УДК.539.125.5

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ СПЕКТР НЕЙТРОНА У ЦИЛІНДРИЧНІЙ МАГНІТНІЙ ЯМІ

К.В. АВДОНІН, А.П. КЛИМЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

В даній роботі здійснюється пошук хвильових функцій та енергетичного спектру нейтрону, що рухається у магнітному полі з симетрією циліндричного типу

Вперше подібна задача була розглядалась в роботі [1], тобто, квантовомеханічна задача про рух нейтрона в магнітному полі лінійного, нескінченно тонкого провідника. Розв'язок зводиться до гіпергеометричного диференціального рівняння другого порядку в імпульсному просторі. В цьому випадку нормовані, інтегральні розв'язки мають дискретний характер, явний вигляд хвильових функцій представлено у вигляді лінійної комбінації гіпергеометричних функцій, а енергетичний спектр визначається виразом:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{\mu\left(cM_0 I\right)^2}{2\hbar^2} . \tag{1}$$

Ще одна спроба розв'язання подібної задачі була зроблена в роботі [2], німецьких вчених R.Blumter та K.Dietrich. Вони розглядали рух нейтрона повз лінійного провідника зі струмом скінченого радіусу, але спрямовували радіус до нуля, що відповідає випадку, розглянутому в першій роботі. В цій роботі представлено альтернативний шлях розв'язку диференціальних рівнянь за допомогою метода Фробеніуса-Латишевої і показано, що задача представляє не тільки академічний інтерес.

Об'єкти та методи дослідження

В роботі здійснюється пошук хвильових функцій та енергетичного спектру нейтрону, що рухається в магнітному полі з симетрією циліндричного типу за допомогою методу, розробленому в роботах [3] та [4].Розглянемо поперечний рух нейтрону у каналі, що утворюється кільцем паралельних, нескінчено тонких, прямолінійних струмів за допомогою методу, розробленому у роботах [1] та [2]. Напруженість магнітного поля всередині каналу, згідно закону повного струму, дорівнює нулю. Напруженість магнітного поля за межами каналу буде дорівнювати:

$$\mathbf{H} = H\left(r\right)\left\{\mathbf{i}\sin\theta - \mathbf{j}\cos\theta\right\} , \tag{2}$$

де: $H\left(r\right) = \dfrac{NI}{2\pi r}$, I - сила струму в одному провіднику, N - кількість провідників.

Постановка завдання

Рівняння Паулі для нейтрона в магнітному полі має вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi - \frac{e\hbar\mu_0}{2\mu}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{H}\right)\psi = E\psi . \tag{3}$$

Добутку оператора Паулі на вектор напруженості магнітного поля можна надати такий вигляд:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{H} = H\left(r\right)\left(\sigma_x\sin\theta - \sigma_y\cos\theta\right) = H\left(r\right)\begin{pmatrix} 0 & i\exp\left\{-i\theta\right\} \\ -i\exp\left\{i\theta\right\} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Підставляючи вираз (4) у рівняння Паулі (3) отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta\psi_1 + i\exp\{-i\theta\}F(r)\psi_2 + k^2\psi_1 = 0 \\ \Delta\psi_2 - i\exp\{i\theta\}F(r)\psi_1 + k^2\psi_2 = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

в якій введені позначення: $$F(r) = \frac{e\mu_0}{\hbar}H(r)\ ;\ k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}. \tag{6}$$

Якщо шукати хвильові функції у вигляді:

$$\psi_1(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varphi_1(r)}{\sqrt{r}}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)\theta}\ ;\ \psi_2(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varphi_2(r)}{\sqrt{r}}e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}, \tag{7}$$

де m - орбітальне квантове число, то, після підстановки хвильових функцій у вигляді (7) в систему рівнянь (5), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \left(k^2 - \dfrac{m(m-1)}{r^2}\right)\varphi_1 = F(r)\varphi_2 \\ \\ \dfrac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \left(k^2 - \dfrac{m(m+1)}{r^2}\right)\varphi_2 = F(r)\varphi_1 \end{cases} \tag{8}$$

