет 2 числа
 '{например, 2 .23=2*.23=0.46} (при удалении пробелов)
  Chrs = "1234567890."
 ElseIf fl = 2 Then         '// все возможные составляющие числа
  Chrs = "1234567890,.+-Ee" 'действительно ли это число?
 ElseIf fl = 3 Then         '// пробел
  Chrs = " "
 ElseIf fl = 4 Then         '// оператор сдвига t
  Chrs = "t"
 ElseIf fl = 5 Then         '// знаки +-
  Chrs = "+-"
 ElseIf fl = 6 Then         '// знак .
  Chrs = "."
 ElseIf fl = 7 Then         '// известные функции
  Chrs = "sctle"
 ElseIf fl = 8 Then         '// знаки арифметических оперций
  Chrs = "+-*/ ^"
 ElseIf fl = 9 Then         '// знаки арифметических оперций + )
  Chrs = "+-*/^)="
 ElseIf fl = 10 Then        '// ...E-..
  Chrs = "e"
 ElseIf fl = 11 Then        '// для проверки на разделение двух констант
  Chrs = "1234567890eE."
Else
  Prn = Prn + "Не указан код поиска" + Enter
  ExtrimExit = 1: Exit Function
```

```
    End If

Shifrs$ = False
For i = 1 To Len(Chrs)
  If s = Mid$(Chrs, i, 1) Then
    Shifrs$ = True
    Exit Function
  End If
Next i
End Function

Function Stepen(s$, i)
'нахождение конструкции типа ...^const
'процедура поиска степени типа {x,y,),константа}^const, где const > 0
Stepen = 1                        'по умолчанию степень 1
j = i + 1
If Mid$(s$, j, 1) = "^" Then
  'если следующий байт число, то все нормально
  '(может быть '(' или функция)
  If Shifrs$(Mid$(s$, j + 1, 1), 0) = True Then
    'находим остальные числа степени
    Call CheckOnNumber(s$, j + 1, Namber, l)
    i = j + l                     'уже просмотрены все байты до i
    Stepen = Namber
  End If
End If
End Function

Sub TuningDXErr(tp, iP)
'подстройка массива DXerr в зависимости от воздействия
'процедуры DY
'tp-текущая позиция в s$, где производится замена y, y', y"; iP-
'порядковый номер производимой замены

If flDX = 1 Then Exit Sub     'процедура DX не задействована
For i = 1 To DXErr(0, 0)
```

```
  If DXErr(3, i) > tp Then
    For j = i To DXErr(0, 0)
      DXErr(3, j) = DXErr(3, j) + (DYErr(4, iP) - DYErr(2, iP))
    Next j
    Exit For
  End If
Next i

'подстраивается только положение xi[t], xi[t-{+}const] и y[t-
'{+}const] в зависимости от изменений вносимых проц-й DY:
'корректир-ся 3 строка масива DXErr
End Sub

Sub xyCkobki(s$, i, Zapazd, CodFs)
'распознание содержимого скобок на запаздывание для
'конструкций типа Y{X} (скобки)
'процедура отлавливающая запаздывания по аргументам или
'функциям конструкции Y{X}[t{-i}] или Y{X}[const]

'CodFs  1 - конструкция [t]
'       2 - конструкция [t-i]    (+)
'       3 - конструкция [const]

CodFs = 1       'если нет скобок, то конструкция текущего значения
'аргумента [без запаздываний]
Zapazd = 0     'сдвиг 0
'i - граница рассмотренных и не рассмотренных байтов на текущий момент
j = i + 1           'первая позиция за скобкой
If Mid$(s$, j, 1) = "[" Then    'если далее идет [
  'проверяем до тех пор пока будет не цифра
  q = j + 1                          'следующая позиция за скобкой
  Call Find(s$, q, pozN, False, 0)
  If q = pozN Then                 'если это не число
    'тогда может быть это оператор времени t
    If Shifrs$(Mid$(s$, q, 1), 4) = True Then
      'тогда отыскиваем знаки + или -
```

```
If Shifrs$(Mid$(s$, q + 1, 1), 5) = True Then
 'если это так то отыскиваем сдвиг (целый)
 'то есть идем до тех пор пока числа {остановимся на не числе}
 Call Find(s$, q + 2, pozN, False, 0)
 If q + 2 = pozN Then    'если это не число
  Call Mistakes(3, q + 2) '                         ошибка 3
 Else
  'если за числом идет ']' тогда все нормально
  If Mid$(s$, pozN, 1) = "]" Then
   pozN = pozN - 1       'позиция окончания числа
   l = pozN - (q + 1)     'длина запаздывания в байтах
   Zapazd = Val(Mid$(s$, q + 2, l))      'число
   'если после t был '-' то учтем его
   If Mid$(s$, q + 1, 1) = "-" Then Zapazd = Zapazd * (-1)
   i = pozN + 1            'все эти символы просмотрены
   CodFs = 2               'вид конструкции
   'для более точного получения динамических моделей
   If Zapazd < MinZap Then MinZap = Zapazd
   If Zapazd > MaxZap Then MaxZap = Zapazd
  Else
  'но за числом может идти ., x... что не нормально
  If Shifrs$(Mid$(s$, pozN, 1), 6) = True Then
   Call Mistakes(4, pozN)  '                        ошибка 4
  Else
   Call Mistakes(3, pozN)  '                        ошибка 3
  End If
  End If
 End If
Else
 'если есть t то может быть пользователь хотел указать
 'текущий Y{X} типа: y[t], x[t]
 If Mid$(s$, q + 1, 1) = "]" Then
  i = q + 1          'все эти символы просмотрены
  Zapazd = 0      'смещения по аргументу нет

  'Для работы процедуры DX необходимо точно отслеживать
  'конструкции типа x[t] и x (значение их одинаково), поэтому
  'если конструкция типа x[t], то теперь такая конструкция
```

```
        'будет носить код 4, помоему это изменение к
        искожению 'результата не ведет. Для реализации [3]
        CodFs = 4
        '+++ CodFs = 1          'конструкция типа Y{X}[t]
       Else
        Call Mistakes(2, q + 1)  '                     ошибка 2
      End If
     End If
    Else                        'если это не оператор t
     Call Mistakes(5, q)        '                      ошибка 5
    End If
   Else  'если число то конструкция Y{X}[const]
    If Mid$(s$, pozN, 1) = "]" Then
     l = pozN - q          'длина запаздывания в байтах
     Zapazd = Val(Mid$(s$, q, pozN - l))      'величина запаздывания
     i = pozN              'все эти символы просмотрены
     CodFs = 3             'вид конструкции
    Else
     Call Mistakes(5, q)        '                    ошибка 5
    End If
  End If
End If
End Sub
Sub ZapOp(i, nInt, kInt, no)
'процедура нахождения последовательности операций
'процедура заполнения составляющих и операций в массив
'физического расчета
'i-номер рассматриваемого коэффициента
'^

For ij = nInt + 2 To kInt
  If FlagR(ij) = 0 Then  '// если эта операция раннее не задействована
   If FF(1, ij) = 5 Then
     FlagR(ij) = 1        '/// эта операция задействована
     no = no + 1
     fizPoslR(i, no, 1) = 5  'какая операция
     'между какими составляющими
     fizPoslR(i, no, 2) = ij  '//// между текущей составляющей
     Call SecondMaking(ij, nInt, iPoz)
```

```
        fizPoslR(i, no, 3) = iPoz 'и этой
    End If
  End If
Next ij
'* и /
For ij = nInt + 2 To kInt
  If FlagR(ij) = 0 Then          '//
    If FF(1, ij) = 3 Or FF(1, ij) = 4 Then
      FlagR(ij) = 1              '///
      no = no + 1
      fizPoslR(i, no, 1) = FF(1, ij)
      fizPoslR(i, no, 2) = ij     '////
      Call SecondMaking(ij, nInt, iPoz)
      fizPoslR(i, no, 3) = iPoz
    End If
  End If
Next ij
'+ и -
For ij = nInt + 2 To kInt
  If FlagR(ij) = 0 Then          '//
    If FF(1, ij) = 1 Or FF(1, ij) = 2 Then
      FlagR(ij) = 1              '///
      no = no + 1
      fizPoslR(i, no, 1) = FF(1, ij)
      fizPoslR(i, no, 2) = ij     '////
      Call SecondMaking(ij, nInt, iPoz)
      fizPoslR(i, no, 3) = iPoz
    End If
  End If
Next ij
End Sub

Sub Znaki(s$, i, CodOp)
'она определяет знаки
A$ = Mid$(s$, i, 1)
If A$ = "+" Then
```

```
 CodOp = 1
 ElseIf A$ = "-" Then
  CodOp = 2
 ElseIf A$ = "*" Or A$ = " " Then
  CodOp = 3
 ElseIf A$ = "/" Then
  CodOp = 4
 ElseIf A$ = "^" Then
  CodOp = 5
End If
End Sub

Sub Help()
'Основной HELP
'можно зделать через Prn=Prn+""+Enter, где в "" построчный текст
'---------------------------------------------------------------------------------
'                              Метод наименьших квадратов
'---------------------------------------------------------------------------------
'МНК предназначен для отыскания коэффициентов моделей
'линейных по параметрам. Имеется также возможность получения
'динамических моделей, на основании которых можно получать
'дифференциальные уравнения (по определенным алгоритмам).
'Входными данными для получения модели являются: вид модели;
'количество факторов k; количество опытов n и собственно опыты
'(уровни факторов Xij и значение выходной переменной Yj, где
'i=1,2,...,k; j=1,2,...,n).
'При моделировании динамических систем, имеется возможность
'получения динамических моделей как в действительных
'значениях, так и в приращениях относительно начала отсчета
'(t=0). Последнее обычно повышает аппроксимирующие свойства
'моделей (запустить программу с ключем /p).
'Программой рассчитываются коэффициенты модели,
'теоретические значения критерия Стьюдента (без учета ошибки
'опыта), качество аппроксимации модели проверяется по F-
'отношению: отношение дисперсии вокруг среднего Yэкс к
'остаточной дисперсии (чем больше F, тем модель лучше
```

