

УДК 539.3:620.3

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМАЦІЇ ЕЛАСТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ СВІТИЛЬНИКА З НАНОМОДИФІКОВАНОГО СИЛІКОНУ

Бабута В.Є., студент

*Київський національний університет технологій та дизайну*

Волох Л.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент

*Київський національний університет технологій та дизайну*

*Ключові слова:* силікон, деформації, гіпереластичні моделі, енергія деформації, густина енергії деформації.

Сучасний розвиток предметного дизайну та інженерії пов'язаний із активним використанням нових матеріалів, таких як полімери, нано- та мікрокомпозиції. Вони дають змогу створювати об'єкти, що можуть змінювати свою форму та адаптуватися до умов.

Серед цих матеріалів важливе місце займають силіконові еластомери, які характеризуються високою еластичністю, довговічністю та здатністю витримувати значні деформації без руйнування. У світловому дизайні все більшого поширення набувають динамічні об'єкти, здатні змінювати форму під дією механічних або електромеханічних впливів. Одним із перспективних підходів є використання еластичних оболонок, де трансформація геометрії здійснюється за допомогою системи натягнутих струн або тросів.

Разом із тим, процес деформації таких оболонок є складним і визначається як властивостями матеріалу, так і геометрією конструкції та характером навантажень. У зв'язку з цим виникає необхідність застосування математичного моделювання для дослідження напружено-деформованого стану та прогнозування поведінки системи.

Зокрема, для опису механічної поведінки силіконових еластомерів при великих деформаціях широко використовуються гіпереластичні моделі, які базуються на енергетичному підході. До найбільш поширених належать моделі Нео-Гука (Neo-Hookean), Муни-Рівліна, Огдена, Єо та Арруда-Бойса, кожна з яких дозволяє з різним ступенем точності враховувати нелінійні властивості матеріалу. Використання цих моделей дає змогу адекватно описати поведінку еластичних оболонок і підвищити точність проєктування динамічних світлових об'єктів.

Модель Нео-Гука (Neo-Hookean) -- найпростіша гіпереластична модель, яка базується на залежності енергії деформації від першого інваріанта тензора деформацій. Вона добре описує поведінку еластомерів

при малих і помірних деформаціях, однак при великих розтягненнях її точність суттєво знижується.

Дана модель записується за допомогою формули

$$W = C_1(I_1 - 3)$$

де  $W$ -це густина енергії деформації (strain energy density),

$C_1$ - властивості матеріалу,

$I_1$ – загальна міра розтягнення матеріалу.

Ця модель є інваріантною гіпереластичною моделлю з єдиним параметром жорсткості  $C_1$ , що передбачає залежність енергії деформації лише від першого інваріанта тензора деформації  $I_1$ .

При малих і помірних деформаціях це забезпечує прийнятну апроксимацію напружено-деформованого стану. Однак при великих розтягненнях відбувається систематичне відхилення моделі від експериментальних даних з ряду причин:

*1. Недостатність інваріантного опису*

Залежність лише від  $I_1$  не дозволяє врахувати внесок другого інваріанта  $I_2$ , який стає суттєвим при складних просторових деформаціях і зсувних компонентах, характерних для великих розтягнень еластомерів.

*2. Відсутність опису нелінійної жорсткості*

Реальні силікони демонструють strain stiffening — зростання ефективної жорсткості зі збільшенням деформації, що пов'язано з поступовим вирівнюванням і натягуванням полімерних ланцюгів. У моделі Нео-Гука модуль пружності залишається фактично сталим у межах структури моделі.

*3. Обмеження статистично-молекулярної інтерпретації*

Моделю не враховує кінцеву розтяжність полімерних ланцюгів і їхню ентропійну нелінійність, що призводить до некоректного опису поведінки при наближенні до граничних деформацій.

*4. Наслідок для напруженого стану*

Оскільки напруження визначається як похідна від енергії

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon},$$

лінійна структура  $W(I_1)$  призводить до заниження зростання напружень при великих деформаціях порівняно з експериментально спостережуваними кривими.

Таким чином, модель Нео-Гука є математично коректною для опису гіпереластичної поведінки в області малих деформацій, однак при великих

розтягненнях силікону вона не враховує багатокomпонентність інваріантного опису та нелінійну мікроструктурну перебудову полімерної мережі, що призводить до систематичного розходження з експериментальною механічною відповіддю матеріалу.

