

УДК 531.381

АКУЛЕНКО Л.Д.¹, ЛЕЩЕНКО Д.Д.², КОЗАЧЕНКО Т.А.²,
ЗИНКЕВИЧ Я.С.²

¹Институт проблем механики РАН

²Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ДИНАМИКА ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ СИЛ

Мета. Встановити вплив моментів сил різної фізичної природи на збурені рухи твердого тіла відносно нерухомої точки, які близькі до випадку Лагранжа. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла.

Методика. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. Система рівнянь руху твердого тіла приводиться до вигляду, який допускає усереднення по фазі кута нутації.

Результати. Розглянуті механічні моделі збурень, які відповідають руху тіла під дією сталого моменту, прикладеного вздовж осі симетрії, а також досліджений спільний вплив середовища з лінійною дисипацією і малого сталого моменту на рух твердого тіла, близький до випадку Лагранжа. Одержана усереднена система рівнянь першого наближення для повільних змінних. Усереднені системи проінтегровані чисельно для різних початкових умов і параметрів задачі.

Наукова новизна. Дан якісний і кількісний аналіз руху твердого тіла під дією ряду збурень, які зустрічаються в динаміці супутників і гіроскопів.

Практична значимість. Розвинені методи дослідження і одержані нові результати при дослідженні еволюції руху важкого симетричного твердого тіла під дією збурень різної природи.

Ключові слова: збурений рух, випадок Лагранжа, метод усереднення, момент.

Введение. Проблема эволюции движений твердого тела относительно неподвижной точки привлекает внимание исследователей в связи с задачами входа летательных аппаратов в атмосферу, космонавтики, динамики вращающегося снаряда, гироскопии. В теоретическом аспекте эти задачи вызывают интерес у специалистов в области теоретической механики. Они могут быть достаточно строго сформулированы в рамках динамических моделей твердого тела в случае Лагранжа, который является опорным.

Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, исследованы в ряде работ, например в [1–3] изучались движения относительно центра масс летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью. Рассматривалось движение вращающегося твердого тела в атмосфере.

В [4–6] приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутаации, получена усредненная система уравнений. Исследовано движение тела в среде с линейной диссипацией. Рассмотрены возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии.

В [7,8] изучались движения волчка Лагранжа, близкие к регулярным прецессиям, под действием малого возмущающего момента. Рассматривалось движение симметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки под действием сил трения, обусловленных диссипативной средой [9].

Обзор результатов в задачах эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, представлен в [5,10].

Постановка задачи. Рассматривается возмущенное движение твердого тела вокруг неподвижной точки O , близкое к случаю Лагранжа, под действием возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, & A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, & M_i &= M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, & \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений; ψ, θ, φ – углы Эйлера [11,5], A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O . Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна μ и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем $\mu = mgl$, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1) при малом ε , которое будет проводиться методом усреднения [12] на интервале времени порядка ε^{-1} .

Результаты исследований. Первыми интегралами уравнений для системы (1), в случае невозмущенного движения ($\varepsilon = 0$) являются

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1, \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, $c_i (i = 1, 2, 3)$ – произвольные постоянные ($c_2 \geq -\mu$).

Известно выражение для угла нутации θ в невозмущённом движении [11,5]:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty, \\ \alpha &= [\mu(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2}, \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin \operatorname{am}(\alpha t + \beta, k), \\ k^2 &= (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 < 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь u – периодическая функция $\alpha t + \beta$ с периодом $K(k)/\alpha$; $\operatorname{sn}, \operatorname{am}$ – эллиптический синус и амплитуда соответственно [13], β – произвольная фазовая постоянная, k – модуль эллиптических функций, через u_1, u_2, u_3 обозначены вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2} [(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2]. \quad (4)$$

Соотношения между корнями $Q(u)$ и первыми интегралами (2) записываются следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2r^2}{2A\mu}, \quad u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1, \quad (5)$$

$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}.$$

Для решения поставленной задачи применяется методика, разработанная в [4,5]. Данная методика используется для усреднения системы (1) при возмущениях, допускающих усреднение по фазе угла нутации θ , вдоль траекторий изменения $\theta(t)$.

С помощью ряда преобразований приведём первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \theta), & F_1 &= (M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta, \\ \dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \theta), & F_2 &= M_1 p + M_2 q + M_3 r, \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \theta), & F_3 &= C^{-1} M_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и в трёх последних уравнениях (1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$ и подставлены в (1), (6). Начальные значения медленных переменных G_z, H, r могут быть вычислены при помощи (2).

