

УДК 685.3

## АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ЕКВІДИСТАНТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ОБ'ЄКТА ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

В.І. ЧУПРИНКА, О.О. ХОМЕНКО, Л.Т. СВИСТУНОВА

Київський національний університет технологій та дизайну

*У роботі запропоновано алгоритм побудови еквідистанти до зовнішнього контуру деталей будь-якої складної конфігурації на довільній відстані від них*

Ширина міжшаблонного містка є вхідною інформацією при проектуванні схем розкрою і залежить від таких чинників, як товщина і вид матеріалу, тип розкрійного устаткування, кількість шарів е настилі, кут заточки різачка та інших. Для врахування постійного міжшаблонного містка  $\Delta$  при побудові розкрійної схеми необхідно побудувати еквідистанту до зовнішнього контуру деталі на відстані  $\Delta/2$ , а потім будувати схеми розкрою для нових деталей, зовнішнім контуром яких є еквідистанта. При відображенні схем розкрою еквідистанта буде замінена відповідною вихідною деталлю.

При використанні алгоритму побудови еквідистанти, описаного у праці [1], було виявлено ряд обмежень його використання:

1. Еквідистанта коректно будується для маленьких міжшаблонних містків у діапазоні 1-5 мм, а при подальшому збільшенні містка з'являються петлі. А для малих за площею деталей петлі з'являються вже при величині міжшаблонного містка 4-5 мм (рис.1, а).

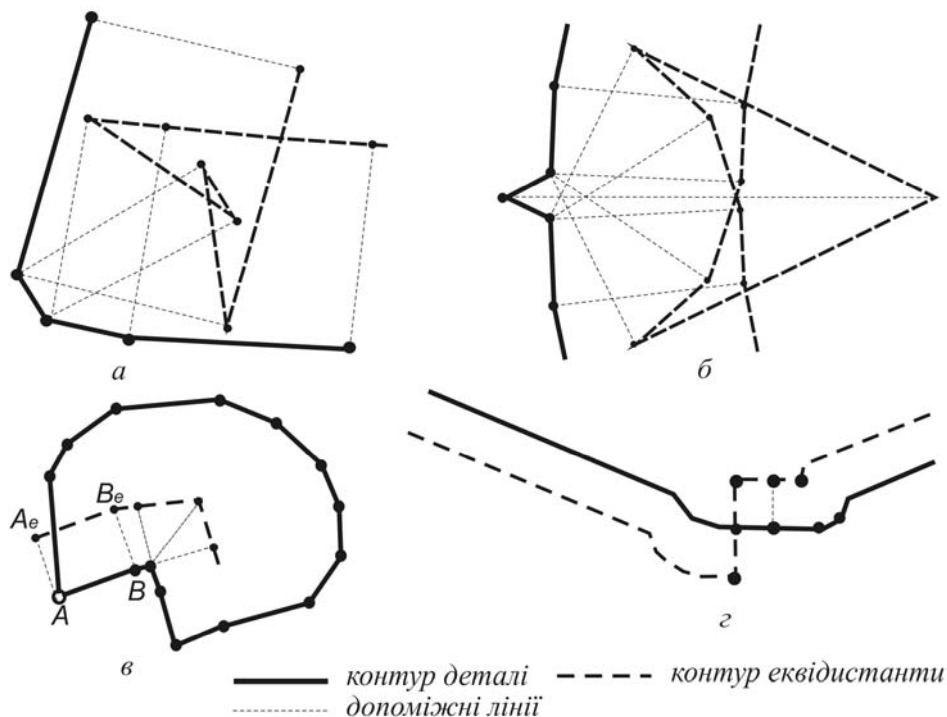


Рис. 1. Приклади помилок у роботі алгоритму побудови еквідистанти

2. Внуттєві деталі, як правило, мають гофри (невеликі розрізи) для точного їх з'єднання на етапі складання заготовки. При побудові еквідистанти в цих місцях відбуваються викривлення контуру, приклад яких наведено на рис. 1,б.