```
'предсказывает); также выводятся информационная и
'дисперсионная матрицы, которые определяют свойства будущей
'модели (дисперсии коэффициентов, ошибку предсказания
'выходной переменной...)
'-----------------------------------------------------------------------------
'см. /keys
End Sub

Sub SHelp()
'HELP для правильного составления модели
'-----------------------------------------------------------------------------
'При составлении вида функции неизвестные коэффициенты
'обозначаются символом 'a'.  Факторы и выходная переменная
'обозначаются соответственно символами 'xi' и 'y', где i-номер
'фактора, если задача многомерная. Имеется возможность
'использовать следующие функции: sin(), cos(), tg(), ln(), lg(), exp(),
'степень '^', а также операция типа скобки () вложенности не
'больше 10. Допустимы следующие арифметические операции '+-*/'.
'Часто при моделировании возникают случаи определения
'коэффициентов таких многочленов: a(x-x1)+a(x-x2)^2+..., где
'x1,x2... - соответственно значение фактора в опытах 1,2,... . В этих
'случаях такие составляющие регрессоров обозначаются т.о.
'xi[const],  где i - номер фактора, const - номер опыта, значение
'фактора в котором надо зафиксировать. Это относится и к
'выходной переменной, однако часто теряется физический смысл.
'При моделировании динамических систем применяются
'регрессоры: xi[t-j], y[t-l], где x, y - соответственно значения
'выходной переменной и факторов за j и l шагов до
'соответствующего текущего значения на момент времени  t, где
'l=1,2,..., r-порядок динамической модели по которой возможно
'получить линейное ДУ с постоянными коэффициентами также r-
'порядка. Также можно получать коэффициенты любых ДУ,
'линейных по параметрам, используя функции y’, y”.
'Для расчета приращений используются зависимости: ΔXi,j = Xi,j -
'Xi,1; ΔYj = Yj - Y1, где i - номер переменной, j - номер
'эксперимента.
```

'Опуская в правой части символы 'a' расчитается значение функции 'введенной пользователем для всех точек плана (в левой и правой 'частях относительно '=')

'--------------------------------------------------------------------------------

End Sub

Sub HelpDY()

'help по диф. уравнениям

'--------------------------------------------------------------------------------

'При получении ДУ используются обозначения y' и y''. 'Записываются они так же обычно, как и любые регрессоры. Если 'необходимо получить ДУ вида ay''+a(1-x)y'+ay=af(x), то для 'расчета неизвестных коэфициентов (НК) его надо записать в 'явном виде относительно какой-то производной, например, т.о. 'y=a(1-x)y'+ay''+af(x) и системой будут расчитаны коэффициенты ''a'. При использовании полученного ДУ не забудьте производные 'и функцию перенести влево относительно знака '=', изменив знаки 'соответствующих коэффициентов на противоположные. Система 'позволяет находить ДУ до 2-го порядка включительно. При 'получении НК ДУ система использует два независимых метода: 'Super по умолчанию и DM (/dm). Первый из них применяется при 'получении однородных ДУ и большинства неоднородных, второй '- в некоторых исключениях первого: 2/3S:1/3DM. Теперь немного 'о ДУ с постоянными коэффициентами (ПК). Известно, что НК 'непрерывных ДУ с ПК можно получить через их разностный 'аналог (РА), так НК ДУ вида Ay''+By'+Cy=af(x) получают из РА вида 'cy=by[t-1]+ay[t-2]+af(x), (c=1), полученого для заданого интервала 'дискретизации (ИД) dx. Поэтому задействуйте РА при поиске вида 'непрерывного ДУ, по max F-отношению. При получении ДУ для 'моделей типа вход-выход необходимо что-бы фактор (Ф) 'изменялся через одинаковый интервал dx, называемый ИД. 'Система определяет его на автомате всегда из Ф x1 (в n-мерных 'задачах также), но не проверяет соблюдения условия dx=const. В 'n-мерном факторном пространстве в качестве ИД используйте шаг 'по времени между двумя соседними измерениями (вводится в 'командной строке). В этом случае получаются временные ДУ, в 'которых динамика зависит от факторов во времени, когда 'значения факторов являются определенной частью от стандарт-'сигналов, например, от единичных ступенек. В этом случае 'решение ДУ каждый раз находится для фиксированных значений 'факторов, т.е. придав значения факторам решаем ДУ. Помните - 'получить ДУ не достаточно, его нужно еще решить!

```
'-------------------------------------------------------------------------------
End Sub

Sub SKeys()
'сообщение о ключах
'-------------------------------------------------------------------------------
'/?      - помощь
'/keys   - список ключей
'/p      - рассчет модели в приращениях                П
'          (иначе модель в натуральных значениях)      Н
'/errors - коды ошибок
'/d      - в случае динамических моделей позволяет в некоторых
'          случаях более точно определить коэффициенты
'          динамической модели
'/dy     - help по получению дифференциальных уравнений
'/dm     - определение коэф-тов ДУ по методу DM иначе Super
'/t{/т}  - система показывает воспринятые команды
'-------- Совместное использование ключей [p] [d] [dm] [dx] -------
'-------------------------------------------------------------------------------
'---------------- Данные считываются из файла  МНК.dat -----------
'---------------- Результаты выводятся в файл  МНК.txt    -----------
'-------------------------------------------------------------------------------
End Sub

Sub DatInput(ByRef Dan, ByRef kF, ByRef nE, ByRef Plan, ByRef y, fl)
'она распознает данные
Dan = LCase(Dan)
Dan = strs(Dan, 0)
n = Len(Dan)
i = 0
If fl = 0 Then 'для определения n; k
  j = 0
```

```
  Do
    i = i + 1
    s = Mid(Dan, i, 1)
    If s <> Chr(32) And s <> Chr(9) And s <> Chr(13) And s <> Chr(10)
And s <> "-" Then
      Call CheckOnNumber(Dan, i, Namber, l)
      i = i + l
      j = j + 1
      If j = 1 Then kF = Namber
      If j = 2 Then
        nE = Namber
        Dan = Mid(Dan, i + 1)
        Exit Do
      End If
    End If
  Loop Until i >= n
  'это обязательно должно быть целое число
  kF = Int(Abs(kF)): nE = Int(Abs(nE))
  Exit Sub
End If

r = (kF + 1) * nE
ReDim XY(r) 'одномерный массив под все данные
j = 0            'счетчик заполнения массива дынными
Do
  i = i + 1
  s = Mid(Dan, i, 1)
  If s <> Chr(32) And s <> Chr(9) And s <> Chr(13) And s <> Chr(10) Then
    If i < n And Shifrs(Mid(Dan, i, 1), 6) = True And Shifrs(Mid(Dan, i
+ 1, 1), 0) = False Then
     l = 0
     i = i + 1
    ElseIf s = "-" Then
     Call CheckOnNumber(Dan, i + 1, Namber, l)
     If l <> 0 Then Namber = Namber * (-1)
     i = i + l + 1
    Else
```

```
     Call CheckOnNumber(Dan, i, Namber, l)
     i = i + 1
    End If
    If l > 0 And j < r Then
     j = j + 1
     XY(j) = Namber
     '+++ file.Write(Namber) & " => " 'лог вывода
     '+++ file.WriteLine (len(Namber))
    End If
  End If
Loop Until i >= n
'+++ file.WriteLine(Prn) => лог правильности ошибок ввода чисел

n = j 'количество считанных чисел из строчной переменной
ij = 0
'заносим план эксперимента и выходную переменную по массивам
If r = n Then
  For i = 1 To nE
    For j = 1 To kF
      ij = ij + 1
      Plan(i, j) = Val(strs(XY(ij), 0))
    Next
    ij = ij + 1
    y(i) = Val(strs(XY(ij), 0))
  Next
 Else
  'код ошибки x в строке
  'переменная экстремального выхода
End If
End Sub

Function strs(ByVal s, fl)
'fl=0 она в числах заменяет , на .
'иначе она в числах заменяет . на ,
If fl = 0 Then A = ".": b = "," Else A = ",": b = "."
n = Len(s)
For i = 1 To n
  Str = Mid(s, i, 1)
```

```
  If Str = A Then
    If i > 1 And i < n Then
      snew = Mid(s, 1, i - 1) + b + Mid(s, i + 1, n - i)
     ElseIf i = 1 Then
      snew = b + Mid(s, i + 1, n - 1)
     ElseIf i = n Then
      snew = Mid(s, 1, n - 1) + b
     End If
     s = snew
  End If
Next
strs = s
End Function

