

УДК 519.866

**ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙБУТНЬОЇ ДИНАМІКИ ОПТИМАЛЬНОЇ  
СТРУКТУРИ СТРАХОВОГО ПОРТФЕЛЯ**

О.Ю. ШИРОКОВА, Т.А. ДУНАЄВА

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

*У статті розглянута задача формування оптимальної структури саме страхового портфеля на майбутній період часу. Побудовано математичну модель поставленої задачі та представлено алгоритм формування та оптимізації портфеля страхової компанії на майбутній період. Використовуючи запропонований алгоритм, на основі статистичних даних однієї з страхових компаній України розв'язано поставлену задачу та зроблено порівняння отриманого оптимального портфеля з наявною структурою страхового портфеля компанії*

При управлінні роботою страхової компанії важливу роль відіграють математичні моделі, метою яких є опис різних видів діяльності страхової компанії. Вивчення таких моделей і проведення на їх основі розрахунків важливих характеристик роботи страхової компанії дозволяє пропонувати приклади оптимальних управлінських рішень.

Класичним розв'язком цієї проблеми є використання портфельної теорії Марковіца. Але, при використанні такого підходу, перед страховиком постає проблема визначення оптимальної структури портфеля саме на майбутнє: портфельна модель Марковіца-Шарпа, враховуючи статистичні дані за минулі періоди, дає розуміння тієї структури портфеля, яка є оптимальною саме в цей конкретний момент.

В даній роботі представлена удосконалена модель формування оптимального портфеля (що є комбінацією ризикових та відносно без ризикових активів) страхової компанії шляхом застосування моделі ARMA (авторегресії та ковзаючого середнього) для прогнозування показника рівня виплат страхової компанії.

***Об'єкти і методи дослідження***

Об'єктом даного дослідження є страховий портфель з попередньо заданою структурою у вигляді всіх часток видів страхування, якими займається компанія. За основу було взято класичну портфельну теорію Марковіца-Шарпа [2], що базується на статистичних методах розрахунків. Для прогнозування майбутніх показників рівня виплат по портфелю було використано модель ARMA [3].

***Постановка задачі***

В даній роботі була поставлена задача формування страхового портфелю з  $n$  видів страхування на наступний період. Перед керівником компанії постає проблема визначення оптимальної частки кожного виду страхування в загальній структурі портфеля. Інакше кажучи, необхідно визначити відсотковий розподіл часток всіх  $n$  видів страхування в страховому портфелі, що максимізує його середню дохідність при заданому обмеженні на рівень ризику на наступні періоди.

***Результати і їх обговорення***

Задача формування оптимальної структури страхового портфеля полягає в пошуку вектора часток розподілу внесків за видами страхування в портфелі. При чому з одного боку страховик намагається максимізувати свою дохідність, а з іншого – фіксує гранично допустимий ризик. Використовуючи класичну портфельну теорію Марковіца отримуємо наступну математичну модель.

Якщо  $r_i$  – це середня дохідність  $i$ -го виду страхування, а  $r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i$  – середня дохідність страхового портфеля, який містить договори  $n$  видів страхування, причому  $\omega_i$  – частка  $i$ -того виду страхування у загальній структурі портфеля, то

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i, \quad (2)$$

$$\omega_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

де  $x_i$  – сума премій за  $i$ -тим видом страхування;  $\omega_i$  – частка  $i$ -того виду страхування у загальній структурі портфеля;  $\sigma_p$  – відхилення дохідності за портфелем (оцінює ступінь можливого відхилення фактичної дохідності від очікуваної),  $\sigma_{ij}$  – коваріація дохідностей  $i$ -го та  $j$ -го видів страхування.

Для того, щоб знизити ризик за портфелем, у процесі його диверсифікації, використовують активи, дохід за якими мало корельований.

Розв'язок задачі (1) – (3) можна знайти за допомогою методу множників Лагранжа і в результаті отримати множину портфелів, які задовольняють всім поставленим умовам і знаходяться на верхній межі допустимої множини портфелів Марковіца, тобто мають найвищу дохідність.

Враховуючи те, що страховим компаніям дозволяється займатись іншими видами господарської діяльності, що не суперечать законодавству, розглядається можливість формування портфеля не лише з ризикових, але й з частки безризикових активів. Безризиковий актив має визначену дохідність протягом одного періоду і стандартне відхилення, що дорівнює нулю. Таким активом можна вважати внесення коштів на депозит у банку.

Дотична проведена з точки дохідності безризикового активу (безризикової процентної ставки –  $r_f$ ) до множини ефективних портфелів Марковіца має назву лінії ринку капіталів. Точка дотику (M) представлятиме портфель, що є комбінаціями безризикових активів та ризикового „дотичного” портфеля. Ця комбінація, тобто координати точки дотику є параметрами оптимального портфеля за моделлю Шарпа.

$$r_p = r_f + \beta \sigma_p. \quad (4)$$

Тангенс кута нахилу цієї дотичної відображає ринкову ціну ризику і визначається за формулою:

$$\beta = \max \left\{ \frac{r_{ek} - r_f}{\sigma_{ek}} \right\}, \quad (5)$$

де  $r_{ek}$  – очікувана дохідність  $k$ -го портфеля з множини ефективних;  $\sigma_{ek}$  – стандартне відхилення  $k$ -го портфеля з ефективної множини.