3. Алгоритмом не передбачена перевірка напрямку обходу для першого відрізка. Але було виявлено, що у випадках, коли друга точка  $B$  першого відрізка деталі мала значення ординати більше, ніж значення ординати першої точки  $A$  відрізка, напрямок відкладання величини міжшаблонного містка обирається в середину деталі, тобто координати точок еквідистанти  $A_e$  та  $B_e$  визначаються неправильно (див. рис. 1, в)

4. Для деяких деталей, контур яких містить точки, що лежать на одній прямій, алгоритм побудови еквідистанти неправильно обирає напрямок відкладання величини міжшаблонного містка, в результаті чого окремі частини контуру, а іноді і весь контур еквідистанти будується в середину деталі (див. рис. 1,г)

#### **Об'єкти та методи дослідження**

Об'єктом дослідження є еквідистанта для плоских геометричних об'єктів складної конфігурації. Методами дослідження є методи обчислювальної математики та аналітичної геометрії.

#### **Постановка завдання**

Вихідними даними є величина міжшаблонного містка та інформація про зовнішній контур деталей взуття, далі – деталей. Необхідно розробити алгоритм та програмне забезпечення для побудови еквідистанти до зовнішнього контуру деталі на довільній відстані від нього.

#### **Результати та їх обговорення**

Контури деталей взуття мають складну конфігурацію, тому здебільшого не можуть бути описані аналітично і потребують апроксимації більш простими кривими. Тому складну деталь апроксимують простими геометричними елементами. У роботі використовується спосіб кусково-лінійної апроксимації, який є достатньо простим і має високу продуктивність, оскільки практично визначаються тільки координати вершин багатокутника [2]. У цьому разі деталь можна представити координатами точок вершин апроксимуючого опукло-увігнутого багатокутника, тобто масивом  $\{X_i, Y_i\}$ ,  $i=1..n$ , де  $X_i, Y_i$  – координати  $i$ -ї вершини і  $n$  – кількість вершин апроксимуючого багатокутника.

Подальші обчислення виконуються за умови, що обхід контуру деталі вибрано проти годинникової стрілки і перша вершина має мінімальне значення абсциси. Для цього серед вершин апроксимуючого багатокутника з координатами  $X_i, Y_i$ , де  $i=1,2,\dots,n$ , необхідно знайти вершину  $k$ , для якої  $X_k = \min\{X_i\}$ , де  $i,k=1,2,\dots,n$ . Якщо  $k \neq 1$ , то необхідно перенумерувати точки деталі так, щоб ця точка стала першою.

**Алгоритм побудови еквідистанти** для плоского геометричного об'єкта, який враховує обмеження алгоритму, описаного у роботі [1], полягає у такому:

1. Відсіяти усі вершини апроксимуючого багатокутника, які лежать на одній прямій. Цей крок потрібний тому, що коли хоча б два суміжні відрізки лежать на одній прямій, тобто кут між ними становить  $180^\circ$ , неможливо визначити напрямок відкладання міжшаблонного містка (див. рис. 1,г). Крім того, зменшення кількості вершин скоротить час роботи алгоритму, враховуючи, що апроксимуючі багатокутники деяких деталей взуття містять до 170 точок. Очевидно, що ця процедура відсікання точок

не вплине на контур апроксимуючого багатокутника. Завдання відсіву зводиться до визначення належності точки відрізка.

Нехай  $A_i(X_i, Y_i)$ ,  $A_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1})$ ,  $A_{i+2}(X_{i+2}, Y_{i+2})$ , де  $i=1, 2, \dots, n$  (див. рис. 2).