Sub NFormat(j, nj, ByVal nDat, ByRef lDat, ByRef s, fl)
'она подгоняет данные, что-бы они были одинаковой длины
'j  - какой столбец смотрим
'nj - количество столбцов
'nDat - текущее число
'lDat - массив максимальных длин по столбцам
's - преобразованный результат
'fl-0 - обнуление массива, 1 - сбор информации, 2 - дополнение
'пробелами, 3 - "-"
If fl = 0 Then
  For i = 1 To nj: lDat(i) = 0: Next
 ElseIf fl = 1 Then
  lNamber = Len(nDat)
  If lDat(j) < lNamber Then lDat(j) = lNamber
 ElseIf fl = 2 Or fl = 3 Then
  s = nDat
  lNamber1 = Len(s)
  lNamber2 = lDat(j) - lNamber1
  If fl = 2 Then s1 = " " Else s1 = "-"
  For i = 1 To lNamber2
    s = s + s1
  Next
End If
End Sub
```

Результати розрахунку коефіцієнтів математичної моделі (3.213) загального вигляду (3.209) за даними прикладу 3.19 за допомогою даної програми наведено нижче.

Вид функции:
y = ay' + ay'' + a + ax + ax^2 + ax^3

Информационная матрица:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 38.32374 | -.1128000 | 19.514 | 5.9418 | 2.35954 | 1.1628863 |
| -.1128000 | 1484.0768 | -1.2 | -18.328 | -10.6676 | -5.8701100 |
| 19.514 | -1.2 | 19 | 9.5 | 6.175 | 4.5125 |
| 5.9418 | -18.328 | 9.5 | 6.175 | 4.5125 | 3.5166625 |
| 2.35954 | -10.6676 | 6.175 | 4.5125 | 3.5166625 | 2.8541563 |
| 1.1628863 | -5.8701100 | 4.5125 | 3.5166625 | 2.8541563 | 2.3821220 |

Дисперсионная матрица:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| .3597650 | -2.95480047E-03 | 4.1475289E-02 | -7.5539342 | 19.2737618 | -12.2028000 |
| -2.9548005E-03 | 2.7604885E-03 | -.0948533 | .7158257 | -1.3231239 | .7164834 |
| 4.14752892E-02 | -.0948533 | 4.5539473 | -33.2788491 | 62.5804353 | -34.7331400 |
| -7.5539342 | .7158257 | -33.2788491 | 406.2998648 | -887.2846514 | 531.7891640 |
| 19.2737618 | -1.3231239 | 62.5804353 | -887.2846514 | 2009.3118803 | -1228.8134916 |
| -12.2028000 | .7164834 | -34.7331400 | 531.7891640 | -1228.8134916 | 761.1836300 |

Коэффициенты модели и критерий Стьюдента tp

| | |
|---|---|
| A1 = -.066791980745183 | .111356318464814 |
| A2 = -5.06358178034739E-03 | 9.63751042442713E-02 |
| A3 = -4.43965168070381E-02 | 2.08043856864088E-02 |
| A4 = 3.63788819611417 | .180478722745098 |
| A5 = -4.36836095958966 | 9.74529165429947E-02 |
| A6 = 1.78879275254101 | 6.48358646165724E-02 |

Интервал дискретизации .05

Оценка точности формулы

| i | Yэ | Yм | Yэ-Yм |
|---|---|---|---|
| 3 | .0258 | 2.37123753917654E-02 | 2.08762460823456E-03 |
| 4 | .0672 | 7.29819963186819E-02 | -5.78199631868195E-03 |
| 5 | .164 | .159872304714681 | 4.12769528531887E-03 |
| 6 | .3053 | .302759999239397 | 2.54000076060329E-03 |
| 7 | .4582 | .461539974719877 | -3.33997471987685E-03 |
| 8 | .5941 | .597334803125679 | -3.23480312567936E-03 |
| 9 | .7015 | .700763307944517 | 7.3669205548299E-04 |
| 10 | .7815 | .778420995253653 | 3.07900474634737E-03 |
| 11 | .8396 | .83654517539028 | 3.05482460972029E-03 |
| 12 | .8817 | .880791141608106 | 9.0885839189403E-04 |
| 13 | .9123 | .913293322924566 | -9.93322924565887E-04 |
| 14 | .9349 | .937537159274845 | -2.63715927484498E-03 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | .9517 | .954176819455095 | -2.47681945509459E-03 |
| 16 | .9645 | .966165574883516 | -1.6655748835156E-03 |
| 17 | .9743 | .974028345052725 | 2.71654947274991E-04 |
| 18 | .982 | .980048314244495 | 1.95168575550453E-03 |
| 19 | .9881 | .985562742365276 | 2.53725763472401E-03 |
| 20 | .9929 | .991372386146576 | 1.52761385342426E-03 |
| 21 | .9968 | .999493261947187 | -2.69326194718744E-03 |

Среднеквадратичное отклонение = 1.39837362727126E-04
Критерий Фишера F = 10689.1301310166

Таким чином, диференціальне рівняння має вигляд:

$$5{,}06358178034739\cdot10^{-3}\,y'' + 0{,}0667919807451183\,y' + y = -4{,}43965168070381\cdot10^{-2} + 3{,}63788819611417\,x - 4{,}36836095958966\,x^2 + 1{,}78879275254101\,x^3.$$

ДОДАТОК Н

## РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В MS EXCEL

Необхідно знайти максимум функції $y = -5x_1 - 2x_2 + 10$ при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для розв′язку скористаємось стандартною програмою, закладеною в MS Excel за методом Ньютона.

Введення обмежень:

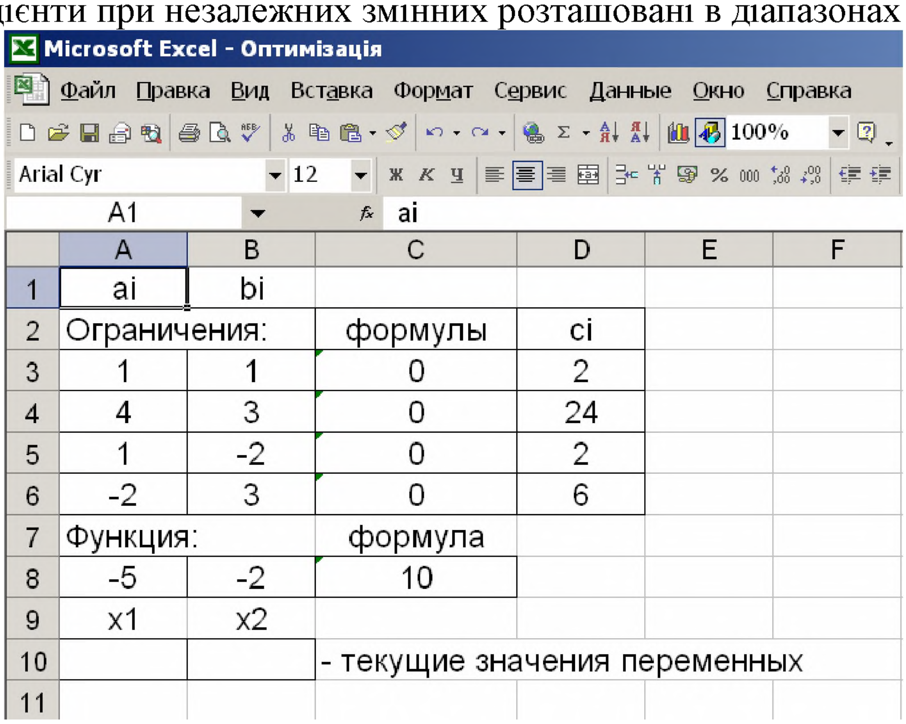
– коефіцієнти при незалежних змінних розташовані в діапазонах $A$3:$B$6;

– праві частини рівнянь обмежень – в діапазоні $D$3:$D$6;

– ліві частини[33] формул обмежень в форматі MS Excel – в діапазоні $C$3:$C$6[34]; враховуючи, що поточні значення незалежних змінних x1[35] та x2 будуть розміщуватись відповідно в клітинах A10 і B10, які до початку розрахунків залишаються пустими.

Введення функції:

– коефіцієнти при незалежних змінних розташовані в діапазонах $A$8:$B$8;




– формула в форматі MS Excel розташована в комірці C8.

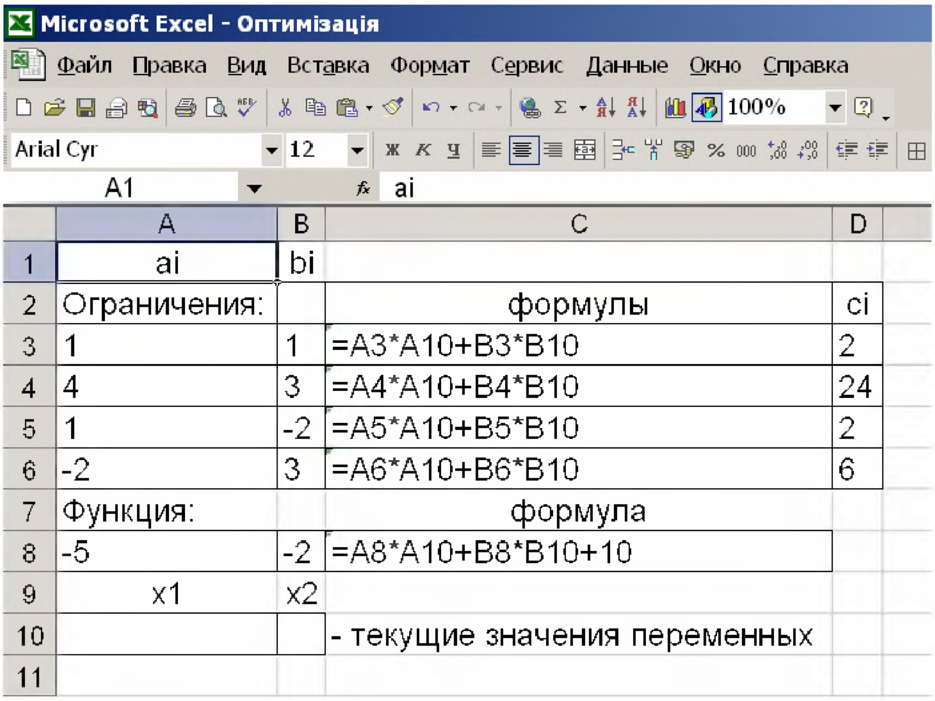
---

[33] Так, для обмеження x1 + x2 ≥ 2 лівою частиною є 1·x1 + 1·x2.

[34] В комірках C3–C6 при введенні формул MS Excel відображає нулі, а самі формули додатково наведені на наступному рисунку.

[35] В комірках A9 і B9 x1 і x2 є коментаріями до тексту, а їх дійсні поточні значення в нашому прикладі будуть розташовуватись в комірках відповідно A10 і B10.

Вигляд цього вікна в формулах наведено[36] на наступному рисунку.



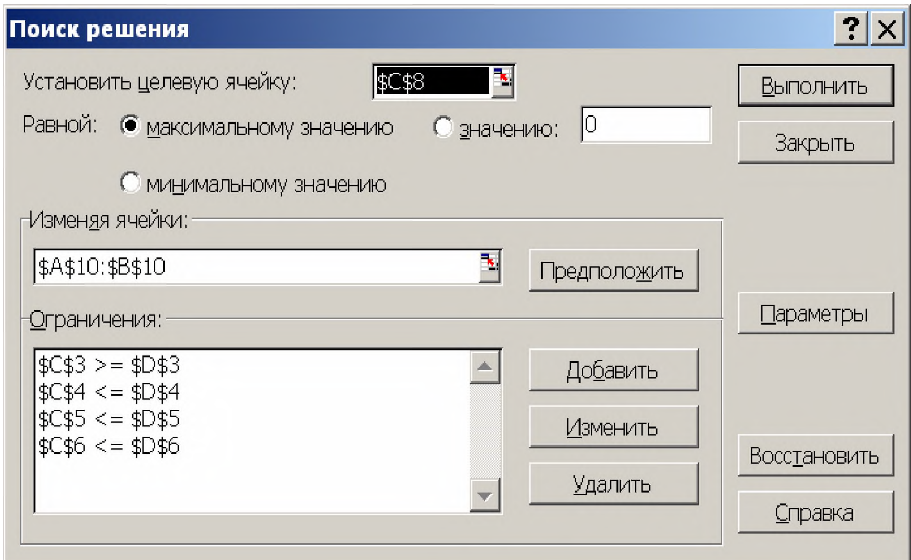

В меню „Сервис” \ „Поиск решения[37]” вводимо:

– „Установить целевую ячейку” – клітина в якій розташована формула цільової функції;

– „Изменяя ячейки” – клітини, в яких розташовані поточні значення незалежних змінних;

– „Ограничения” \ кнопка „Добавить”: ліва частина формули поточного обмеження „Ссылка на ячейку”, знак в обмеженні „≥, ≤, =” і права частина рівняння обмеження „Ограничение:”.

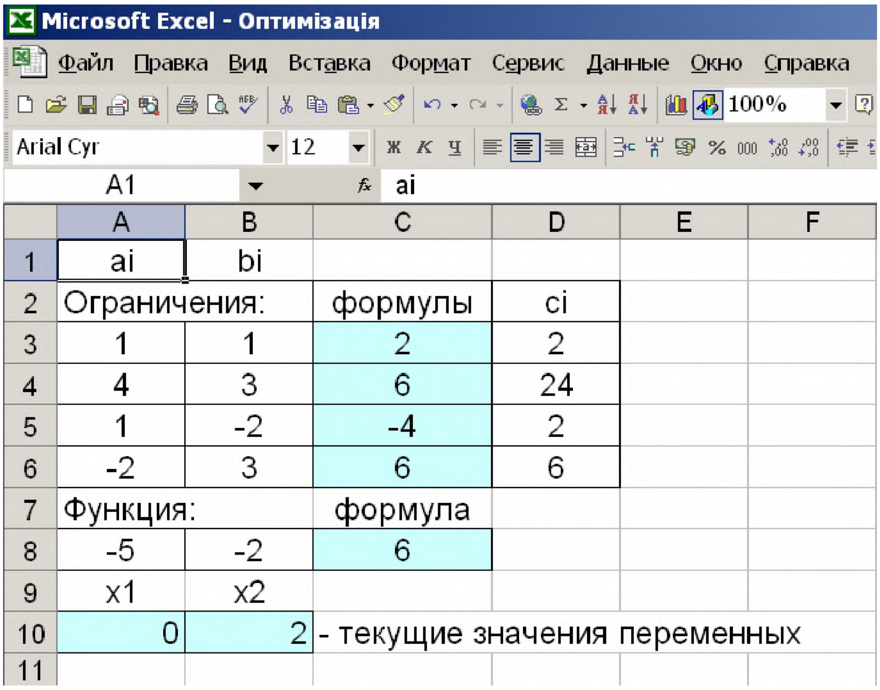
– вибрати „•” вид оптимуму: максимум чи мінімум.




