

УДК 677.075

АНАЛІТИЧНА МОДЕЛЬ ВОДОВБИРАННЯ ДВО- ТА БАГАТОШАРОВИМИ ТЕКСТИЛЬНИМИ СТРУКТУРАМИ

В.І. ВЛАСЕНКО

Київський національний університет технологій та дизайну

Аналітично вирішена задача нестационарного водовбирання та дифузії у дво- та багатошарові текстильні структури. Доведено, що для визначення параметрів водовбирання та дифузії в текстильних структурах, складених з будь-якої кількості шарів, достатньо мати рішення задачі дифузії в двошаровому матеріалі в тому ж виді, як і для одношарового матеріалу

Постановка завдання

Розробити аналітичну модель нестационарного вбирання води по товщині двошарового та багатошарового текстильного матеріалу.

Об'єкти та методи дослідження

Об'єкт дослідження – аналітичне рішення задачі опису водовбирання та дифузії багатошаровими текстильними структурами.

Предмет дослідження – метод розв'язання задачі водовбирання та дифузії в дво- та багатошарових текстильних матеріалах.

Для математичного моделювання процесу водовбирання використовувались методи математичного аналізу, зокрема методи диференційного і інтегрального числення, методи математичної фізики, тригонометричні та ступеневі ряди. Для комп'ютерного моделювання – програмне середовище MathCAD.

Результати та їх обговорення

Вихідними даними для вирішення мети роботи є, по-перше, нелінійне рівняння нестационарного процесу переносу вологи перпендикулярно товщині матеріалу (загальний розв'язок по товщині) (1) та швидкості зміни концентрації в часі (2), які були запропоновані в роботі [1]:

$$U(z, t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A(2i-1)t^B} \cdot \sin\left[\frac{(2i-1)\pi z}{2}\right]}{\pi(2i-1)} \quad (1)$$

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} A \cdot B \cdot e^{B-1} \cdot e^{-A(2i-1)t^B} \cdot \sin\left[\frac{(2i-1) \cdot \pi z}{2}\right] \quad (2)$$

а, по-друге, – аналітична залежність між експериментальними параметрами водовбирання, яка враховує залежність процесу переносу вологи від вмісту вологи в матеріалі та дозволяє визначити константи водовбирання A та B [2].

Таким чином, для кожного окремого шару ми можемо записати рівняння проходження вологи. Для побудови математичної моделі проходження вологи через два шари матеріалів з різними параметрами A_1, B_1 та A_2, B_2 визначимо наступні умови. Модель проходження вологи крізь перший шар не змінюється. Для другого шару змінюються граничні умови. Другий шар, зокрема, може прийняти тільки стільки вологи, скільки йому «забезпечить» перший матеріал. Щоб визначити концентрацію вологи, яка у будь-який час спостерігається на верхній площині першого шару, використовуємо рівняння (1) за умови $z = l$ (схема водовбирання представлена на рис. 1).

$$UK_1(t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi(2i-1)} \quad (3)$$

$UK_1(t)$ – концентрація вологи на верхній площині першого шару в залежності від часу.

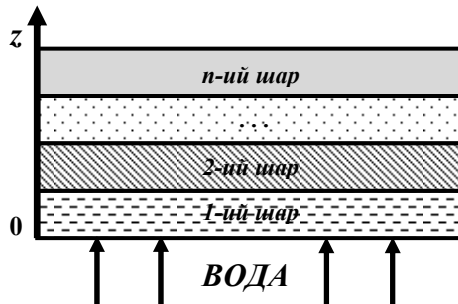


Рис.1. Схема водовбирання багатошаровим матеріалом

n – кількість шарів текстильних матеріалів; z – координата, що проходить перпендикулярно площині матеріалу (напрямок переносу вологи); t – час.

Для розв'язку рівнянь дифузії крізь багатошаровий матеріал треба враховувати граничні умови як на зовнішніх границях матеріалів, так і на границях переходу від одного матеріалу до іншого. За такі умови будемо вважати граничні умови першого роду при дифузії в однорідний шар матеріалу. Для них характерним є рівноважна концентрація вологи на поверхні матеріалу, яка є постійною в часі при незмінних зовнішніх умовах. У випадку багатошарової конструкції формула розподілу концентрації вологи в одношаровому матеріалі може бути використана за умови, що на границі між першим та другим шаром (в загальному випадку, між кожним попереднім і наступним шаром) концентрація води є неперервною, вона постійно збільшується та являється функцією, яка обмежується часом.