ARMA(p,q) процес описується формулою:

$$\varepsilon(t) = \alpha_1 \varepsilon(t-1) + \dots + \alpha_p \varepsilon(t-p) + \delta(t) - \beta_1 \delta(t-1) - \dots - \beta_q \delta(t-q).$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon(t-i) + \delta_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \delta(t-j), \text{ де } \bar{\delta}_{qt} = \delta_t - \theta_1 \delta_{t-1} - \dots - \theta_q \delta_{t-q},$$

$\delta_t$  - послідовність випадкових величин, що являють собою «білий шум».

Для побудови моделі ARMA по серії спостережень необхідно визначити порядок моделі (числа  $p$  і  $q$ ), а потім і самі коефіцієнти. Для визначення порядку моделі можуть використовуватись дослідження таких характеристик часового ряду, як його автокореляційна функція, а для визначення коефіцієнтів використовуються такі методи, як метод найменших квадратів та метод максимальної правдоподібності.

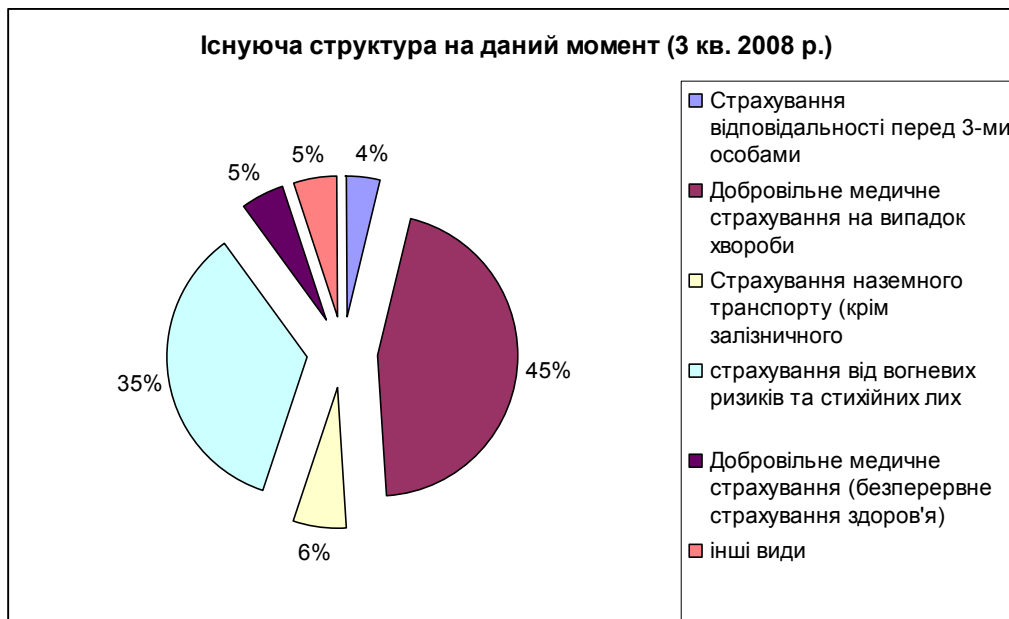
Аналіз стаціонарності проводиться, використовуючи ті ж підходи, що й для AR(p)-процесів.

Для реалізації побудованої моделі було використано програмне середовище Borland C++ Builder.

Розрахунки були проведені на основі даних ЗАТ „СК АЕЛІТА” за 2007 – 2008 роки. Структура портфеля страхової компанії (за видами страхування) в 3 кв. 2008 року зображена на рис.

Середня процентна ставка для гривневих депозитів терміном до одного року у 2008 році становила 20% річних.

Для перевірки адекватності запропонованої моделі, ми спрогнозували рівні виплат по всім видам страхування в портфелі на 4-й квартал 2008 року (застосувавши модель ARMA(1,1) та порівняли зі справжніми показниками. Після цього, використавши прогнозні дані, знайшли оптимальний портфель за моделлю Шарпа.



Існуюча структура страхового портфеля СК «АЕЛІТА» станом на 3 кв. 2008 року

Так прогнозне значення величини виплат для виду «Страховання відповідальності перед 3-ми особами» складає 46.318%. В таблиці 1 представлено дані за 8 кварталів (за 4 квартали 2007 року, і 4 квартали 2008) та прогнозні дані за 4-й квартал 2008 року.