Правые части (6) содержат три быстрые переменные ψ, θ, φ , что представляет трудность для применения метода усреднения. Для исключения этой трудности потребуем, чтобы правые части уравнений (6) могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации, периодические по фазе переменной θ с периодом 2π , и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил

$$M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi = M_1^*(G_z, H, r, \theta), \quad M_1 p + M_2 q = M_2^*(G_z, H, r, \theta), \quad (7)$$

$$M_3 = M_3^*(G_z, H, r, \theta),$$

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta). \quad (8)$$

Тогда, правые части уравнений (6) F_1, F_2, F_3 будут 2π -периодическими функциями фазы угла θ .

Исследование возмущенного движения предполагается проводить для медленных переменных $u_i, i=1,2,3$. Медленные переменные G_z, H, r удастся выразить через u_i из (5) следующим образом [4,5]

$$G_z = \chi \delta (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + R)^{1/2}, \quad r = C^{-1} \chi (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - R)^{1/2},$$

$$H = \frac{1}{2} \mu \left[(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1}) \right], \quad \delta = \text{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) \quad (9)$$

$$R = \left[(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1) \right]^{1/2} \text{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), \quad \chi = (A\mu)^{1/2} \text{sign} r.$$

Знаки χ и R в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z и r . Если в процессе движения одна или обе величины $G_z^2 - C^2 r^2$ и r проходят через нуль, то возможна смена знаков χ и R , для определения которых можно воспользоваться исходной системой (6).

После ряда преобразований и усреднения по фазе угла нутации получим усредненную систему уравнений для медленных переменных $u_i, i=1,2,3$ в первом приближении:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i=1,2,3, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (10)$$

$$U_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \theta(t)) dt,$$

$$\text{где } V_i = V_{i1}F_1^* + V_{i2}F_2^* + V_{i3}F_3^*, \quad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$V_{11} = \frac{G_z - Cr u_1}{A \Delta}, \quad V_{12} = \frac{u_1^2 - 1}{\Delta}, \quad (12)$$

$$V_{13} = \frac{C}{\Delta} \left[(CA^{-1} - 1) r u_1^2 - G_z A^{-1} u_1 + r \right], \quad \Delta = \mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3).$$

Здесь функции $V_{2j}, V_{3j}, j=1,2,3$ получаются из соответствующих выражений (12) для того же значения j путём циклической перестановки индексов у величины u_i . Функции F_i^* получаются подстановкой в F_i из (6) выражений (9). В правые части формул (11) подставим быструю переменную θ из выражения (3) для невозмущенного движения. Тогда V_i (11) будут периодическими функциями t с периодом $2K(k)/\alpha$, где k, α определены соотношениями (3). Начальные значения для переменных u_i вычисляются по начальным данным G_{z0}, H_0, r_0 при помощи соотношений (5).

После исследования и решения системы (10) для u_i исходные переменные G_z, H, r восстанавливаются по формулам (9). Медленные переменные u_i и G_z, H, r определяются с погрешностью порядка ε .

В качестве примера предложенной методики исследуем движение гироскопа Лагранжа, под действием постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты $M_i (i=1,2,3)$ в этом случае имеют вид [14]

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = -\eta = \text{const} \quad (13)$$

и удовлетворяют условиям (7), (8) возможности усреднения по фазе угла нутации. Система (6) для моментов вида (13) записывается следующим образом

$$\dot{G}_z = -\varepsilon \eta \cos \theta, \quad \dot{H} = -\varepsilon \eta r, \quad \dot{r} = -\varepsilon C^{-1} \eta. \quad (14)$$

Проинтегрировав последние два уравнения (14), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения)

$$r = -\varepsilon C^{-1} \eta t + r_0, \quad H = -\varepsilon r_0 \eta t + H_0. \quad (15)$$

После ряда преобразований усредненная система (10) с учетом возмущающих моментов (13) примет вид

$$\frac{du_1}{d\tau} = \frac{-\eta}{A \Delta} (G_z - C r u_1)(v - u_1) \quad (123), \quad (16)$$

$$v = u_3 - (u_3 - u_1) E(k) / K(k).$$

Символ (123) означает, что два невыписанных соотношения получаются из выпященного циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [13], вместо G_z, H, r и k подставляются их выражения (9) и из последней формулы (3).

Также исследуем совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Возмущающие моменты $\varepsilon M_i, i=1,2,3$ имеют вид [14,15]:

$$M_1 = -ap, \quad M_2 = -aq, \quad M_3 = -br - \eta, \quad a, b > 0. \quad (17)$$

Здесь a, b – некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела, $\eta = \text{const}$.