Рис.2 Перевірка належності точки  $A_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1})$  відрізка  $A_i A_{i+2}$

Рівняння прямої  $A_i A_{i+2}$  має такий вигляд [3]:

$$\frac{x - X_i}{X_{i+2} - X_i} = \frac{y - Y_i}{Y_{i+2} - Y_i}, \tag{1}$$

або  $Ax + By + C = 0$ , де  $A = Y_{i+2} - Y_i$ ;  $B = X_i - X_{i+2}$ ;  $C = X_{i+2}Y_i - X_iY_{i+2}$ . Вважається, що точка належить прямій, якщо  $\Omega \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – точність апроксимації контуру деталі. Для деталей взуття  $\varepsilon = 0,5$  мм [2]. Значення величини  $\Omega$  визначається за формулою (2):

$$\Omega = \left| \frac{AX_{i+1} + BY_{i+1} + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \tag{2}$$

2. Побудувати еквідистанту для першого відрізка  $A_1 A_2$ , де  $A_1(X_1, Y_1)$ ,  $A_2(X_2, Y_2)$ .

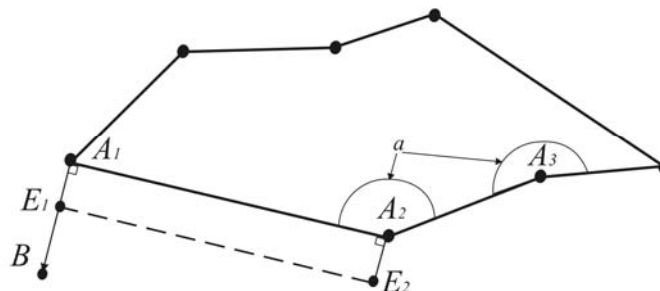


Рис. 3 Побудова еквідистанти для першого відрізка

Можливі такі випадки:

- 2.1  $X_1 = X_2$ , тоді координати еквідистанти визначаються, як  $X_{e1} = X_1 - \Delta/2$ ,  $X_{e2} = X_2 - \Delta/2$ ,  $Y_{e1} = Y_1$ ,  $Y_{e2} = Y_2$ , де  $\Delta$  – міжшаблонний місток.
- 2.2  $Y_1 = Y_2$ , тоді  $X_{e1} = X_1$ ,  $X_{e2} = X_2$ ,  $Y_{e1} = Y_1 - \Delta/2$ ,  $Y_{e2} = Y_2 - \Delta/2$ .
- 2.3.  $X_1 \neq X_2$ ,  $Y_1 \neq Y_2$ .

Рівняння прямої  $A_1 A_2$  (рис. 3) має такий виглядає наступним чином [3]:

$$\frac{x - X_1}{X_2 - X_1} = \frac{y - Y_1}{Y_2 - Y_1}. \tag{3}$$

Пряма  $A_1 B \perp A_1 A_2$  представлена рівнянням (4)

$$y = Y_1 + k_1 * (x - X_1). \tag{4}$$

З перпендикулярності прямих випливає:

$$k_1 = -1/k . \tag{5}$$

Значення кутового коефіцієнта прямої  $A_1A_2$  отримане з рівняння (3):

$$k = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)} . \tag{6}$$

Після підстановки (5) та (6) в рівняння (4) буде отримано  $Y_B$  точки  $B (X_B, Y_B)$ :

$$Y_B = Y_1 - \frac{(X_B - X_1) * (X_2 - X_1)}{Y_2 - Y_1} . \tag{7}$$

А координата  $X_B$  визначається, як  $X_B = X_1 - L$ , якщо  $Y_1 > Y_2$ , або як  $X_B = X_1 + L$ , якщо  $Y_1 < Y_2$ , де  $L$  – деяка стала величина. Перевірка останніх умов необхідна, щоб уникнути випадку, зображеного на рис.1.в. Шукана точка  $E_1(X_{e_1}, Y_{e_1})$  лежить на заданому відрізку  $A_1B$ . Одиничний вектор  $\vec{e}$  (8) вказує напрямком, у якому необхідно відкласти відрізок довжиною  $\Delta/2$ .