Таблиця 1. Рівень виплат досліджуваної страхової компанії у % до зібраної премії за видами страхування

Звітний період	Види страхування					
	Страховання відповідальності перед 3-ми особами	Добровільне медичне страхування на випадок хвороби	Страховання наземного транспорту (крім залізничного)	Страховання від вогневих ризиків та стихійних лих	Добровільне медичне страхування (безперервне страхування здоров'я)	інші види
1 кв 2007	34,06	42,56	40,31	47,47	18,28	7,88
2 кв 2007	28,3	36,53	30,72	59,69	14,24	15,49
3 кв 2007	33	52,41	41,17	61,88	11,94	15,1
4 кв 2007	32,74	60,17	44,07	15,23	12,57	16,62
1 кв 2008	42,68	36,48	23,62	42,49	19,86	22,1
2 кв 2008	39,03	65,98	24,94	26,3	20,86	18,8
3 кв 2008	46,36	60,85	31,28	34,51	16,44	24,53
<b>4 кв 2008</b>	<b>45,13</b>	<b>58,18</b>	<b>34,35</b>	<b>37,65</b>	<b>14,25</b>	<b>35,64</b>
ПРОГНОЗНЕ ЗНАЧЕННЯ РІВНЯ ВИТРАТ ПО ВИДАМ СТРАХУВАННЯ НА 4кв.2008р.						
	<b>46,318</b>	<b>60,34</b>	<b>31,32</b>	<b>37,73</b>	<b>12,02</b>	<b>31,95</b>

Як бачимо прогнозні значення для 4-го кварталу 2008 року мало відрізняються від справжніх. Знайдемо оптимальні структуру та дохідність страхового портфеля спочатку за даними за 7 кварталів, потім за 8, використовуючи справжні та прогнозні дані. Отримані результати наведено в Таблиці 2.

За результатами розрахунків та порівняння їх з реальними даними можемо зробити висновок, що структура портфеля та відповідна йому дохідність визначені за допомогою моделі Марковіца-Шарпа на основі спрогнозованих показників майже не відрізняються від так само розрахованої структури та дохідності для реальних даних (структури однакові, а дохідність в першому випадку вища на одну десятку). З цього випливає, що запропонована модель, що по суті є розширенням відомої моделі Марковіца-Шарпа (розширення якої полягає у додатковому застосування моделі ARMA для прогнозування даних компанії, які надалі використовуються в розранках) дає можливість визначити оптимальну структуру та дохідності страхового портфеля на майбутнє, дослідити їх динаміку в майбутні періоди та надати компанії рекомендацій щодо управління портфелем в майбутньому для досягнення оптимального прибутку.

На основі отриманих результатів компанія може обрати оптимальну саме для неї структуру страхового портфеля, виходячи зі своїх керівницьких вподобань

Таблиця 2. Структура страхового портфеля

Частка виду страхування в портфелі в %	Види страхування						Доходність
	Страхування відповідальності перед 3-ми особами	Добровільне медичне страхування на випадок хвороби	Страхування наземного транспорту (крім залізничного)	Страхування від вогневих ризиків та стихійних лих	Добровільне медичне страхування (безперервне страхування здоров'я)	інші види	
На даний момент 3-й кв.2008 р.	5	50	5	30	5	5	3,49
На майбутній (4-й кв. 2008 р., справжні дані)	5	55	5	25	5	5	4,43
На майбутній 4-й кв. 2008 р., (прогнозовані дані)	5	55	5	25	5	5	4,53

Якщо наприклад, дані розрахунки були зроблені в 3-му кварталі 2008 року, страховик знатиме, що для досягнення максимальної доходності в наступному періоді (тобто в 4-му кварталі 2008 року) йому необхідно змінити структуру портфеля: збільшити частку добровільного медичного страхування на випадок хвороби на 5% та зменшити частку страхування від вогневих ризиків на 5%.

#### Висновки

В статті була розглянута задача формування оптимальної структури страхового портфеля на майбутній період, та запропоновано її розв'язок шляхом розширення класичної портфельної моделі Марковіца-Шарпа додатковим прогнозуванням рівня виплат за алгоритмом моделі ARMA.

За результатами моделювання оптимальної структури страхового портфеля СК „АЕЛІТА” на майбутній період виявилось, що структура портфеля та відповідна йому доходність визначені за допомогою моделі Марковіца-Шарпа на основі спрогнозованих показників майже не відрізняються від так само розрахованої структури та доходності для реальних даних.

Значимість дослідження полягає в тому, що завдяки розглянутій у даній роботі математичній моделі та отриманих результатів, компанія може обрати оптимальну структуру страхового портфеля та дослідити майбутню динаміку оптимальних структури та доходності портфеля.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Орланюк - Малицкая Л.А. Платежеспособность страховой компании. – М.: Анкил, 1994. – 150 с. – ISBN-10 5-484-01250-6.
2. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с. – ISBN 5-86225-455-2.
3. Широкова О.Ю., Дунаева Т. А., Формування нечіткої структури страхового портфеля [Текст]// Інвестиції: Практика та Досвід, 2010. № 8. с. 50–52.

Надійшла 08.11.2010