Припустимо, що для будь-якого значення вхідної концентрації q , за умови її постійності, концентрація по товщині кожного шару матеріалу визначається рівнянням

$$f(z, t) = q \cdot U(z, t), \quad (4)$$

де $U(z, t)$ – функція концентрації, знайдена за формулою (1) для даного шару матеріалу,

Вхідна концентрація для другого (і кожного наступного) шару дорівнює кінцевій концентрації для першого (і кожного попереднього шару), тобто $UK=q$. Тому формулу (4) для другого (і кожного наступного) шару запишемо у приращеннях:

$$df_2(z, t) = U_2(z, t)d(UK_1(t))$$

Використавши (1), (3), запишемо

$$d(UK_1(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot A_1 \cdot (2i-1) \cdot B_1 \cdot t^{B_1-1} e^{-A_1(2i-1)t^{B_1}}}{\pi(2i-1)} dt$$

$$df_2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_2(2i-1)t^{B_2}} \cdot \sin\left[\frac{(2i-1) \cdot \pi \cdot z}{2}\right]}{\pi(2i-1)} \right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot A_1 \cdot (2i-1) \cdot B_1 \cdot t^{B_1-1} e^{-A_1(2i-1)t^{B_1}}}{\pi(2i-1)} dt$$

Після цього функція зміни концентрації в часі другим шаром матеріалу може бути знайдена, як інтеграл:

$$f_2(z, t) = \int_0^t df_2 \quad (5)$$

Аналітично інтеграл (5) розв'язати неможливо, але сучасні програмні засоби (MathCad) дають змогу це зробити. Тоді зміна концентрації двома шарами матеріалу може бути записана функцією

$$u(z,t) = \begin{cases} U_1(z,t), z < 1 \\ f_2(z,t), 1 < z < 2 \end{cases}$$

Для довільно взятих коефіцієнтів A_1, B_1, A_2, B_2 динаміка зміни концентрації двома шарами матеріалу показана на рис.2.

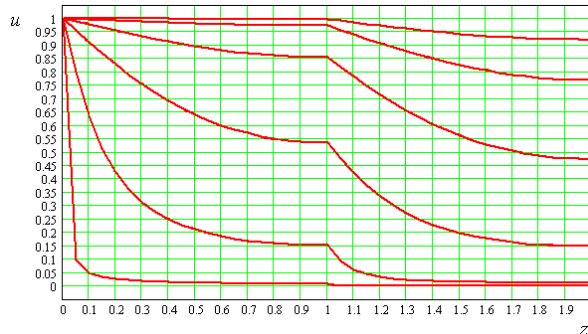


Рис.2. Зміна концентрації по товщині двох шарів матеріалу для різних моментів часу $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_n$

Введемо поняття середньої (інтегральної) концентрації вологи в матеріалі p , тобто кількість вологи відносимо до загального об'єму шару (шарів). Це дозволяє приводити одержані теоретичні дані до тих, що традиційно використовуються на практиці, зокрема додавати та віднімати середні концентрації різних частин багатошарової структури. Середня концентрація по товщині пакету з двох матеріалів може бути записана аналогічно формулам (13) в роботі [1]

$$U(t) = \int_0^1 U(z,t) dz = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2}$$

та формулі (14) в роботі [1]

$$v(t) = \frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8ABt^{B-1} e^{-A(2i-1)t^B}}{\pi^2 \cdot (2i-1)^2}$$

Тоді, для двошарового матеріалу середня концентрація вологи становить,

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_0^2 u(z,t) dz, \tag{6}$$

а середня швидкість водовбирання становить

$$v(t) = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}. \tag{7}$$

Порівняльні графіки зміни середніх концентрацій і швидкостей для одного і двошарового матеріалів наведені на рис.3, та рис.4.

Порівняння кривих поглинання води та швидкості водовбирання на рис. 3 та рис. 4 демонструє ефект гальмування першим шаром.

Розроблена методика дозволяє визначати характеристики пакетів з будь-якого числа шарів матеріалів. Наприклад, для пакету з трьох шарів (для пакету 1, 2 та 3) з різними характеристиками A_1, B_1, A_2, B_2 та A_3, B_3 визначається концентрація на виході з другого шару (на границі другого та третього шару)

$$UK_2(t) = f_2(1,t).$$

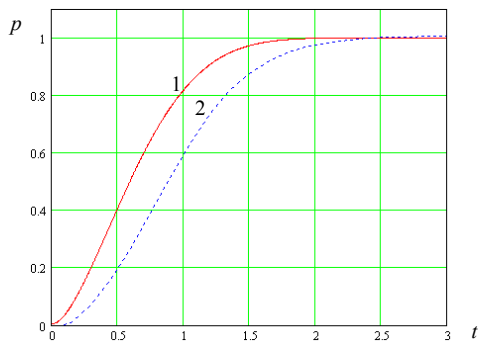


Рис.3. Середня концентрація води (для одно- та двошарового матеріалів)

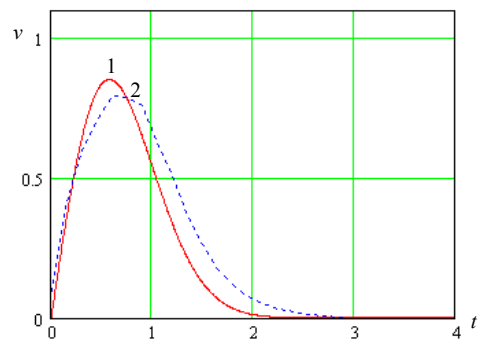


Рис.4. Швидкість водовбирання (для одно- та двошарового матеріалів)