[36] Сервис \ Параметры... \ закладка „Вид” \ √ „Формулы”.

[37] „Сервис” \ „Надстройки...” \ v „Поиск решения”. Якщо компонент „Поиск решения” не знайдено, то необхідно доустановити його через Пуск \ Настройка \ Панель управления \ Установка и удаление программ.

Внаслідок натискання кнопки „Выполнить” результат пошуку оптимального значення функції подається на останньому рисунку.




| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ai | bi | | | | |
| 2 | Ограничения: | | формулы | ci | | |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 4 | 4 | 3 | 6 | 24 | | |
| 5 | 1 | -2 | -4 | 2 | | |
| 6 | -2 | 3 | 6 | 6 | | |
| 7 | Функция: | | формула | | | |
| 8 | -5 | -2 | 6 | | | |
| 9 | x1 | x2 | | | | |
| 10 | 0 | 2 | - текущие значения переменных | | | |
| 11 | | | | | | |

В клітинах A10, B10 – значення незалежних змінних x1 і x2, при яких функція набуває максимального значення в клітині C8, а також в клітинах C3-C6 – оптимальні значення кожного з обмежень.

Необхідно відмітити, що цільова функція може бути багатофакторною ($x_1$, $x_2$, ...) і не тільки лінійною $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$, а будь-якою функцією лінійною за параметрами $y = b_0 + b_1 f_1(x_1) + b_2 f_2(x_2) + \ldots$ та нелінійною за параметрами, наприклад $y = b_1 f_1(x_1)^a + b_2 f_2(x_2)^b + \ldots$, де $f_1$, $f_2$, ... – відомі функції від незалежних змінних. Однак, не можна гарантувати, що знайдений оптимум є глобальним, тобто може бути знайдений один з локальних оптимумів.

*Завдання з лінійного програмування*

Знайти екстремум цільової функції засобами MS Excel за даним таблиці Н.1.

Таблиця Н.1 – **Варіанти завдання**

| Варіант | Екстремум | Цільова функція | Обмеження |
|---|---|---|---|
| 1 | *max* | $y = 27x_1 + 24x_2$ | $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 101 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 99 \\ x_1 + x_2 \le 37 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 2 | *min* | $y = 5x_1 + 2x_2$ | $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 3 | *min* | $y = 2x_1 + 3x_2 + 16$ | $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 4 | *min* | $y = -2x_1 - 4x_2 + 25$ | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 28 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 5 | *max* | $y = 10x_1 + 12x_2$ | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 415 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 1365 \\ 2x_1 + x_2 \le 650 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 6 | *min* | $y = 2x_1 + 8x_2$ | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 7 | *max* | $y = 3x_1 + 3x_2$ | $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 8 | *max* | $y = 24x_1 + 16x_2$ | $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 864 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 945 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 864 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 9 | *min* | $y = 10x_1 + 2x_2$ | $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 9 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |
| 10 | *max* | $y = 350x_1 + 150x_2$ | $\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \le 100 \\ 40x_1 + 20x_2 \le 190 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0$ |

ДОДАТОК П

# ПРОГРАМА ОПТИМІЗАЦІЇ ОБ'ЄКТА ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ БАЖАНОСТІ

Побудова інтерфейсу користувача аналогічна апроксимації за способом Чебишева до слів “End Sub”. Далі діємо наступним чином:

– замість слів “End Sub” вставляємо текст програми наведений нижче;

– на початку[38] програми вставляємо наступний рядок:

Dim Ymin(), Ymax(), Bo(), B1(), y(), yT(), d(), m

– в рядки програми виділені курсивом необхідно внести дані користувача:

кількість факторів *k*;

кількість вихідних змінних *m*;

гірше та краще значення *i* вихідної змінної[39]:

*Ymin(i) =* число*: Ymax(i) =* число;

границі інтервалу сканування за *i* незалежною змінною:

початок *MinArr(i) =* число, кінець *MaxArr(i) =* число;

вид кожної з *m* функцій в підпрограмі Otcliki;

– запустити програму.

*Використання програми для пошуку максимуму (мінімуму) функції за методом сканування.* Программа дозволяє оптимізувати тільки одну функцію. З цією метою в текст програми необхідно[40] внести наступні зміни:

– кількість вихідних змінних *m* = 1;

– для пошуку мінімуму функції замість рядка “ScanMinimum = 0” написати “ScanMinimum = 1E+101”, а замість – “If f > ScanMinimum Then” написати “If f < ScanMinimum Then”;

– в підпрограмі “Private Sub FG(x(), Di)” замість наступних стрічок до рядка “End Sub” написати 2 наступні:

Call Otcliki(x()) 'расчет всех откликов в точке

Di = y(1);

– записати вид функції в підпрограмі “Private Sub Otcliki(x())”, наприклад, $y = 2x_1^2 - 7\ln(x_2)$, як y(1) = 2 * x(1) ^ 2 – 7 * log(x(2));

– видалити рядок “Pr$ = Pr$ + "Значение функции желательности D=" + Str(f) + Enter”.

---

[38] Аналогічно програмі апроксимації функції за МНК (додаток М).

[39] Якщо кількість залежних змінних *m* > 2, то наступні „гірше” та „краще” значення кожної з *j* вихідних змінних наводяться додатковими *j* рядками. Це стосується також границь інтервалу сканування (*k* > 2) і вигляду кожної з функцій, так наприклад при *k* = 2 факторам, *m* = 3 незалежні змінні та вигляду третьої залежної змінної $y_3 = 2x_1^2 - 7\ln(x_2)$, ця функція запишеться в програмі наступним чином: y(3) = 2 * x(1) ^ 2 – 7 * log(x(2)).

[40] Не забувати вводити кількість факторів *k* та границі інтервалу сканування: *MinArr(i) =* число, *MaxArr(i) =* число. Гірше та краще значення залишити тільки для 1-ї вихідної змінної “Ymin(1) = 3: Ymax(1) = 6” без коригування цифр (на результат вони не впливають), а наступний рядок “Ymin(2) = 3: Ymax(2) = 6” для $y_2$ видалити.

