УДК 519.21

ТЕОРЕМА БАКСТЕРІВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ ГАУССІВСЬКИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

С.М. Краснитський, д.ф.-м.н, професор
Київський національний університет технологій та дизайну
О.О. Курченко, д.ф.-м.н, професор
Київський національний університет Тараса Шевченка

Ключові слова: гауссівські узагальнені процеси, процеси з незалежними значеннями типу 2, граничні теореми типу Леві — Бакстера.

Сучасні математичні моделі процесів в фізичних та інформаційних просторах досить часто використовують так звані узагальнені функції, детерміновані або стохастичні [1,2]. В даній роботі в якості такої функції розглядається узагальнений випадковий процес $\xi = (\xi, \varphi)$, під яким розуміємо сукупність дійсних випадкових величин $\left\{\xi_\varphi, \varphi \epsilon K\right\}$, що індексовані дійсними фінітними нескінченно диференційованими функціями з простору *K* (інше поширене позначення *D*) Л. Шварца [1]. За означенням, розглядуваний узагальнений випадковий процес є лінійним з імовірністю 1 за своїм функціональним аргументом φ. Скінченновимірні розподіли процесу вважаються нормальними (гауссівськими). В нашій доповіді розглядаються процеси з підкласу процесів вищезазначеного типу, а саме — процеси з незалежними значеннями. Для таких процесів величини $(\xi, \varphi), (\xi, \psi)$ є незалежними, якщо носії функцій φ, ψ не мають спільних внутрішніх точок. Згідно з [1], коваріаційний функціонал $B(\varphi, \psi)$ вказаного процесу має вигляд

$$B(\varphi, \psi) = \int \sum_{j,k \geq 0} R_{jk}(x) \varphi^{(j)}(x) \psi^{(k)}(x) dx, \qquad (1)$$

де $\int \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots, \varphi^{(j)}$— похідна *j*-го порядку від функції φ, причому лише скінченна кількість (неперервних) функцій R_{jk} є відмінною від 0 на кожному скінченному інтервалі. Будемо називати такий процес процесом *M*-го порядку або процесом типу *M*, якщо порядок диференціальної форми (1) (величина $\max_{j,k}\{j + k\}$), дорівнює *M*.

Для процесів другого порядку (*M* = 2) нами одержано граничну теорему так званого типу Бакстера (або Леві — Бакстера). Для звичайних (неузагальнених) процесів та полів такі теореми найчастіше полягають в формулюванні умов, за яких суми вигляду

$$S(\xi, U_n) = \sum_{k=1}^{b(n)} \left(\Delta_{n,k} \xi\right)^2 \qquad (2)$$

збігаються до невипадкової константи. Тут $U_n = \{U_{n1}, \dots, U_{n,b(n)}\}$ для кожного n є сім'єю проміжків, що утворюють розбиття відрізку [0,1], а $\Delta_{n,k}\xi$ — деяка нормована скінченна різниця значень ξ на інтервалі $U_{nk}, k = 1, \dots, b(n);\ b(n) \in \aleph, b(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

На даний час виконано значну кількість досліджень, що присвячені даній темі. Така увага до питання пов'язана з змістовною інтерпретацією відповідних результатів в термінах стохастичного аналізу, а також у застосуванні до статистичних задач оцінювання параметрів і перевірки гіпотез для випадкових процесів і полів [1, 2]. Результатів розглядуваного типу для узагальнених процесів і полів (зауважимо, що сам вираз (2) тут не є визначеним) відомо у даний час значно менше. У роботі [3], що присвячена даному питанню, наводиться відповідний список літератури як для звичайного, так і для узагальненого випадку. Зокрема щодо узагальнених процесів з незалежними значеннями є відомою теорема бакстерівського типу для процесу типу 0 (білого шуму) [2,3]. Основний результат даної роботи полягає в наступному. Введемо двопараметричні сімейства функцій $\chi_{t,h}, \varphi_{t,h}, \psi_{t,h}$ на $R = (-\infty, \infty)$:

$$\chi_{t.h}: R \to [0,1], t \in R, 0 < h < 1, \chi_{t.h}(x) = \begin{cases} 1, x \in (t+h^2, t+h-h^2) \\ 0, x \notin (t, t+h) \end{cases},$$

$$\varphi_{t,h}(x) = \chi_{0.h}\big(2(x-t)\big) - \chi_{0.h}\left(2\left(x - \left(t + \frac{h}{2}\right)\right)\right), \psi_{t,h}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{t,h}(y)dy$$

та покладемо $\psi_{k,n} = \psi_{t.h}(\cdot)\big|_{t=k/b(n), h=1/b(n)}, k = 0,1, \dots, b(n)-1, n \geq 1.$

Теорема. Нехай ξ є узагальненим процесом з незалежними значеннями типу 2 з нульовим математичним сподіванням. Тоді

$$S_n(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{b(n)-1} (\xi, \psi_{k,n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \Big(R_{11}(x) - \big(R_{02}(x) + R_{20}(x)\big)\Big)dx$$

у середньому квадратичному. Якщо є збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(b(n))^{-1}$, то збіжність $S_n(\xi)$ має місце з імовірністю 1.

Список використаних джерел

1. Гельфанд И.М. Обобщённые функции, в. 4 / Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. – М.: ФМ, 1961. – 472 с.

2. Розанов Ю.А. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1995. – 252 с.

3. Krasnitskiy S.M. Baxter Type Theorems for Generalized Random Gaussian Processes / Krasnitskiy S.M., Kurchenko O.O. // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – №1. – P. 45 - 52.