Типова функція концентрації для третього шару

$$U_3(z,t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_3(2i-1)t^{B_3}} \cdot \sin\left[\frac{(2i-1) \cdot \pi \cdot z}{2}\right]}{\pi(2i-1)} \quad (8)$$

Тоді концентрація для третього шару з врахуванням гальмування в першому і другому шарі записується наступним чином

$$df_3(z,t) = U_3(z,t) d(UK_2(t))$$

$$f_3(z,t) = \int_0^t U_3(z,t) df_2(1,t) = \int_0^t U_3(z,t) \cdot U_2(z,t) d(UK_2(t))$$

Розписавши аналітично, одержимо

$$f_3(z,t) = \int_0^t \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_3(2i-1)t^{B_3}} \cdot \sin\left[\frac{(2i-1) \cdot \pi \cdot z}{2}\right]}{\pi(2i-1)} \right) \times \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-A_2(2i-1)t^{B_2}}}{\pi(2i-1)} \right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4 \cdot A_1 \cdot (2i-1) \cdot B_1 \cdot t^{B_1-1} \cdot e^{-A_1(2i-1)t^{B_1}}}{\pi(2i-1)} dt \quad (9)$$

Звичайно, це рішення може проводитися тільки чисельно. Результат розрахунку у середовищі MathCAD для трьохшарового матеріалу наведений на рис.5.

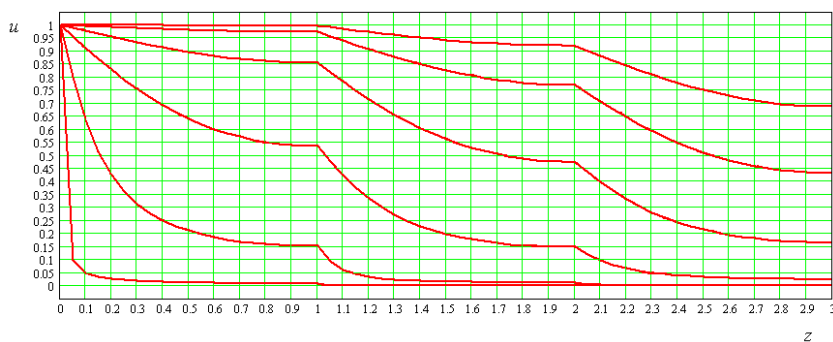


Рис.5. Зміна концентрації по товщині трьох шарів матеріалу для різних моментів часу $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$

Середня по товщині концентрація і швидкість можуть бути розраховані за формулами:

$$p(t) = \frac{1}{3} \int_0^3 u(z, t) dz, \quad (10)$$

$$v(t) = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (11)$$

Результати розрахунків показані на рис.6 та на рис.7.

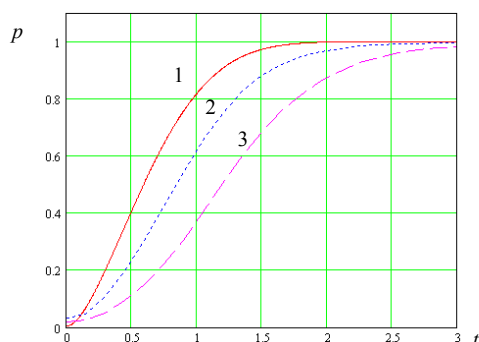


Рис.6. Середня концентрація води в одно-, дво- та трьохшаровому матеріалах

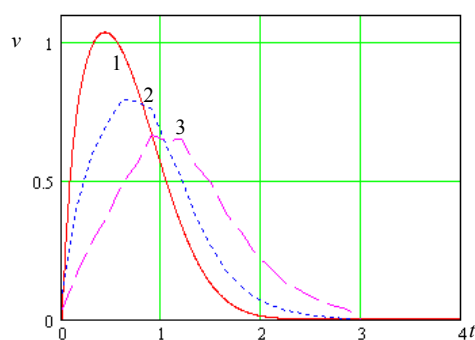


Рис.7. Швидкість водовбирання одно-, дво- та трьохшаровим матеріалам

Висновки

1. Одержане аналітичне рішення задачі визначення параметрів водовбирання та дифузії в двошаровому матеріалі.
2. Доведено, що для визначення параметрів водовбирання та дифузії в багатошаровому текстильному матеріалі з різними параметрами дифузії достатньо мати рішення задачі дифузії в двошаровому матеріалі в тому ж виді як і в одношаровому матеріалі.
3. Аналітично розв'язана задача нестационарного водовбирання та дифузії у багатошарові текстильні структури.
4. Одержані результати дозволяють теоретично передбачати характеристики водовбирання матеріалів з довільною кількістю шарів на основі даних для окремих матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 2. Напівемпірична модель водовбирання текстильних матеріалів зі змінним коефіцієнтом дифузії // Вісник КНУТД. – 2010. – №1. – с. 93 – 99.
2. Власенко В.І. Теоретичні дослідження процесу водовбирання текстильними матеріалами. Повідомлення 3. Методика визначення констант водовбирання текстильних матеріалів // Вісник КНУТД. – 2010. – №2. – с. 102 – 108.

Надійшла