$$\vec{e} = \frac{\overline{A_1B}}{|A_1B|} , \tag{8}$$

де  $|A_1B| = \sqrt{(X_B - X_1)^2 + (Y_B - Y_1)^2}$ . Тоді координати точки  $E_1(X_{e_1}, Y_{e_1})$  визначаються виразами (9):

$$\begin{aligned} X_{e_1} &= \frac{(X_B - X_1) * \Delta}{2 * |A_1B|} + X_1, \\ Y_{e_1} &= \frac{(Y_B - Y_1) * \Delta}{2 * |A_1B|} + Y_1 . \end{aligned} \tag{9}$$

Координати точки  $E_2(X_{e_2}, Y_{e_2})$  можна визначити із співвідношення (10), скориставшись тим, що  $A_1E_1 \parallel A_2E_2$  та  $|A_1E_1| = |A_2E_2|$ :

$$\begin{aligned} X_{e_2} &= X_{e_1} + X_2 - X_1 \\ Y_{e_2} &= Y_{e_1} + Y_2 - Y_1 \end{aligned} \tag{10}$$

3. Побудувати еквідистанту для відрізка, що не є першим ( див. рис.4)

На першому кроці  $E_{p-1}(X_{e_{p-1}}, Y_{e_{p-1}})$  визначається як у пункті 2, з тією лише різницею, що у підпункті 2.3  $X_B$  розраховується як  $X_B = X_i - L$ .

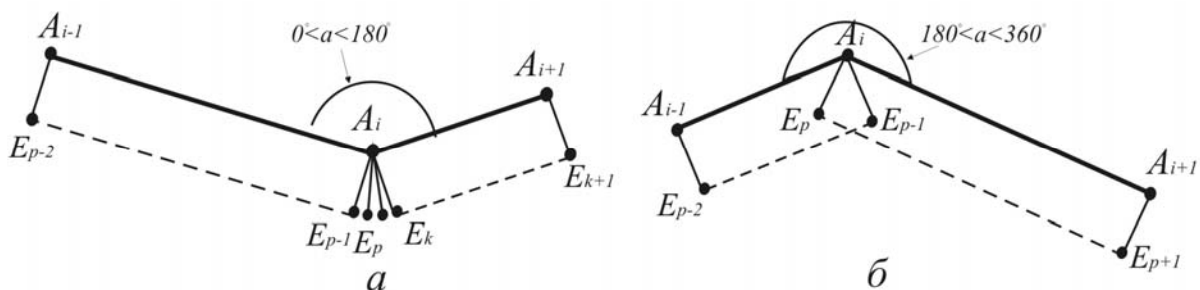


Рис.4 Побудова еквідистанти для ламаної з внутрішнім кутом:

$$a - 0^0 < \alpha < 180^0, \delta - 180^0 < \alpha < 360^0$$

На другому кроці необхідно визначити величину кута  $\alpha$  для ламаної лінії, що складається з двох відрізків, які утворюють внутрішній кут щодо деталі (рис.4,а, 4, б). Для цього для ламаних ліній  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$  та  $E_{p-1}A_iE_k$  з координатами вершин  $A_{i-1}(X_{i-1}, Y_{i-1})$ ,  $A_i(X_i, Y_i)$ ,  $A_{i+1}(X_{i+1}, Y_{i+1})$ ,  $E_{p-1}(X_{e_{p-1}}, Y_{e_{p-1}})$  та  $E_k(X_{e_k}, Y_{e_k})$  необхідно знайти модулі векторних добутків [3]:

$$|A_{i-1}A_i \times A_{i-1}A_{i+1}| = (X_i - X_{i-1})(Y_{i+1} - Y_{i-1}) - (X_{i+1} - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}) \quad (11)$$

$$|E_{p-1}A_i \times E_{p-1}E_k| = (X_i - X_{e_{p-1}})(Y_{e_k} - Y_{e_{p-1}}) - (X_{e_k} - X_{e_{p-1}})(Y_i - Y_{e_{p-1}})$$

Якщо  $|A_{i-1}A_i \times A_{i-1}A_{i+1}| \times |E_{p-1}A_i \times E_{p-1}E_k| > 0$ , виникає помилка як на рис.1,2, тому необхідно змінити напрямок відкладання містка щодо контуру деталі (назовні), тоді для визначення еквідистанти можливі наступні випадки:

3.1  $X_i = X_{i+1}$ , тоді  $X_{e_k} = X_i + \Delta/2$ ,  $Y_{e_k} = Y_i$ ,  $X_{e_{k+1}} = X_{i+1} + \Delta/2$ ,  $Y_{e_{k+1}} = Y_{i+1}$ .