```
'************************************************************
'**************** Функция желательности ****************
'************************************************************
Pr$ = "Определение оптимума функции методом
сканирования" + Chr(13) + Chr(10)
Dim Enter As String: Enter = Chr(13) + Chr(10)
Pr$ = Pr$ + Enter

k = 1           'количество факторов
hstep = 0.01  'шаг сканирования
ReDim MinArr(k), MaxArr(k), OptPoint(k)

m = 2           'количество выходных переменных
ReDim x(k)
ReDim y(m)  'значения выходных переменных
Dim KBF      'количество вычислений значений функции

ReDim Ymin(m), Ymax(m)          'худшее и лучшее значения
Ymin(1) = 3: Ymax(1) = 6    'y1
Ymin(2) = 3: Ymax(2) = 6    'y2

ReDim Bo(m), B1(m)
Call BoB
ReDim d(m)  'безразмерная шкала d
ReDim yT(m) 'y`

'начало и конец интервала сканирования
MinArr(1) = 0: MaxArr(1) = 60   'по переменной x1

Pr$ = Pr$ + "Ограничения:" + Enter
For i = 1 To k
  Pr$ = Pr$ + "x" + Str(i) + " =" + Str(MinArr(i)) + " -" +
Str(MaxArr(i)) + Enter
Next
Pr$ = Pr$ + Enter
```

```
For i = 1 To k
 x(i) = MinArr(i)
 OptPoint(i) = MinArr(i)
Next

ScanMinimum = 0
Do While x(k) <= MaxArr(k)
  Do While x(1) <= MaxArr(1)
    FG x(), f
    KBF = KBF + 1
    If f > ScanMinimum Then
      ScanMinimum = f
      For i = 1 To k
        OptPoint(i) = x(i)
      Next
    End If
    x(1) = x(1) + hstep
  Loop

  i = 1
  Do While x(i) > MaxArr(i) 'выполнять пока x(i) > MaxArr(i)
    If i = k Then Exit Do
     x(i) = MinArr(i)
     i = i + 1
     x(i) = x(i) + hstep
  Loop
Loop

Pr$ = Pr$ + "Координаты точки оптимума:" + Enter
For i = 1 To k
 x(i) = OptPoint(i)
 Pr$ = Pr$ + "x" + Str(i) + "="
 Pr$ = Pr$ + Str(x(i)) + Enter
Next
```

```
    Pr$ = Pr$ + Enter
Pr$ = Pr$ + "Оптимальное значение отклика в точке
оптимума:" + Enter
Call Otcliki(x())
For i = 1 To m
  Pr$ = Pr$ + "y" + Str(i) + " = " + Str(y(i)) + Enter
Next

Call FG(x(), f)
KBF = KBF + 1
Pr$ = Pr$ + Enter
Pr$ = Pr$ + "Значение функции желательности D=" + Str(f) + Enter
Pr$ = Pr$ + "Количество вычислений значений функции" +
Str(KBF) + " раз" + Enter

Screen.Text = Pr$
End Sub

Private Sub BoB()
dx = 0.2: dl = 0.8      'dхудш dлучш
Yl = -Log(-Log(dl))  'Y'лучш
Yx = -Log(-Log(dx))'Y'худш
For i = 1 To m
  B1(i) = (Yx - Yl) / (Ymin(i) - Ymax(i))
  Bo(i) = Yl - Ymax(i) * B1(i)
Next
End Sub

Private Sub FG(x(), Di)
Call Otcliki(x())       'расчет всех откликов в точке
For i = 1 To m
  yT(i) = Bo(i) + B1(i) * y(i)  'y`
  d(i) = Exp(-Exp(-yT(i)))    'd
Next i
```

```
'расчитаем общую функцию желательности как среднее
'геометрическое частных
Di = 1
For i = 1 To m
  Di = Di * d(i)
Next i
Di = Di ^ (1 / m)
End Sub

Private Sub Otcliki(x())
y(1) = 1.047 * Exp(0.05 * x(1))
y(2) = 21.148 * Exp(-0.05 * x(1))
End Sub
```

Результати[41] розрахунку за програмою (приклад 3.24)

```
Результаты расчета программы
Определение оптимума функции методом сканирования

Ограничения:
x 1 = 0 - 60

Координаты точки оптимума:
x 1= 30.0600000000019

Оптимальное значение отклика в точке оптимума:
y 1 =  4.70642657862371
y 2 =  4.70462157012442