Моменты (17) удовлетворяют условиям (7), (8), что дает возможность усреднения по фазе угла нутации θ . При данных возмущениях система (6) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon [a(p \sin \varphi + q \cos \varphi) \sin \theta + (br + \eta) \cos \theta], \\ \dot{H} &= -\varepsilon [a(p^2 + q^2) + (br + \eta)r], \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1}(br + \eta). \end{aligned} \quad (18)$$

Проинтегрировав третье уравнение (18), получим ($\tau = \varepsilon t$ – медленное время):

$$r = (r_0 + \eta b^{-1}) \exp(-bC^{-1}\tau) - \eta b^{-1}. \quad (19)$$

После ряда преобразований усредненная система (10) при учете возмущающих моментов (17) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{-1}{A\Delta} \left\{ a \left[A^{-1} (G_z - Cr u_1) (G_z - Cr v) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (u_1^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu v) \right] + (br + \eta)(G_z - Cr u_1)(v - u_1) \right\} \quad (20) \end{aligned} \quad (123)$$

Усреднённые системы (16) и (20) проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. Рассмотрим три случая, соответствующие следующим начальным данным:

$$\text{а) } u_1^0 = -0,932; u_2^0 = -0,866; u_3^0 = 2,932; \theta^0 = 150^\circ; \quad (21)$$

$$\text{б) } u_1^0 = 0; u_2^0 = 0,5; u_3^0 = 2; \theta^0 = 60^\circ; \quad (22)$$

$$\text{в) } u_1^0 = 0,913; u_2^0 = 0,996; u_3^0 = 1,087; \theta^0 = 5^\circ. \quad (23)$$

Предполагается, что в начальный момент волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения относительно оси динамической симметрии, равную $r_0 = \sqrt{3}$, кроме того $A = 1,5$; $C = 1$; $\mu = 0,5$. В начальный момент угол отклонения оси динамической симметрии от вертикали θ^0 .

На рис. 1 приведен результат численного интегрирования системы (16) при начальных условиях (21). Численный расчет был проведен при значениях $a = 0,125$; $b = 0,1$; $\eta = 0,1$. Проекция вектора кинетического момента G_z монотонно возрастает и стремится к нулю. Угловая скорость вращения r и полная энергия тела H медленно убывают. Графики функций u_1 и u_2 близки друг к другу.

Результат численного интегрирования системы (20) приведен на рис. 2 и 3, при значениях $a = 0,0125$; $b = 0,01$; $\eta = 0,01$. На рис. 2 построены графики функций G_z , H , r , u_i , $i = 1, 2, 3$ при начальных условиях (22). Полная энергия тела, проекция вектора кинетического момента на вертикаль, угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии монотонно убывают. Величина u_2 стремится к -1 медленнее, чем u_1 .

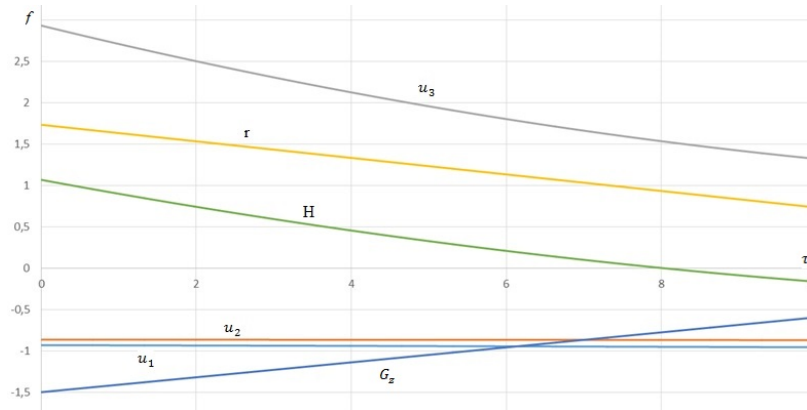


Рис. 1. Графики функций G_z , H , r , u_i , $i = 1, 2, 3$, при начальных условиях (21), в случае (13)

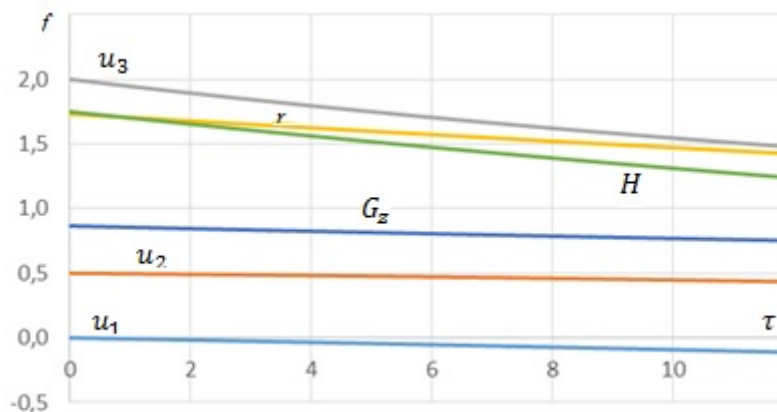


Рис. 2. Графики функций G_z , H , r , u_i , $i = 1, 2, 3$, при начальных условиях (22), в случае (17)