#### Модель Муни–Рівліна (Mooney–Rivlin)

$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$  -розширена модель, що враховує перший і другий інваріанти деформації. Забезпечує кращу відповідність експериментальним даним порівняно з моделлю Нео-Гука та широко застосовується для опису гумових і силіконових матеріалів у широкому діапазоні деформацій. З недоліків даної моделі: вона не враховує асиметричну перебудову полімерної сітки при великих деформаціях і обмежена у нелінійних деформаціях.

#### Модель Єо (Yeoh)

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3$$

Це модель, у якій енергія деформації задається як поліном від першого інваріанта. Добре описує великі деформації та є зручною у використанні, оскільки не потребує врахування інших інваріантів. Три параметри  $C_i$  дозволяють гнучко підганяти експериментальні дані без надмірної складності моделі. Вона поєднує відносну простоту математичної структури з достатньою гнучкістю для відтворення ефекту strain stiffening, що робить її особливо придатною для практичного моделювання силіконових матеріалів у інженерних задачах.

#### Модель Огдена (Ogden)

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left( \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right)$$

Це нелінійна модель, що використовує головні розтягнення як основні змінні, що дозволяє уникнути обмежень інваріантного формалізму. Завдяки гнучкій системі параметрів дозволяє з високою точністю описувати поведінку еластомерів при великих деформаціях, зокрема силіконів, та відтворювати анізотропію деформаційного стану навіть при складних навантаженнях. Параметри  $\alpha_i$  забезпечують керувану нелінійність, що дозволяє відтворювати як м'яку, так і різко жорсткіючу поведінку матеріалу.

Модель Огдена є найбільш загальною серед інженерно застосованих гіпереластичних моделей і забезпечує найвищу точність опису великих деформацій силікону, але вимагає складної експериментальної ідентифікації параметрів. Ця модель вимагає даних лише про одноосьове розтягнення (uniaxial tension) та добре описує нелінійну поведінку силікону при помірних і великих деформаціях і часто забезпечує кращу стабільність при чисельному моделюванні (FEM), ніж Ogden, якщо даних мало.

Модель Муни–Рівліна є обмеженою інваріантною гіпереластичною моделлю лінійного типу, яка забезпечує адекватний опис поведінки еластомерів у діапазоні малих і помірних деформацій, однак втрачає точність при переході до сильно нелінійного режиму деформування. Вона набагато точніша за Нео-Гука, добре описує поведінку до 100-200% деформації.

Модель  $\epsilon_0$  представляє собою ефективну поліноміальну апроксимацію залежності від першого інваріанта  $I_1$ , що дозволяє враховувати виражену нелінійність матеріальної відповіді та ефект *strain stiffening* без ускладнення інваріантної структури моделі.

Модель Огдена вважається найбільш гнучкою та точною для опису нелінійної поведінки гуми та силіконів у всьому діапазоні, до руйнування. Вона добре працює, якщо є дані як розтягнення, так і стиснення. Вона базується на головних розтягненнях і забезпечує максимальну гнучкість функціонального опису, що дозволяє з високою точністю відтворювати поведінку силіконових еластомерів у широкому діапазоні великих деформацій.

#### Список використаних джерел

1. Abdusalamov R., Kaplunov J., Itskov M. Discovering asymptotic expansions for problems in mechanics using symbolic regression. *Mechanics Research Communications*. 2023. P. 104197. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104197> (date of access: 11.05.2024).
2. Landajuela, M., Lee, C.S., Yang, J., Glatt, R., Santiago, C.P., Aravena, I., Mundhenk, T., Mulcahy, G. and Petersen, B.K. A unified framework for deep symbolic regression. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2022. 35, pp.33985-33998. URL: <https://openreview.net/forum?id=2FNnBhwJsHK> (date of access: 11.05.2024).
3. Zare M., Ghomi E.R., Venkatraman P.D., Ramakrishna S. Silicone-based biomaterials for biomedical applications: Antimicrobial strategies and 3D printing technologies // *Journal of Applied Polymer Science*. – 2021. – Vol. 138, no. 38. DOI: 10.1002/app.50969