Значение функции желательности D= .592495756027648
Количество вычислений значений функции 6002 раз
```

---

[41] точність розрахунків з використанням програми незначно відрізняється від наведених в прикладі 3.24, оскільки вони виконані під операційною системою DOS

*Завдання з функції бажаності*

Знайти максимальні компромісні значення вихідних змінних $y_1$ і $y_2$ об′єкта від вхідної змінної $x$ за даними наведеними в таблиці П.1 з точністю пошуку 0,01. Обмеження $y_i^{гірше}$, $y_i^{краще}$ обрати самостійно.

Таблиця П.1 – **Варіанти завдання**

| Варіант | Інтервал $x$ | Функції | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,6 –14,6 | $y_1 = 24{,}19952x^{(-0{,}5353715)}$ | $y_2 = \dfrac{x}{0{,}8202718 - 2{,}231294 \cdot 10^{-2}x}$ |
| 2 | 0,1 – 9,1 | $y_1 = \dfrac{1}{0{,}1137171 - 7{,}995669 \cdot 10^{-3}x}$ | $y_2 = 25{,}97811 \cdot 0{,}6812918^{x}$ |
| 3 | 1 – 50 | $y_1 = 2{,}453233x^{0{,}349999}$ | $y_2 = 12{,}99144 - 4{,}605148\lg(x)$ |
| 4 | 0 – 30 | $y_1 = 4{,}6x^{0{,}48}$ | $y_2 = 22\ell^{-0{,}15x}$ |
| 5 | 1 – 26 | $y_1 = 7{,}766982 \cdot 1{,}071774^{x}$ | $y_2 = 36{,}68407\lg(x) - 12{,}95212$ |
| 6 | 10 – 300 | $y_1 = \dfrac{x}{0{,}5 + 0{,}002x}$ | $y_2 = 542{,}8351 - 230{,}2601\lg(x)$ |
| 7 | 0,5 – 24,5 | $y_1 = 3{,}189343 + 10{,}18363\lg(x)$ | $y_2 = 13{,}52312 \cdot 0{,}9330329^{x}$ |
| 8 | 1 – 18,5 | $y_1 = 5{,}398521 \cdot x^{0{,}2295372}$ | $y_2 = \dfrac{1}{0{,}0675 + 0{,}001x}$ |
| 9 | 0,5 – 15 | $y_1 = \dfrac{x}{0{,}025 + 0{,}005x}$ | $y_2 = 100 - \dfrac{50}{x}$ |
| 10 | 0 – 25 | $y_1 = 9{,}99407 \cdot \ell^{7{,}003149 \cdot 10^{-2}x}$ | $y_2 = 30\ell^{-0{,}09x} + 0{,}005x^3$ |

ДОДАТОК Р

## ВИКОРИСТАННЯ MS EXCEL ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ МОДЕЛІ, НЕЛІНІЙНОЇ ЗА ПАРАМЕТРАМИ

*Приклад* Р.1

На основі статистичних даних показника $y$ і фактора $x$, наведених у таблиці Р.1, знайти параметри моделі та визначити її адекватність за $F$-відношенням, якщо припустити, що залежність між фактором $x$ і показником $y$ має вид:

$$\hat{y} = b_1 + b_2 x^a + b_3 x^b$$

Таблиця Р.1 – **План експерименту *X* і результати дослідів *Y***

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 |
| $y$ | 100,5005 | 11,6516 | 4,8125 | 3,7413 | 5,0151 | 8,6469 | 15,3722 | 26,2569 | 42,6065 | 65,9375 |

*Розв'язок*

Перед розв'язком задачі необхідно засвоїти матеріал додатків Е і Н.

Для розрахунку коефіцієнтів моделі необхідно:

– ввести вихідні дані $x$ та $y$ в діапазони A3:B12 (рисунок Р.1);

– надати початкових значень[42] коефіцієнтам $a$ і $b$ в клітинах E19, F19;

– побудувати матриці (формули наведено на рисунку Р.2 в позначення MS Excel):

F – плану експерименту, побудованого відповідно з видом моделі;

Ft – транспоновану до F;

I – інформаційну;

D – дисперсійну;

FtY – добуток транспонованої до F на вихідну змінну;

B – лінійних коефіцієнтів моделі;

y^ – прогнозних значень вихідної змінної;

e – квадрат похибки вихідних даних експериментальних $y$ і пронозних y^;

– розрахувати цільову функцію z в клітині H19.

В меню „Сервис” \ „Поиск решения” вводимо в поля відповідні значення наведені в дужках:

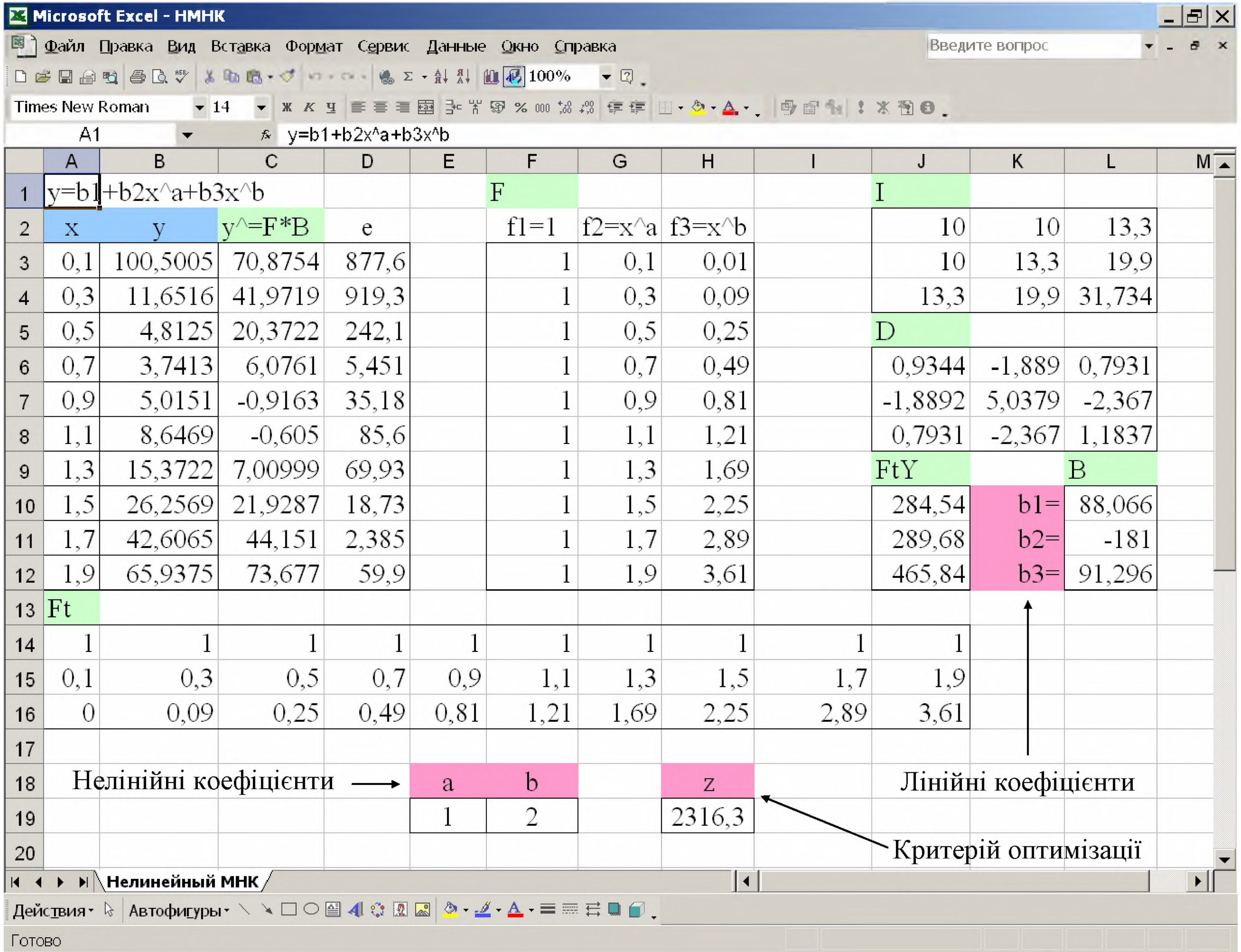
– „Установить целевую ячейку” – клітина в якій розташована функція, що оптимізується ($H$19), “Равной:” • “минимальному значению”;

– „Изменяя ячейки” – клітини з поточними значеннями нелінійних коефіцієнтів $a$ і $b$ ($E$19:$F$19).

Внаслідок натискання кнопки „Выполнить” результат пошуку мінімального значення функції $z$ і усіх коефіцієнтів наведено на рисунку Р.3.

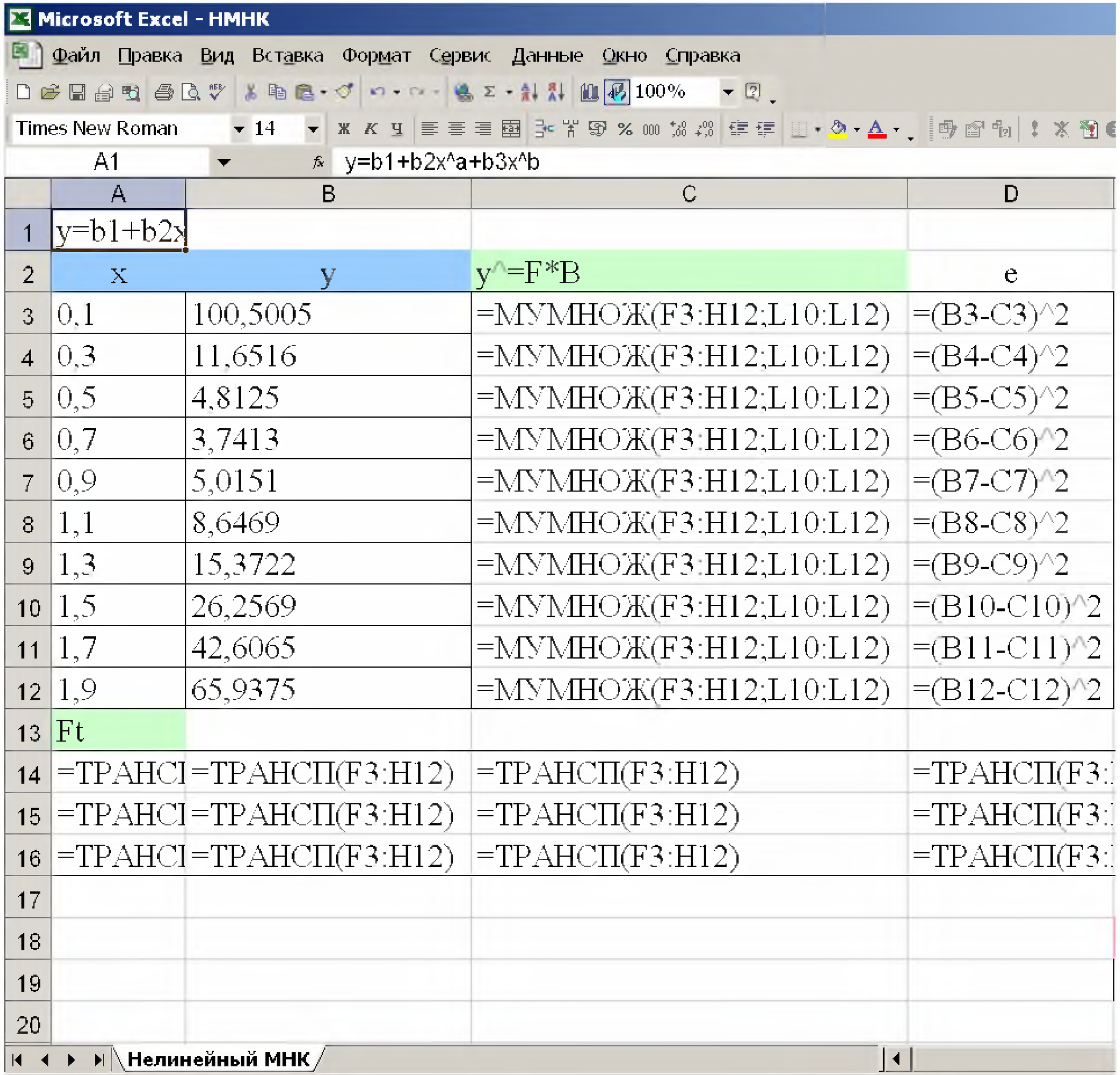
---

[42] При використанні методу Ньютона початкові значення коефіцієнтів $a$ і $b$ впливають на збіжність отриманого результату з дійсними значеннями коефіцієнтів; якщо різні початкові значення коефіцієнтів приводять до того ж мінімуму функції $z$, то можна вважати оптимум глобальним.




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | y=b1+b2x^a+b3x^b | | | | | F | | | | I | | |
| 2 | x | y | y^=F*B | e | | f1=1 | f2=x^a | f3=x^b | | 10 | 10 | 13,3 |
| 3 | 0,1 | 100,5005 | 70,8754 | 877,6 | | 1 | 0,1 | 0,01 | | 10 | 13,3 | 19,9 |
| 4 | 0,3 | 11,6516 | 41,9719 | 919,3 | | 1 | 0,3 | 0,09 | | 13,3 | 19,9 | 31,734 |
| 5 | 0,5 | 4,8125 | 20,3722 | 242,1 | | 1 | 0,5 | 0,25 | | D | | |
| 6 | 0,7 | 3,7413 | 6,0761 | 5,451 | | 1 | 0,7 | 0,49 | | 0,9344 | -1,889 | 0,7931 |
| 7 | 0,9 | 5,0151 | -0,9163 | 35,18 | | 1 | 0,9 | 0,81 | | -1,8892 | 5,0379 | -2,367 |
| 8 | 1,1 | 8,6469 | -0,605 | 85,6 | | 1 | 1,1 | 1,21 | | 0,7931 | -2,367 | 1,1837 |
| 9 | 1,3 | 15,3722 | 7,00999 | 69,93 | | 1 | 1,3 | 1,69 | | FtY | | B |
| 10 | 1,5 | 26,2569 | 21,9287 | 18,73 | | 1 | 1,5 | 2,25 | | 284,54 | b1= | 88,066 |
| 11 | 1,7 | 42,6065 | 44,151 | 2,385 | | 1 | 1,7 | 2,89 | | 289,68 | b2= | -181 |
| 12 | 1,9 | 65,9375 | 73,677 | 59,9 | | 1 | 1,9 | 3,61 | | 465,84 | b3= | 91,296 |
| 13 | Ft | | | | | | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 15 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | | |
| 16 | 0 | 0,09 | 0,25 | 0,49 | 0,81 | 1,21 | 1,69 | 2,25 | 2,89 | 3,61 | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | a | b | | z | | | | |
| 19 | | | | | 1 | 2 | | 2316,3 | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | |

Рисунок Р.1 – **Вихідні дані для розрахунку коефіцієнтів моделі**



Microsoft Excel - НМНК

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

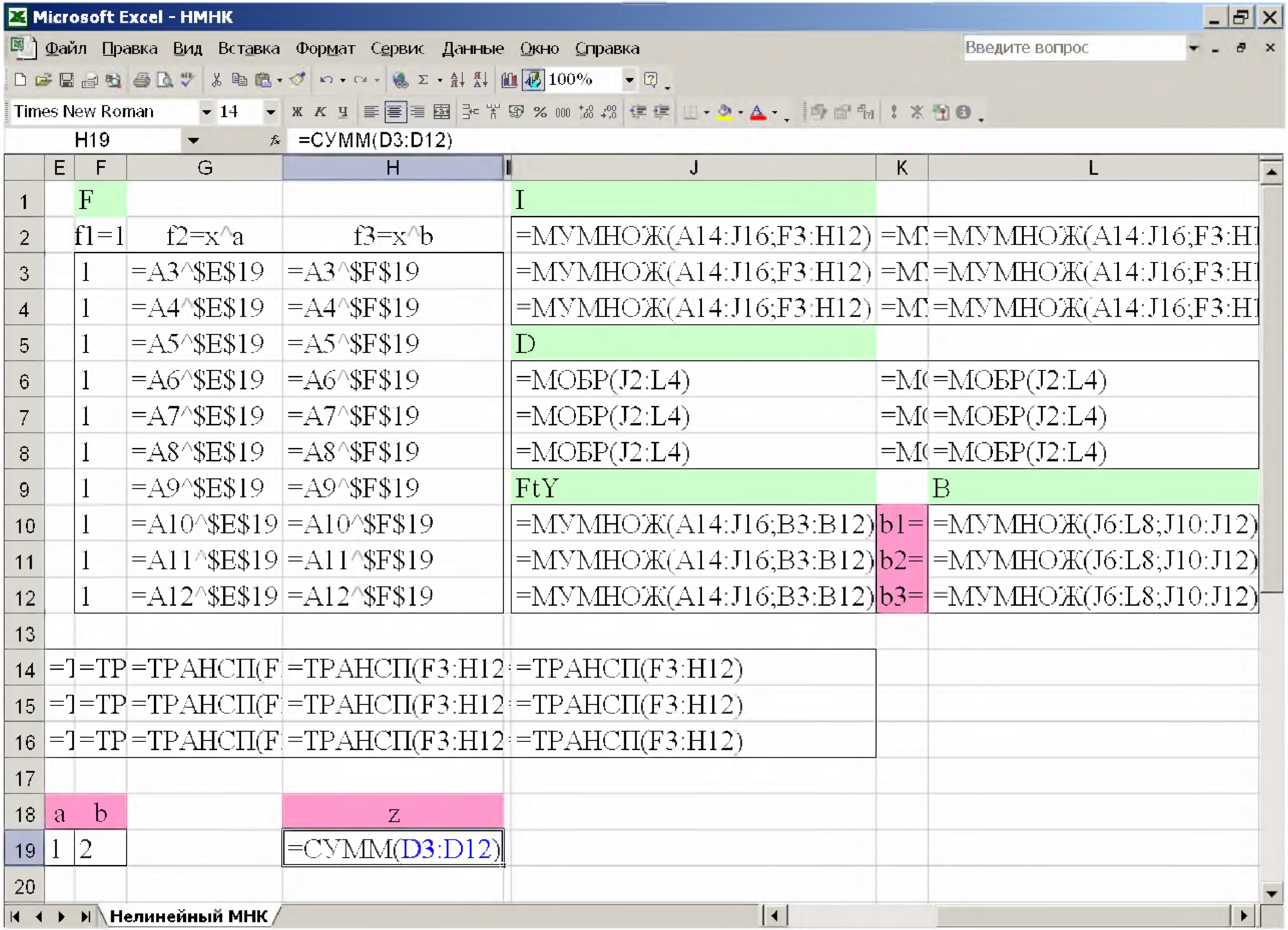
Times New Roman 14 100%

A1 y=b1+b2x^a+b3x^b

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | y=b1+b2x | | | |
| 2 | x | y | y^=F*B | e |
| 3 | 0,1 | 100,5005 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B3-C3)^2 |
| 4 | 0,3 | 11,6516 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B4-C4)^2 |
| 5 | 0,5 | 4,8125 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B5-C5)^2 |
| 6 | 0,7 | 3,7413 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B6-C6)^2 |
| 7 | 0,9 | 5,0151 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B7-C7)^2 |
| 8 | 1,1 | 8,6469 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B8-C8)^2 |
| 9 | 1,3 | 15,3722 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B9-C9)^2 |
| 10 | 1,5 | 26,2569 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B10-C10)^2 |
| 11 | 1,7 | 42,6065 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B11-C11)^2 |
| 12 | 1,9 | 65,9375 | =МУМНОЖ(F3:H12;L10:L12) | =(B12-C12)^2 |
| 13 | Ft | | | |
| 14 | =ТРАНСІ | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3: |
| 15 | =ТРАНСІ | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3: |
| 16 | =ТРАНСІ | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3:H12) | =ТРАНСП(F3: |
| 17 | | | | |
| 18 | | | | |
| 19 | | | | |
| 20 | | | | |

Нелинейный МНК

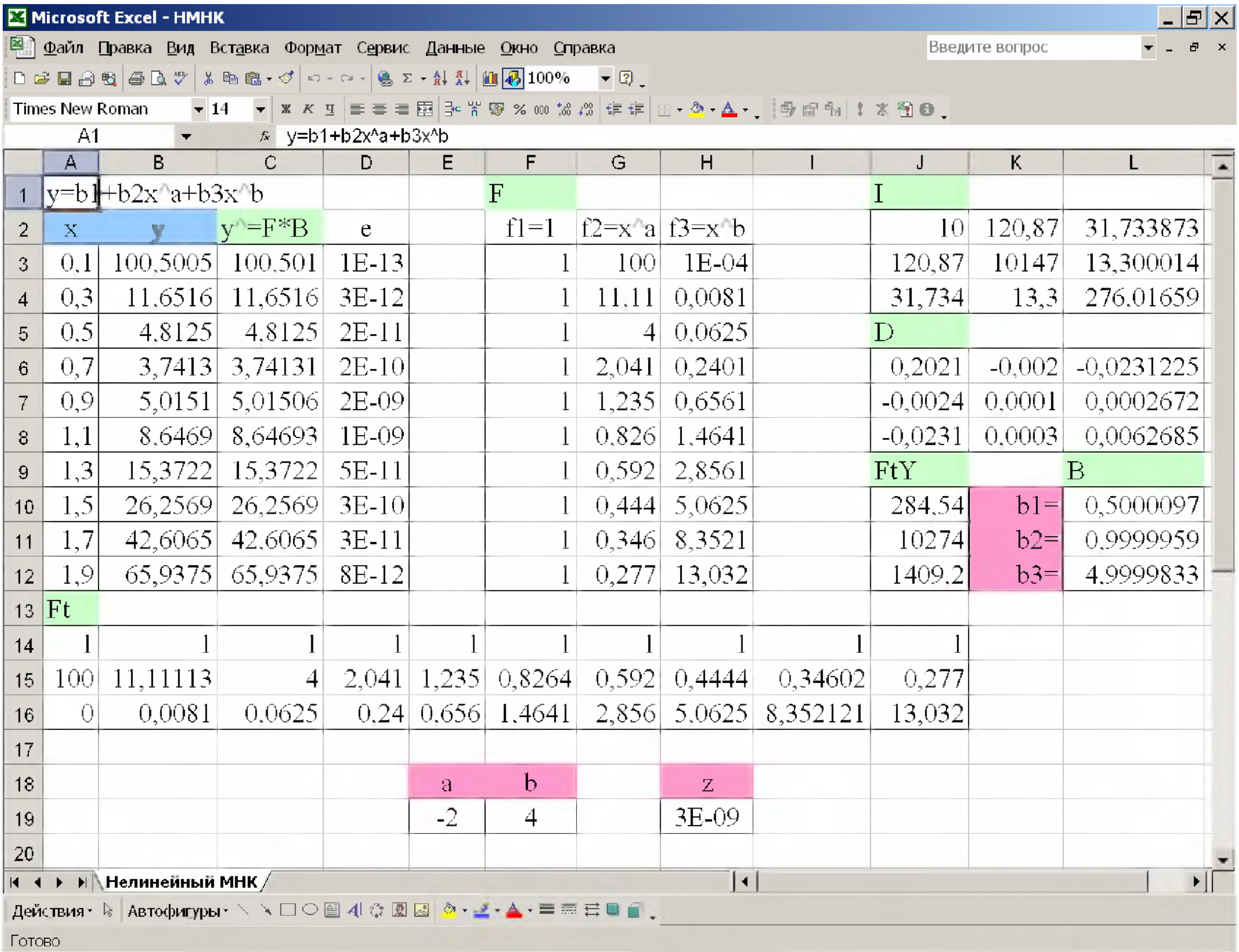
Рисунок Р.2 – **Формули розрахунків коефіцієнтів наведені в позначеннях MS Excel**





| | E | F | G | H | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | F | | | I | | |
| 2 | | f1=1 | f2=x^a | f3=x^b | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H12) | =МУ | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H |
| 3 | | 1 | =A3^$E$19 | =A3^$F$19 | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H12) | =МУ | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H |
| 4 | | 1 | =A4^$E$19 | =A4^$F$19 | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H12) | =МУ | =МУМНОЖ(A14:J16;F3:H |
| 5 | | 1 | =A5^$E$19 | =A5^$F$19 | D | | |
| 6 | | 1 | =A6^$E$19 | =A6^$F$19 | =МОБР(J2:L4) | =МС | =МОБР(J2:L4) |
| 7 | | 1 | =A7^$E$19 | =A7^$F$19 | =МОБР(J2:L4) | =МС | =МОБР(J2:L4) |
| 8 | | 1 | =A8^$E$19 | =A8^$F$19 | =МОБР(J2:L4) | =МС | =МОБР(J2:L4) |
| 9 | | 1 | =A9^$E$19 | =A9^$F$19 | FtY | | B |
| 10 | | 1 | =A10^$E$19 | =A10^$F$19 | =МУМНОЖ(A14:J16;B3:B12) | b1= | =МУМНОЖ(J6:L8;J10:J12) |
| 11 | | 1 | =A11^$E$19 | =A11^$F$19 | =МУМНОЖ(A14:J16;B3:B12) | b2= | =МУМНОЖ(J6:L8;J10:J12) |
| 12 | | 1 | =A12^$E$19 | =A12^$F$19 | =МУМНОЖ(A14:J16;B3:B12) | b3= | =МУМНОЖ(J6:L8;J10:J12) |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | =Т | =ТР | =ТРАНСП(F | =ТРАНСП(F3:H12 | =ТРАНСП(F3:H12) | | |
| 15 | =Т | =ТР | =ТРАНСП(F | =ТРАНСП(F3:H12 | =ТРАНСП(F3:H12) | | |
| 16 | =Т | =ТР | =ТРАНСП(F | =ТРАНСП(F3:H12 | =ТРАНСП(F3:H12) | | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | a | b | | z | | | |
| 19 | 1 | 2 | | =СУММ(D3:D12) | | | |
| 20 | | | | | | | |

Продовження рисунка Р.2




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | y=b1+b2x^a+b3x^b | | | | | F | | | | I | | |
| 2 | x | y | y^=F*B | e | | f1=1 | f2=x^a | f3=x^b | | 10 | 120,87 | 31,733873 |
| 3 | 0,1 | 100,5005 | 100,501 | 1E-13 | | 1 | 100 | 1E-04 | | 120,87 | 10147 | 13,300014 |
| 4 | 0,3 | 11,6516 | 11,6516 | 3E-12 | | 1 | 11,11 | 0,0081 | | 31,734 | 13,3 | 276,01659 |
| 5 | 0,5 | 4,8125 | 4,8125 | 2E-11 | | 1 | 4 | 0,0625 | | D | | |
| 6 | 0,7 | 3,7413 | 3,74131 | 2E-10 | | 1 | 2,041 | 0,2401 | | 0,2021 | -0,002 | -0,0231225 |
| 7 | 0,9 | 5,0151 | 5,01506 | 2E-09 | | 1 | 1,235 | 0,6561 | | -0,0024 | 0,0001 | 0,0002672 |
| 8 | 1,1 | 8,6469 | 8,64693 | 1E-09 | | 1 | 0,826 | 1,4641 | | -0,0231 | 0,0003 | 0,0062685 |
| 9 | 1,3 | 15,3722 | 15,3722 | 5E-11 | | 1 | 0,592 | 2,8561 | | FtY | | B |
| 10 | 1,5 | 26,2569 | 26,2569 | 3E-10 | | 1 | 0,444 | 5,0625 | | 284,54 | b1= | 0,5000097 |
| 11 | 1,7 | 42,6065 | 42,6065 | 3E-11 | | 1 | 0,346 | 8,3521 | | 10274 | b2= | 0,9999959 |
| 12 | 1,9 | 65,9375 | 65,9375 | 8E-12 | | 1 | 0,277 | 13,032 | | 1409,2 | b3= | 4,9999833 |
| 13 | Ft | | | | | | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |
| 15 | 100 | 11,11113 | 4 | 2,041 | 1,235 | 0,8264 | 0,592 | 0,4444 | 0,34602 | 0,277 | | |
| 16 | 0 | 0,0081 | 0,0625 | 0,24 | 0,656 | 1,4641 | 2,856 | 5,0625 | 8,352121 | 13,032 | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | | a | b | | z | | | | |
| 19 | | | | | -2 | 4 | | 3E-09 | | | | |
| 20 | | | | | | | | | | | | |

Рисунок Р.3 – **Результат розрахунку параметрів нелінійної моделі**

Таким чином, шукана модель має вид:

$$\hat{y} = 0{,}5000097 + 0{,}9999959x^{-2} + 4{,}9999833x^{4}$$

з $F$-відношенням, розрахованим за (3.121), що дорівнює $2{,}392109 \cdot 10^{10}$.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Ахназарова С. Л., Кафаров В. В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: учеб. пособие. Москва: Высш. шк., 1985. – 320 с.
2. Брановицкая С. В., Медведев Р. Б., Фиалков Ю. А. Вычислительная математика в химии и химической технологии. Київ: Вища школа, 1986. – 216 с.