3.2  $Y_i = Y_{i+1}$ , тоді  $X_{e_k} = X_i$ ,  $Y_{e_k} = Y_i + \Delta/2$ ,  $X_{e_{k+1}} = X_{i+1}$ ,  $Y_{e_{k+1}} = Y_{i+1} + \Delta/2$ .

3.3.  $X_i \neq X_{i+1}$ ,  $Y_i \neq Y_{i+1}$ . Тоді  $X_B = X_i - L$ ,  $Y_B = Y_i - \frac{(X_B - X_i) \cdot (X_{i+1} - X_i)}{Y_{i+1} - Y_i}$ ,

$$X_{e_k} = \frac{(X_i - X_B) \cdot \Delta}{2 \cdot |A_iB_i|} + X_i, \quad Y_{e_k} = \frac{(Y_i - Y_B) \cdot \Delta}{2 \cdot |A_iB_i|} + Y_i$$

$$X_{e_{k+1}} = X_{e_k} + X_{i+1} - X_i, \quad Y_{e_{k+1}} = Y_{e_k} + Y_{i+1} - Y_i \quad (12)$$

3.4 Якщо  $|A_{i-1}A_i \times A_{i-1}A_{i+1}| > 0$ , тобто ламана лінія складається з двох відрізків, які утворюють внутрішній кут  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  щодо деталі, то виконується побудова дуги кола між точками  $E_{p-1}$  та  $E_k$ .

Напрямок вектора  $A_iE_k$  визначається з умови, що кут  $\angle \alpha' = \angle E_{p-1}A_iE_k$  дорівнює  $\angle \alpha' = 180^\circ - \angle \alpha$ .

Дуга кола між точками  $E_{p-1}$  та  $E_k$  описується методом кусково-лінійної апроксимації.

Тоді  $\angle E_{p-1}A_iE_p = \angle E_pA_iE_{p+1} = \dots = \angle E_{k-1}A_iE_k = \alpha' / (k-1)$  (рис. 5, а).

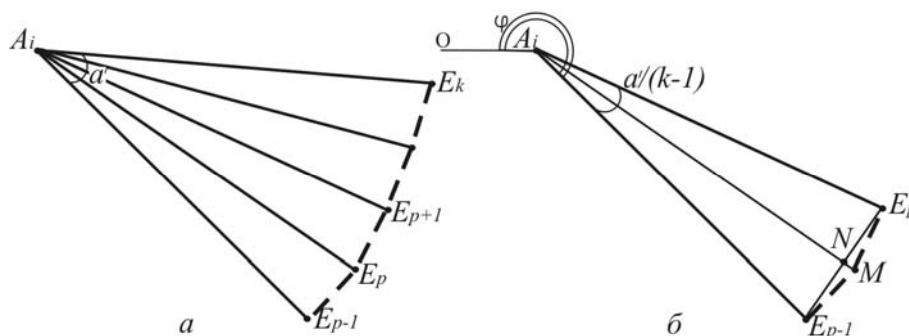


Рис.5 Побудова дуги кола між точками  $E_{p-1}$  та  $E_k$

Для визначення кількості вершин апроксимуючої кривої необхідно скористатися умовою, що довжина відрізка  $MN$  повинна бути меншою від заданої точності апроксимації  $\varepsilon$ , тобто  $|MN| \leq \varepsilon$  (рис.5.