Хвильові функції та енергетичний спектр нейтрона

Помножуючи перше рівняння системи (8) на уявну одиницю і додаючи та віднімаючи його від другого рівняння маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_1}{dr^2} + \left(k^2 - \dfrac{m^2}{r^2}\right)\Phi_1 = g\Phi_2 \\ \dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} + \left(k^2 - \dfrac{m^2}{r^2}\right)\Phi_2 = g^*\Phi_1 \end{cases}; \tag{9}$$

де запроваджені такі позначення:

$$\Phi_1 = \varphi_2 + i\varphi_1\ ;\ \Phi_2 = \varphi_2 - i\varphi_1\ ;\ g = \frac{m}{r^2} + iF, \tag{10}$$

З одержаної системи (9) випливає, що $\Phi_2 = \Phi_1^*$, тобто, система рівнянь (9) фактично еквівалентна одному рівнянню і, окрім цього, випливає, що частинні розв'язки системи (8) повинні бути дійсними функціями. Якщо, наприклад, покласти $\Phi_1(r) \equiv \Phi(r)$, то замість системи (9) можна розглядати одне рівняння:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\Phi = g(r)\Phi^*, \tag{11}$$

а шукані хвильові функції тоді можна знаходити як дійсну та уявну частину функції $\Phi(r)$.

В роботі [3] були отримані частинні розв'язки рівняння типу (11) у вигляді функціонального ряду: Безпосередньою підстановкою можна впевнитись, що одержаний функціональний ряд є ітерацією інтегрального рівняння:

$$\Phi_j = A_j S + S\int_r^{+\infty} S^{-2}\int_{\xi_1}^{+\infty} gS\Phi_j^*(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1 . \qquad (12)$$

Беручи по частинах зовнішній інтеграл у виразі (12) одержимо для знаходження функції $\Phi(r)$ інтегральне рівняння вольтерівського типу:

$$\Phi_1(r) = S + \frac{1}{k}\int_r^{+\infty} D(r,\xi)g\Phi_1^*(\xi)d\xi , \qquad (13)$$

де: $D(r,\xi) = \begin{vmatrix} S(r) & \tilde{S}(r) \\ S(\xi) & \tilde{S}(\xi) \end{vmatrix}$., $\tilde{S}(r)$; $S(r)$ розв'язки однорідного рівняння, відповідного рівнянню (11), пов'язані рівністю: $\tilde{S}(r) = kS(r)\int_b^r S^{-2}(\xi)d\xi$. Особливою точкою для хвильової функції є $r=0$, оскільки в цій точці, якщо функція $S(r)$ обмежена, то функція $\tilde{S}(r)$, при $m \neq 0$, вже не буде за модулем обмеженою. Виключенням є випадок $m=0$, для яког точка $r=0$ не є особливою. Таким чином, існування неперервної частини енергетичного спектру, для нейтрону у магнітній ямі, можливе тільки при рівному нулю орбітальному квантовому числу. При $m \neq 0$ нейтрон має тільки дискретний енергетичний спектр, який у випадку вибраної задачі буде визначатись умовами неперервності хвильової функції та її першої похідної на межі каналу.

Розгляд умов неперервності приводить до співвідношення (14), яке визначає дискретну частину енергетичного спектру нейтрону:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(k) & \Delta_{12}(k) \\ \Delta_{21}(k) & \Delta_{22}(k) \end{vmatrix} = 0 , \qquad (14)$$

$$\Delta_{11}(r) = \left.\begin{vmatrix} S_1 & \varphi_{11} \\ \frac{dS_1}{dr} & \frac{d\varphi_{11}}{dr} \end{vmatrix}\right|_{r=R} ; \qquad \Delta_{21}(k) = \left.\begin{vmatrix} S_2 & \varphi_{21} \\ \frac{dS_2}{dr} & \frac{d\varphi_{21}}{dr} \end{vmatrix}\right|_{r=R} ;$$