3. Гайдачок В. М., Затхей Б. І., Лінник М. К. Теорія і технологія наукових досліджень. Львів : Афіша, 2006. – 232 с.
4. Данилкович А. Г. Основи наукових досліджень у вищому навчальному закладі: навч. посіб. Київ, 2010. – 296 с.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посібник. Київ: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Зедгинидзе И. Г. Планирование эксперимента при исследовании многокомпонентных систем. Москва: Наука, 1976. – 392 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. – 2 изд., перераб. и доп. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 704 с.
8. Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1983. – 384 с.
9. Ковальчук В. В., Моїсєєв Л. М. Основи наукових досліджень. Київ: ВД «Професіонал», 2004. – 198 с.
10. Концевой А. Л., Астрелін І. М., Концевой С. А. Методологія наукових досліджень: метод. вказівки до проведення комп'ютерних і практичних занять. Київ: НТУУ «КПІ», 2006. – 80 с.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ. Москва: Наука, 1968. – 720 с.
12. Основы научных исследований: учеб. для техн. вузов/В. И. Крутов и др. Москва: Высш. шк., 1989. – 400 с.
13. Крушельницька В. Методологія та організація наукових досліджень. Київ: Кондор, 2003. – 192 с.
14. Кузнецов Ю. М. Теорія розв'язання творчих задач. Київ: ТОВ «ЗМОК» ПП «ГНОЗИС», 2003. – 294 с.
15. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование: учеб. пособие. –2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1980. – 304 с.
16. Левин Я. М., Левин Дж. Р. Ответы на актуальные вопросы по Internet: пер. с англ. Київ: НИПФ-«ДиаСофг Лтд», 1996. – 384 с.
17. Лапач С. Н., Чубенко А. В., Бабич П. Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием EXCEL: изд. 2, доп. Київ: МОРИОН, 2001. – 408 с.

18. Медведєв Р. Б. Керування хіміко-технологічними процесами: навч. посібник. Київ: ІСДО, 1994. – 160 с.

19. Наука та інноваційна діяльність в Україні: статист. зб./відпов. за випуск Л. Г. Луценко. Київ: Держкомстат, 2007. – 340 с.

20. Основи методології та організації наукових досліджень: навч посібник/А. Є. Конверський (ред.). Київ: Центр учбової літератури, 2010. 352 с.

21. Пілащенко В. Наукові дослідження. Методологія та організація. Київ: Вища школа, 2003. – 304 с.

22. Пілюшенко В. Л., Крабах І. В., Словенко Е. І. Наукове дослідження: організація, методологія, інформаційне забезпечення. Київ: Лібра, 2004. – 344 с.

23. Пилипчук М. І., Григор'єв А. С., Шостак В. В. Основи наукових досліджень: підручник. Київ: Знання, 2007. – 272 с.

24. Перспективний інноваційний розвиток України. *Зб. наукових статей*/за ред. Я. А. Жаліна. Київ: Альтерпрес, 2008. – 160 с.

25. П'ятницька-Позднякова І. С. Основи наукових досліджень у вищій школі. Київ: ЦНЛ, 2003. – 116 с.

26. Рузинов Л. П., Слободчикова Л. П. Планирование эксперимента в химии и химической технологии. Москва: Химия, 1980. – 280 с.

27. Стеченко Д. М., Чмир О. С. Методологія наукових досліджень: підручник. Київ: Знання, 2007. – 317 с.

28. Чумак В. Л., Іванов С. В., Максимюк М. Р. Основи наукових досліджень: підручник. Вид. 2, виправлене. Київ: НАУ, 2012. – 360 с.

29. Шейко В. М., Кушнаренко Н. М. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: підручник. Київ: Знання, 2006. – 307 с.

30. Шейк Х. Теория инженерного эксперимента/пер. с англ. Москва: 1972. – 381 с.

31. Шишка Р. Б. Організація наукових досліджень та підготовка магістерських і дисертаційних робіт. Харьків: Еспада, 2007. – 368 с.

32. Шут М., Сергієчко В. Науково-дослідна робота з фізики у середніх та вищих навчальних закладах: навч. посібник. Київ: Шкільний світ, 2004. – 128 с.

33. Філіпченко А. С. Основи наукових досліджень: конспект лекцій. Київ: Академвидав, 2005. – 208 с.

34. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: пер. с англ./под ред. М. Л. Быховского. Москва: Мир, 1975. – 536 с.

35. Довідник здобувача наукового ступеня: зб. нормат. докум. та інформ. матеріалів з питань атестації наукових кадрів вищої кваліфікації/ упоряд. Ю. І. Цеков. – 3 вид. Київ: Толока. Ред. “Бюл. вищ. атестат. коміс. України”, 2004. – 69 с.

36. ДСТУ 3008:2015 Інформація та документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура та правила оформлення. – Чинний від 06.22.2015. – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2016. – 26 с.

37. ДСТУ 8302:2015 Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання. – Чинний від 06.22.2015. – Київ: ДП «УкрНДНЦ», 2016. – 16 с.

38. ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання (ГОСТ 7.1-2003, IDT). – Чинний від 01.07.2007. – Київ: Держспоживстандарт України, 2007. – 47 с.

39. ДСТУ 3582-97 Скорочення слів в українській мові у бібліографічному описі. Загальні вимоги і правила. – Київ: Держстандарт України, 1998. – 25 с.

Навчальне видання

Данилкович Анатолій Григорович
Злотенко Борис Миколайович

# МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ З ОСНОВАМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ

За редакцією авторів
Оригінал-макет підготовлено Данилковичем А. Г.

Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 19,70.
Наклад 300 прим. Зам. 16-025

Видавець і виготовлювач «Видавництво «Фенікс»
Віддруковано на власному обладнанні
Св-во суб’єкта видавничої справи ДК №271 від 07.12.2000 р.
03067, м. Київ, вул. Шутова, 13б
www.fenixprint.com.ua