б). Оскільки  $|A_iE_{p-1}| = |A_iE_p| = |A_iM| = \Delta/2$  та  $\angle E_{p-1}A_iM = \angle E_pA_iM = 0,5 \cdot \alpha' / (k-1)$  (рис. 5,б), то

$|MN| = |A_iM| - |A_iN| = \Delta/2 \cdot [1 - \cos(0,5\alpha' / (k-1))] \leq \varepsilon$ . Тоді буде отримано співвідношення (13):

$$k \geq 1 + \frac{0,5\alpha'}{\arccos(1 - 2\varepsilon / \Delta)} \quad (13)$$

Для визначення координат вершин  $E_p \dots E_{k-1}$  необхідно знайти кут  $\varphi = \angle OA_i E_{p-1}$ . Оскільки відомі координати вершин  $A_i(X_i, Y_i)$ ,  $O(X_i, 0)$ ,  $E_{p-1}(X_{e_{p-1}}, Y_{e_{p-1}})$  та  $|A_i E_{p-1}| = \Delta / 2$ , то кут  $\varphi$  може бути легко визначений із співвідношень (14):

$$\begin{aligned} X_{e_{p-1}} - X_i &= 0,5\Delta \cos \varphi; \\ Y_{e_{p-1}} - Y_i &= 0,5\Delta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Тоді координати вершин  $E_p \dots E_{k-1}$  можуть бути задані співвідношеннями (15):

$$\begin{aligned} X_{e_{m+1}} &= X_i + 0,5\Delta \cos(\varphi + (m-1)\alpha' / (k-1)); \\ Y_{e_{m+1}} &= Y_i + 0,5\Delta \sin(\varphi + (m-1)\alpha' / (k-1)), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $m=p, p+1, \dots, k-1$ .

3.5 Якщо  $|A_{i-1}A_i \times A_{i-1}A_{i+1}| < 0$ , тобто ламана лінія  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$  складається з двох відрізків, які утворюють внутрішній кут  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$  щодо деталі, то для неї еквідистантою буде ламана  $E_{p-2}E_{p-1}E_pE_{p+1}$ . У цьому разі може утворитися петля (рис. 4,б).

4. Видалення петель на контурі еквідистанти. Застосовується до побудованого контуру. Ця задача зводиться до задачі пошуку точок перетину відрізків еквідистанти. Нехай фрагмент контуру еквідистанти представлено точками  $E_1(X_{e_1}, Y_{e_1})$ ,  $E_2(X_{e_2}, Y_{e_2})$ ,  $E_3(X_{e_3}, Y_{e_3})$ ,  $E_4(X_{e_4}, Y_{e_4})$ ,  $E_5(X_{e_5}, Y_{e_5})$ ,  $E_6(X_{e_6}, Y_{e_6})$ ,  $E_7(X_{e_7}, Y_{e_7})$ ,  $E_8(X_{e_8}, Y_{e_8})$  (див рис.6). Необхідно виконати перевірку на перетин кожного відрізка з усіма іншими відрізками, крім сусідніх.

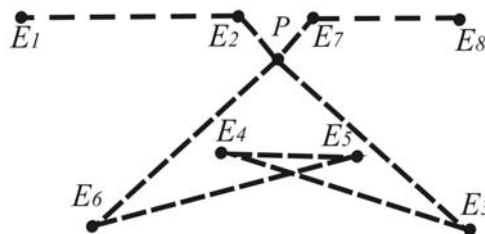


Рис. 6. Приклад петлі на контурі еквідистанти

Рівняння прямих, яким належать відрізки  $E_2E_3$  та  $E_6E_7$ , що ймовірно перетинаються, можуть бути представлені співвідношеннями (16) та (17):

$$\begin{cases} \frac{x - X_{e_2}}{X_{e_3} - X_{e_2}} = \frac{y - Y_{e_2}}{Y_{e_3} - Y_{e_2}}, \\ \frac{x - X_{e_6}}{X_{e_7} - X_{e_6}} = \frac{y - Y_{e_6}}{Y_{e_7} - Y_{e_6}} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Після нескладних перетворень будуть отримані значення коефіцієнтів прямих  $A_1 = Ye_3 - Ye_2$ ,  $B_1 = Xe_2 - Xe_3$ ,  $C_1 = Xe_2 \cdot Ye_3 - Xe_3 \cdot Ye_2$ ,  $A_2 = Ye_7 - Ye_6$ ,  $B_2 = Xe_7 - Xe_6$ ,  $C_2 = Xe_6 \cdot Ye_7 - Xe_7 \cdot Ye_6$ .