$$\Delta_{12}(k) = \left.\begin{vmatrix} S_1 & \varphi_{12} \\ \frac{dS_1}{dr} & \frac{d\varphi_{12}}{dr} \end{vmatrix}\right|_{r=R} ; \qquad \Delta_{22}(k) = \left.\begin{vmatrix} S_2 & \varphi_{22} \\ \frac{dS_2}{dr} & \frac{d\varphi_{22}}{dr} \end{vmatrix}\right|_{r=R} ;$$

$$\varphi_{11} = \operatorname{Im}\Phi_1 ;\ \varphi_{12} = \operatorname{Im}\Phi_2 ;\ \varphi_{21} = \operatorname{Re}\Phi_1 ;\ \varphi_{22} = \operatorname{Re}\Phi_2 .$$

Окрім рядів інтегрального розв'язку (13) можна побудувати інші розв'язки, спираючись на функціональні ряд, отриманих в роботі [4]. Безпосередньою підстановкою можна довести, що функціональні ряди, отримані в роботі [4], є ітерацією відповідного інтегрального рівняння з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_{1j}(r) = S_1(r)B_j + S_1(r)\int\limits_r^{+\infty} S_1^{-2}(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{+\infty}\Lambda(\xi_2)\times \\ \times\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} S_2^{-2}(\xi_3)\int\limits_{\xi_3}^{+\infty} F(\xi_4)S_2(\xi_4)\varphi_{1j}(\xi_4)d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ \varphi_{2j}(r) = S_2(r)C_j + S_2(r)\int\limits_r^{+\infty} S_2^{-2}(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{+\infty}\Lambda(\xi_2)\times \\ \times\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} S_1^{-2}(\xi_3)\int\limits_{\xi_3}^{+\infty} F(\xi_4)S_1(\xi_4)\varphi_{2j}(\xi_4)d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \end{cases} \tag{15}$$

де функції $S_1(r)$ та $S_2(r)$, як було відмічено раніше, це дійсні циліндричні функції першого роду, які є розв'язками однорідної системи рівнянь, відповідній системі (8), обмежені в нулі, $\tilde{S}_1(r)$ та $\tilde{S}_2(r)$ це самозпряжені до них розв'язки системи (8), визначені співвідношеннями:

$$\tilde{S}_1(r) = kS_1(r)\int\limits_b^r S_1^{-2}(\xi)d\xi \ ; \ \tilde{S}_2(r) = kS_2(r)\int\limits_b^r S_2^{-2}(\xi)d\xi \ .$$

Тричі беручи по частинах інтеграли в системі рівнянь (15) маємо:

$$\begin{cases} \varphi_{1j} = S_1B_j + \dfrac{1}{k^2}\int\limits_r^{+\infty} D_1(r,\xi)F(\xi)\varphi_{1j}(\xi)d\xi \\ \varphi_{2j} = S_2C_j + \dfrac{1}{k^2}\int\limits_r^{+\infty} D_2(r,\xi)F(\xi)\varphi_{2j}(\xi)d\xi \end{cases}, \tag{16}$$

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{1j} = S_1B_j - \dfrac{1}{k^2}\int\limits_0^{r} D_1(r,\xi)F(\xi)\tilde{\varphi}_{1j}(\xi)d\xi \\ \tilde{\varphi}_{2j} = S_2C_j - \dfrac{1}{k^2}\int\limits_0^{r} D_2(r,\xi)F(\xi)\tilde{\varphi}_{2j}(\xi)d\xi \end{cases}, \tag{17}$$

$$D_1(r,\xi) = \int\limits_r^{\xi} F(\xi_1)\Delta_1(r,\xi_1)\Delta_2(\xi_1,\xi)d\xi_1 \ ; \quad D_2(r,\xi) = \int\limits_r^{\xi} F(\xi_1)\Delta_2(r,\xi_1)\Delta_1(\xi_1,\xi)d\xi_1 \ ;$$

$$\Delta_j(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} S_j(\alpha) & \tilde{S}_j(\alpha) \\ S_j(\beta) & \tilde{S}_j(\beta) \end{vmatrix} \ ; \quad j = 1,2 \ .$$

Умова для знаходження енергетичного спектру, з використанням рівнянь (16), (17), не змінюються і має вигляд (14).