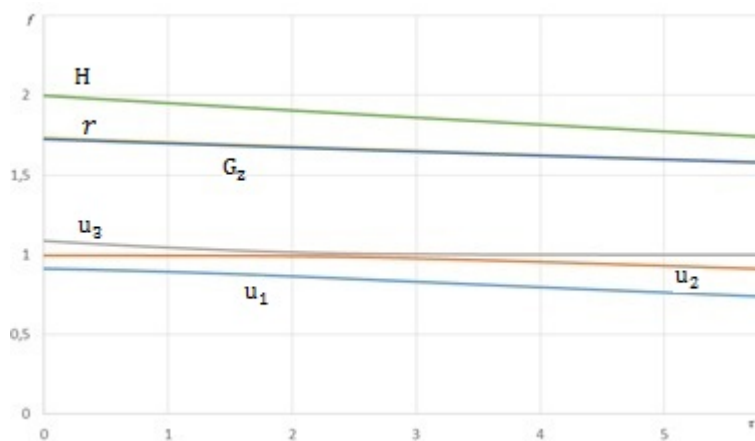


Рис. 3. Графики функций G_z , H , r , u_i , $i = 1, 2, 3$, при начальных условиях (23), в случае (17)

В случае начальных значений (23) результат численного интегрирования системы (20) изображен на рис. 3. Проекция вектора кинетического момента G_z и угловая скорость вращения r близки и медленно убывают. Полная энергия тела H медленно убывает. Величина u_3 достаточно быстро стремится к единице.

Выводы. При сравнении полученных результатов с результатами [4,5], где M_i не зависят от постоянного момента, можно отметить их ясное механическое содержание: проекция вектора кинетического момента на вертикаль и угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии медленнее стремятся к нулю, чем в [4,5]. Под

действием диссипативного момента и малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, тело стремится к устойчивому нижнему положению равновесия.

Корректность счета подтверждается тем, что полученные по численным данным и формулам (9) значения r практически совпадают с точным решением (15) и (19) соответственно.

Література

1. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу / Г. Е. Кузмак. – М.: Наука, 1970. – 348с.
2. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере / В.А. Ярошевский. – М.: Машиностроение, 1978. – 167с.
3. Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере / В.С. Асланов. – М.: Физматлит, 2004. – 160с.
4. Акуленко Л.Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т.43. – Вып.5. – С. 771–778.
5. Черноусько Ф.Л. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко. – М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2015. – 308с.
6. Акуленко Л.Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С.3–10.
7. Сазонов В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа / В.В. Сазонов, В.В. Сидоренко // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т.54. – Вып. 6. – С. 951–957.
8. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V.V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – vol.4. – P.35–57.
9. Simpson H.C. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction / H.C. Simpson, M.D. Gunzburger // J. Appl. Math. and Phys. – 1986. – vol.37, №6. – P.867–894.
10. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом / О.В. Холостова. – М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2016. – 308с.
11. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 655с.

References

1. Kuzmak, G.E. (1970). Dinamika neupravlyаемого dvizheniya letatelnykh apparatov pri vkhode v atmosferu [The Dynamics of the Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-Entry]. Moscow, Nauka [in Russian].
2. Yaroshevskii, V.A. (1978). Dvizhenie neupravlyаемого tela v atmosfere [Motion of an Uncontrolled Body in the Atmosphere]. Moscow, Mashinostroyeniye [in Russian].
3. Aslanov, V.S. (2004). Prostranstvennoe dvizhenie tela pri spuske v atmosfere [Spatial Motion of a Body at Descent in the Atmosphere]. Moscow, Fizmatlit [in Russian].
4. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1979) Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case // J. Appl. Math. Mech., vol. 43, no. 5, pp. 829–837.
5. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D. and Leshchenko, D.D. (2015). Evolyutsiya dvizheniy tverdogo tela otноситelno tsentra mass [Evolution of Motions of a Rigid body about its Center of Mass]. Moscow- Izhevsk, Institute of Computer Science [in Russian].
6. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession // Mechanics of Solids, vol. 21, no. 5, pp. 1–8.
7. Sazonov, V.V. and Sidorenko, V.V. (1990) The perturbed motions of a solid, close to regular Lagrangian precessions // J. Appl. Math. Mech., vol. 54, no. 6, pp. 781–787.
8. Sidorenko, V.V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium // J. Nonlinear Sci., vol. 4, pp. 35–57.
9. Simpson, H.C. and Gunzburger, M.D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction // J. Appl. Math. and Phys., vol. 37, no. 6, pp. 867–894.
10. Kholostova, O.V. (2016). Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom [Problems of Dynamics of Rigid Bodies with a Vibrating Suspension]. Moscow- Izhevsk, Institute of Computer Science [in Russian].
11. Suslov, G.K. (1946). Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical mechanics]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat [in Russian].
12. Volosov, V.M. and Morgunov, B.I. (1971). Metod osrednenia v teorii nelineynykh kolebatelnykh system [Method of Averaging in the Theory of Non-linear

12. Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971 – 507с.
13. Градштейн И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.М. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
14. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение / К. Магнус. – М.: Мир, 1974. – 526с.
15. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В.Н. Кошляков. – М.: Наука, 1985.–288 с.

Oscillatory Systems]. Moscow, Izdatelstvo MGU [in Russian].

13. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2000). Tables of Integrals, Sums, Series and Products, Academic Press, San Diego, CA.

14. Magnus, K. (1971). Kreisel. Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

15. Koshlyakov, V.N. (1985). Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody [Problems in Rigid Body Dynamics and the Applied Theory of Gyroscopes: Analytical Methods]. Moscow, Nauka [in Russian].

**ДИНАМИКА ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ СИЛ
АКУЛЕНКО Л.Д.¹, ЛЕЩЕНКО Д.Д.², КОЗАЧЕНКО Т.А.², ЗИНКЕВИЧ Я.С.²**

¹Институт проблем механики РАН

²Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Цель. Установить влияние моментов сил различной физической природы на возмущенные вращательные движения твердого тела относительно неподвижной точки, близкие к случаю Лагранжа. Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы уравнений движения твердого тела.

Методика. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. Система уравнений движения твердого тела приводится к виду, допускающему усреднение по фазе угла нутации.

Результаты. Рассмотрены механические модели возмущений, отвечающие движению тела под действием постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии, а также исследовано совместное влияние среды с линейной диссипацией и малого постоянного момента, на движение твердого тела, близкое к случаю Лагранжа. Получена усреднённая система уравнений первого приближения для медленных переменных. Усредненные системы проинтегрированы численно при разных начальных условиях и параметрах задачи.

Научная новизна. Дан качественный и количественный анализ движения твердого тела под действием возмущений, которые встречаются в динамике спутников и гироскопов.

Практическая значимость. Развита методика исследования и получены новые результаты при исследовании эволюции движения тяжелого симметричного твердого тела под действием возмущений различной природы.

Ключевые слова: возмущенное движение, случай Лагранжа, метод усреднения, момент.

**DYNAMICS OF LAGRANGE'S TOP UNDER THE ACTION
OF PERTURBATION TORQUES OF FORCES**

AKULENKO L.¹, LESHCHENKO D.², KOZACHENKO T.², ZINKEVYCH YA.²

¹Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

²Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Purpose. We want to establish the influence of perturbations of an arbitrary physical nature on the motion of a dynamically symmetric rigid body, close to the Lagrange case. The problem is posed of investigating the behavior of the solution of system of equations of motion.

Methodology. The averaging method is used for solving the problem. We apply an averaging procedure for system of the equations of motion of a rigid body under arbitrary initial conditions for perturbations admitting of averaging with respect to phase of the nutation angle.

Findings. We consider a motion of a rigid body in Lagrange's case under the action of a small torque which is constant in the body-connected axes and applied along the axis of symmetry. We examine a perturbed Lagrange motion, taking into account the torques acting on the rigid body from the external medium and small constant torque. The averaged system of equations of motion for slow variables is obtained. Numerical solutions of the averaged systems of equations are constructed.

Originality. As a result of analysis and solution of the obtained equations, we establish some quantitative and qualitative specific features of the motions and provide a description of the evolution of the body motion. Such problems take place in the investigation of the motion of satellite about its center of mass, in dynamics of gyroscopes.

Practical significance. The paper presents an approach to the dynamics of angular motions of rigid bodies subjected to perturbation torques of different physical nature. Evolution of these motions is analyzed by means of averaging method. The approach presented in the paper and the obtained results are applicable to the attitude dynamics of spacecraft.

Keywords: perturbed motion, Lagrange case, averaging method, torque.