Необхідно виконати підстановку координат точок  $E_6$  і  $E_7$  в рівняння першої прямої та  $E_2$  і  $E_3$  в рівняння другої прямої:  $\Delta_1 = A_1Xe_7 + B_1Ye_7 + C_1$ ,  $\Delta_2 = A_1Xe_6 + B_1Ye_6 + C_1$ ,  $\Delta_3 = A_2Xe_3 + B_2Ye_3 + C_2$ ,  $\Delta_4 = A_2Xe_2 + B_2Ye_2 + C_2$ . Якщо  $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$  та  $\Delta_3 \cdot \Delta_4 < 0$ , тоді точка перетину  $P(X_p, Y_p)$  належить відрізкам  $E_2E_3$  та  $E_6E_7$ , і її координати можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (16).

Тоді фрагмент контуру еквідистанти буде представлено ламаною  $E_1E_2PE_7E_8$ . Перевірку на перетин слід виконати кілька разів для контурів, утворених відсіканням петель.

Алгоритм побудови еквідистанти реалізований у програмний додаток в інтегрованому середовищі програмування Delphi для операційної системи Windows. Етапи роботи програми представлені на рис. 7,а та рис. 7,б, а результуюча еквідистанта на рис.7,в.

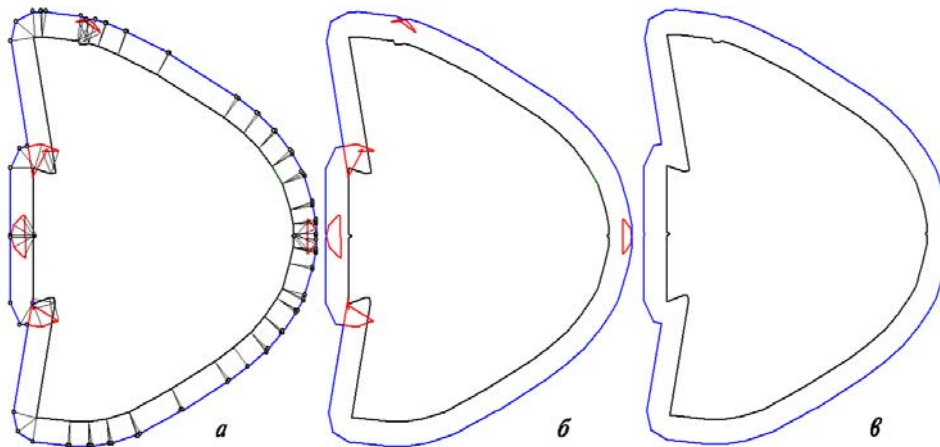


Рис.7. Приклад побудови еквідистанти для союзики :

а– допоміжні лінії, б – еквідистанта з петлями, в– результуюча еквідистанта

### Висновки

На основі співвідношень (1)–(16) розроблено алгоритм побудови еквідистанти на довільній відстані від зовнішнього контуру деталей будь-якої складної конфігурації. Усунуто обмеження алгоритму [1]. Розроблений алгоритм може бути використаний при проектуванні розкрійних схем з урахуванням міжшаблонного містка.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Чупринка В.І., Шлімович К.А. Побудова еквідистанти для плоского геометричного об'єкта. //Вісник ДАЛПУ, – 2000, №1. –с. 38–41.
2. Скатерной В.А. Оптимизация раскроя материалов в легкой промышленности.– М.: Легпромбытиздат. – 1989.–144 с.
3. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. – К.: Наукова думка, –1973.

Надійшла 28.05.2009