Результати та їх обговорення

Для знаходження радіальних складових хвильових функцій нейтрона у циліндричній магнітній ямі одержані інтегральні рівняння (13), (16), (17). Доведено, що неперервна частина енергетичного спектру існує тільки при рівному нулю орбітальному квантовому числу. При $m \neq 0$ спектр завжди буде дискретним. Отримане співвідношення для знаходження енергетичних рівнів дискретної частини енергетичного спектру (14), використовуючи яке, для сумарної сили струму $NI = 3A$ та радіусу каналу

$R = 50 мкм$, в інтервалі енергій 0.1 – $3.3 неВ$ знайдено вісім енергетичних рівнів, $0.166 неВ$, $0.215 неВ$, $0.358 неВ$, $0.887 неВ$, $1.261 неВ$, $1.495 неВ$, $2.259 неВ$, $2.628 неВ$. Використовуючи рівняння (13), (16) обчислені і представлені в графічному вигляді (на рисунку 1) радіальні складові хвильової функції нейтрона, які характеризують його поперечний рух всередині циліндричного каналу, при різних значеннях орбітального квантового числа.

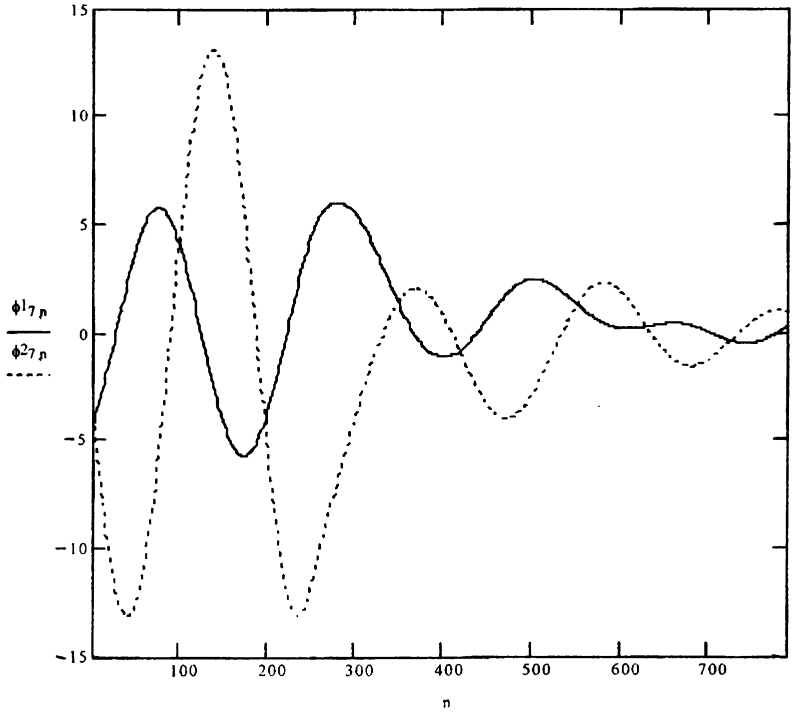

Рис. 1.

Висновки

Розроблений метод пошуку хвильових функцій нейтрона в циліндричній магнітній ямі та відповідного їм енергетичного спектру може бути використаний у дослідженнях в галузі теорії селекції або фокусування нейтронних пучків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пронько Г.Т., Строганов Ю.Г. // ЖЭТФ. - 1977. - т. 72. - С. 143 – 147.
2. Blumel R., Dietrich K. // Physical review A.- 1991.- Vol. 43, # 1.- P. 22 – 28.
3. Авдонін К.В. // Науковий вісник Чернівецького національного університету, 2006., збірник наукових праць, вип. 303, С. 104 – 111.
4. Авдонін К.В. // Вісник КНУТД, 2009, № 6, т.50, С. 7 – 12.
5. Высоцкий В.И., Кузьмин Р.Н. // УФН. - т. 162, № 9. - 1992. - С. 2 – 48.

Надійшла 30.08.2010